



# Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso dei joint



**Prof. Alberto Borghese**


N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.




## Sommario

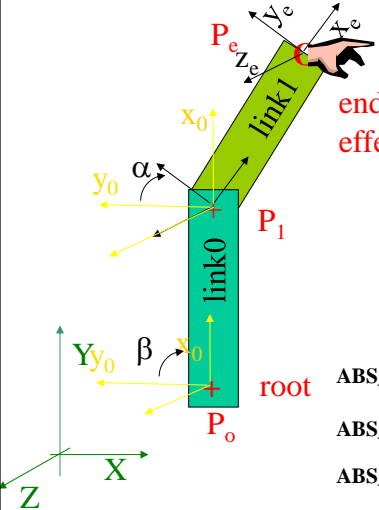


- Più gradi di libertà che end-point ( $m < n$ , sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo



## Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)





$${}_{ABS\_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

$${}_{ABS\_ABS}P(t) = {}_{ABS\_ABS}A(t) \cdot eP$$

$${}_{ABS\_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS\_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$


$${}_{ABS\_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

A.A. 2024-2025


3/39

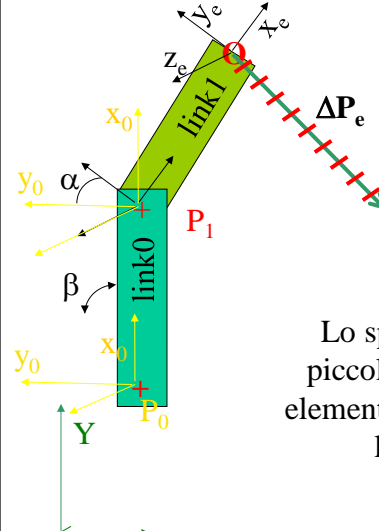
<http://borgnese.di.unimi.it>

3



## Cinematica inversa





Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni e le traslazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare o lineare richiesta per tutti i joint.

A.A. 2024-2025

4/39

<http://borgnese.di.unimi.it>

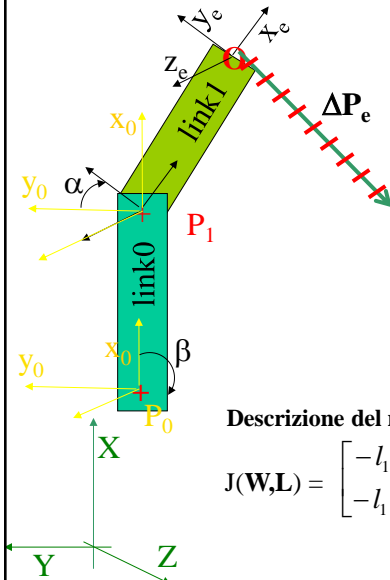
4



## Cinematica linearizzata



Consideriamo la trasformazione end\_point -> joint.



La trasformazione joint -> end\_point è:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = f(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$${}_{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}) = f_x(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1)$$

$${}_{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P}_y(\mathbf{t}) = f_y(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1)$$

$${}_{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P}_z(\mathbf{t}) = f_z(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1)$$

$${}_{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descrizione del movimento alle differenze finite

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P}_e^k = \mathbf{J}(\alpha^k, \beta^k, T_x^k, T_y^k) \Delta \mathbf{W}^k$$

A.A. 2024-2025

5/39

<http://borgese.di.unimi.it>

5



## Cinematica inversa



Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo  $w_{\text{ini}}$  e da una posizione dell'end-point  ${}^e\mathbf{P}_{\text{ini}} = f(\mathbf{w}, \mathbf{L})$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo  $k$ :

- 1) Identifico  $\Delta \mathbf{P}_k$  dalla posizione corrente verso la posizione finale di  ${}^e\mathbf{P}$ .
- 2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti,  $w_k$ .
- 3) Calcolo, attraverso  $\mathbf{J}_k^{-1}$ , il valore  $\Delta w_k$  associato ( $\Delta w_k = \mathbf{J}_k^{-1} \Delta \mathbf{P}_k$ ).
- 4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo:  $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$ .
- 5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell'end point:
 
$${}^e\mathbf{P}_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, \mathbf{L}).$$
 In generale,  ${}^e\mathbf{P}_{k+1} \neq \mathbf{P}_k + \Delta \mathbf{P}_k$ .
- 6) Calcolo il nuovo vettore verso l'end point  ${}^e\mathbf{P}$ .

Fino a quando non arriva a  $\mathbf{P}_{\text{finale}}$ .

A.A. 2024-2025

6/39

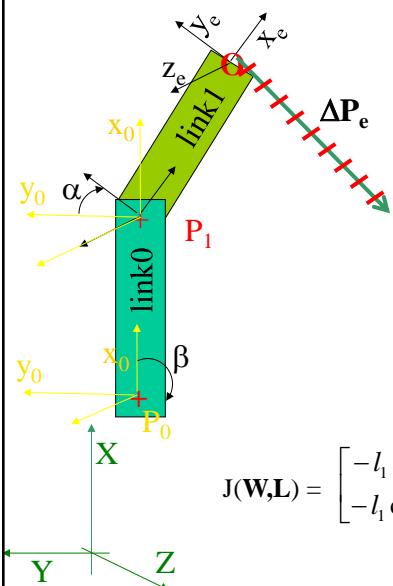
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>

<http://borgese.di.unimi.it>

6



## Sistema sottodeterminato - esempio



Sono 2 equazioni in 4 incognite

End point:  $\Delta P_e = \{X_e, Y_e\}$ : 2 dof

Parametri di controllo (parametri liberi):

- $\Delta\alpha$
- $\Delta\beta$
- $\Delta T_x$
- $\Delta T_y$

Esistono  $\infty^2$  modi di spostare l'end-point e ottenere  $\Delta P_e$

Quale insieme di parametri scegliamo?

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025

7/39

<http://borgnese.di.unimi.it>

7



## Esempio (m = 2, n = 4)

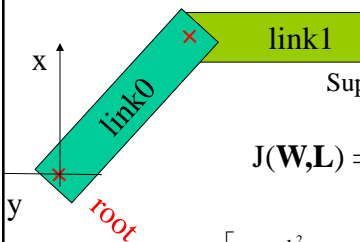


$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{J}^T * \mathbf{J})^{-1} * \mathbf{J}^T * \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} dP_x / dt \\ dP_y / dt \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\alpha / dt \\ d\beta / dt \\ dT_x / dt \\ dT_y / dt \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$



Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_0 \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_0 \sin 45 & l_1^2 + l_0^2 / 2 + 2l_1 l_0 \sin 45 + l_0^2 / 2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025

8/39

<http://borgnese.di.unimi.it>

8



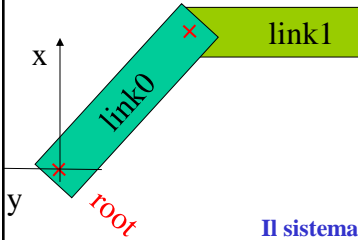
## Soluzione (m=2, n=4)



$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o / 2 + 2l_1 l_o \sin 45 + l_o^2 / 2 & -l_1 - l_o \sin 45 & -l_o \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_o \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_o \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$$

ma:  $\det(J^T * J) = 0$



Il sistema è indeterminato, ammette infinite soluzioni.

Voglio poterne **determinare una** secondo un qualche criterio ragionevole.



## Sommario



- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- **Soluzione algebrica**
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo



# Decomposizione ai valori singolari



$$A X = b$$

$$J \Delta W = \Delta P_e$$

$$(U^T W V) X = b \Rightarrow X = (V^T W^{-1} U) b$$

Ortonormale  $M \times N$   
Determinante = 1

Diagonale ( $N \times N$ )

Ortonormale  $N \times N$   
Determinante = 1

## Singular Value Decomposition

Se  $J$  ( $W$ ) è singolare  $\rightarrow$  almeno 1 dei  $w_{ii} = 0$ .

Per esempio:

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



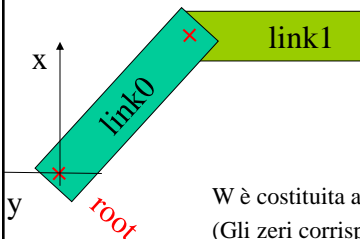
# Soluzione indeterminata ( $m=2, n=4$ )



$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o^2 / 2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2 / 2 & -l_1 - l_o \sin 45 & -l_o \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_o \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_o \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J^T * J) = 0$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$$



Applico la SVD a  $J$

$$(U^T W V) = J$$

$W$  è costituita ad esempio così:

(Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli)

Non posso invertire  $W$

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = (V^T W^{-1} U) J^T b$$



## Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti



$$\Delta W = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$$

$$\Delta W = V' * W^{-1} * U * \Delta P_e$$

Se J è rank-deficient,  $J^T * J$  è singolare e W è singolare. Non le posso invertire.

**Il sistema è indeterminato, esistono  $\infty^2$  soluzioni, ma posso determinare ugualmente una soluzione**

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice diagonale  $W = \text{diag}\{w_{ii}\}$ .

In questo caso il problema è sovrapparametrizzato.

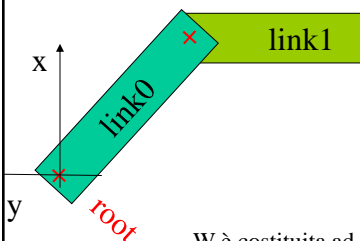


## Soluzione indeterminata (m=2, n=4)



$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o / 2 + 2l_1 l_o \sin 45 + l_o^2 / 2 & -l_1 - l_o \sin 45 & -l_o \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_o \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_o \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J^T * J) = 0 \quad \det(W) = 0$$



$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$$


$$\Delta w = (V' * W^{-1} * U) * \Delta P$$

W è costituita ad esempio così:


Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione**



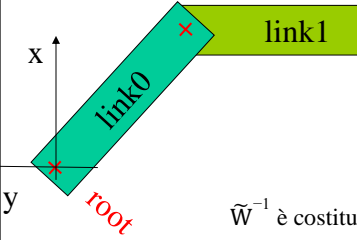
## Soluzione (m=2, n=4)



$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_0 \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_0 \sin 45 & l_1^2 + l_0 / 2 + 2l_1 l_0 \sin 45 + l_0^2 / 2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(W) = 0$       ?       $\Delta w = (V^T \tilde{W}^{-1} U) * \Delta P$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$$x = V^T \tilde{W}^{-1} U J^T b$$

$\tilde{W}^{-1}$  è costituita ad esempio così:


$$\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se  $w_{ii} = 0 \rightarrow 1/w_{ii} = 0$


Gli zeri sulla diagonale corrispondono ai valori singolari nulli.

A.A. 2024-2025
15/39
http://borgese.di.unimi.it

15



## Soluzione (m=2, n=4)

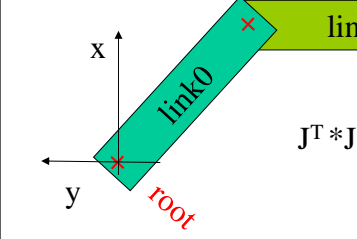


$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_0 \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_0 \sin 45 & l_1^2 + l_0 / 2 + 2l_1 l_0 \sin 45 + l_0^2 / 2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = V^T \tilde{W}^{-1} U b$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$        $\det(J^T * J) = 0$

$l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$



$$J^T * J (W, L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025
16/39
http://borgese.di.unimi.it

16



## Soluzione (m=2, n=4)



$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Supponiamo: } \alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$$

$$l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$$

$$x = V' * W^{-1} U b$$

$$\gg [U' W V] = \text{svd}(J^T J)$$

$$\det(J^T * J) = 0$$

$$U' =$$

$$\begin{bmatrix} -0.4469 & 0.5005 & -0.7398 & 0.0497 \\ -0.8633 & -0.2591 & 0.3622 & 0.2375 \\ 0.2234 & -0.2502 & -0.2432 & 0.9101 \\ 0.0710 & 0.7873 & 0.5122 & 0.3359 \end{bmatrix}$$

$$W =$$

$$\begin{bmatrix} 18.1915 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4653 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V =$$

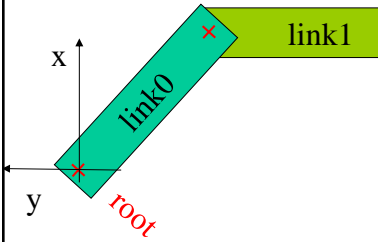
$$\begin{bmatrix} -0.4469 & 0.5005 & 0.7407 & 0.0336 \\ -0.8633 & -0.2591 & -0.3333 & -0.2766 \\ 0.2234 & -0.2502 & 0.3436 & -0.8771 \\ 0.0710 & 0.7873 & -0.4713 & -0.3911 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025

17/39

<http://borghese.di.unimi.it>

17



## Soluzione (m=2, n=4)



$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Supponiamo: } \alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$$

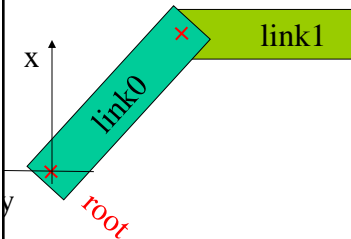
$$l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$$

$$\Delta W = V' * \tilde{W}^{-1} U \Delta P_e$$

$$\tilde{W}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0550 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(J^T * J) = 0$$



$$\gg \Delta W = V' * \tilde{W}^{-1} * U * \Delta P_e$$

$$\Delta W =$$

$$\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix}$$

Norma l<sup>2</sup> pari a 0.335459

A.A. 2024-2025

18/39

<http://borghese.di.unimi.it>

18



## Verifica Soluzione

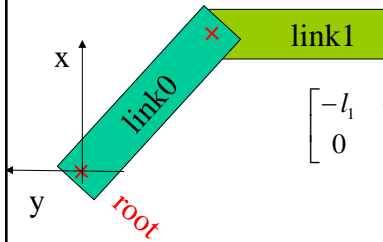


$$J = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_x^e = 1 \quad \Delta P_y^e = 0$

$$\Delta W = V' \tilde{W}^{-1} U \Delta P_e$$

Soluzione mediante pseudo-inversa



$$J * \Delta w = \Delta P_e$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

J

$$\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix} = [1 \ 0]^T$$

$\Delta P_e$

Spostamento ottenuto = spostamento desiderato

$\Delta W$  Norma  $l^2$  pari a 0.335459

Utilizzo più o meno con la stessa ampiezza tutti i gradi di libertà

A.A. 2024-2025

19/39

<http://borgese.di.unimi.it>

19



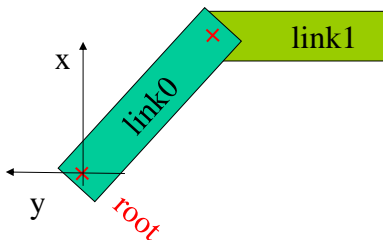
## Proprietà della Soluzione



Proprietà: **soluzione a norma minima**

Altre soluzioni possibili (tali per cui  $Ax = b$ ), si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione

Quale altra soluzione sarebbe possibile per ottenere lo spostamento desiderato:  $\{1 \ 0\}$ ?



Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_x^e = 1 \quad \Delta P_y^e = 0$

A.A. 2024-2025

20/39

<http://borgese.di.unimi.it>

20



## Un'altra soluzione



Soluzione possibile:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = 0^\circ$$

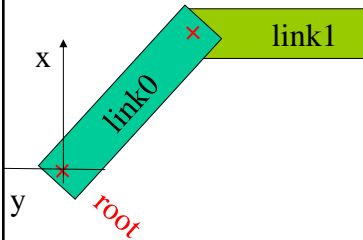
$$\Delta T_x = 1$$

$$\Delta T_y = 0$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$

$$l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_x^e = 1 \quad \Delta P_y^e = 0$$

Spostamento verso l'alto dell'end-point di 1



$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \ 0]$$

$$J \quad \Delta W = \Delta P$$

Norma della soluzione pari a  $1 > 0.335459$



## Sommario



- Più gradi di libertà che end-point ( $m < n$ , sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- **Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo**

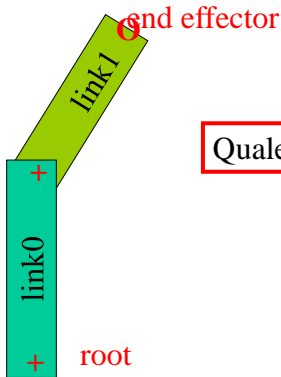


## Soluzione mediante pseudo-inversa



$$\Delta P_e = J \Delta W \quad \Rightarrow \quad v = J \Delta W - \Delta P_e$$

$$J' J \Delta W = J' \Delta P_e \quad \Rightarrow \quad \Delta W = (J' J)^{-1} J' \Delta P_e$$



Quale criterio viene soddisfatto dalla soluzione?

$$\min_{\Delta W} v^2 = (\|J \Delta W - \Delta P\|)^2$$

A.A. 2024-2025

23/39

<http://borgnese.di.unimi.it>

23



## Come rendere risolubile il sistema



$$v = J \Delta W - \Delta P \quad \min_{\Delta W} v^2 = (\|J \Delta W - \Delta P\|)^2 \quad \text{Soluzione } \|\Delta W\| \text{ a norma minima}$$

$$b - Ax$$

Inserisco il vincolo  $\|\Delta W\|$  a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare.

Il problema si trasforma in un problema di **regolarizzazione**

$$\min_{\Delta W} (\|J \Delta W - \Delta P\|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$$

Dove la norma è intesa in  $l_2$ .

$$\min_{\Delta W} [(J \Delta W - \Delta P)^2 + \lambda (\Delta W)^2]$$

Risulta un funzionale quadratico di  $\Delta W$ , "facile" da minimizzare

A.A. 2024-2025

24/39

<http://borgnese.di.unimi.it>

24



## Sviluppo della regolarizzazione



$$\min_{\Delta W} (\|J \Delta W - \Delta P\|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$$

$\Delta W$  penalizza ampie variazioni di orientamento e traslazione

Nel caso di funzione quadratica,  $\min_{\Delta W} (\|J \Delta W - \Delta P\|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$

il risultato è relativamente semplice  $2[J^T(J \Delta W - \Delta P) + \lambda \Delta W] = 0$

$$J^T(J \Delta W - \Delta P) + \lambda \Delta W = 0$$

Da cui risulta:

$$J^T J \Delta W - J^T \Delta P + \lambda I \Delta W = 0 \rightarrow (J^T J + \lambda I) \Delta W - J^T \Delta P = 0$$

$$\Delta W = (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T \Delta P$$



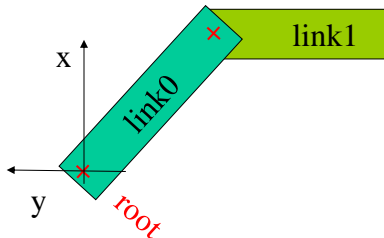
## Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)



$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o / 2 + 2l_1 l_o \sin 45 + l_o^2 / 2 & -l_1 - l_o \sin 45 & -l_o \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_o \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_o \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


$$\Delta W = (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T \Delta P$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   $\det(J^T * J) = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2$   $\Delta P_{ex} = 1$   $\Delta P_{ey} = 0$   $\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$




$$J^T * J + \lambda I =$$

$$\begin{bmatrix} 4 + \lambda & 4 + 2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4 + 2\sqrt{2} & 7 + 4\sqrt{2} + \lambda & -2 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 - \sqrt{2} & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 + \lambda \end{bmatrix}$$



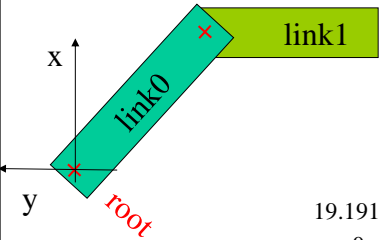
## Esempio regolarizzazione



$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0 \quad \gg \det = 47.3137$



Soluzione con regolarizzazione con  $\lambda = 1$


$J^T * J = U^T W V$

$\gg W =$	$\gg \Delta W =$
19.1915    0    0    0	-0.1691
0    2.4653    0    0	-0.1443
0    0    1.0000    0	0.0845
0    0    0    1.0000	-0.1021


$\det(W) \neq 0$

A.A. 2024-2025 27/39 http://borgese.di.unimi.it

27



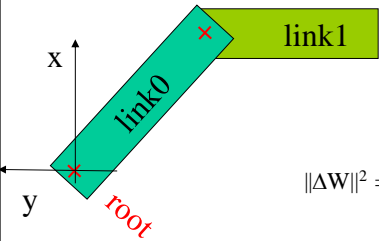
## Esempio regolarizzazione - errore



$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0 \quad \gg \det = 47.3137$



Soluzione con regolarizzazione con  $\lambda = 1$

$\gg \Delta W =$	$\Delta W =$	
-0.1691	-0.2251	
-0.1443	-0.1281	$\Delta P_e = J \Delta W$
0.0845	0.1125	
-0.1021	-0.1811	$\ \Delta W\ ^2 = 0.1125$

$\|\Delta W\|^2 = 0.0647$

$\gg J \Delta W =$

0.9155	<b>Spostamento ottenuto <math>\neq</math></b>	$\min (\  J \Delta W - \Delta P_e \ ^2 + \lambda \ \Delta W\ ^2)$
0.1021	<b>spostamento desiderato <math>\Delta P_e\{1, 0\}</math></b>	$\uparrow$ Non realizzo $\Delta P$ $\nwarrow$ "pago" perche' mi muovo ( $\Delta W$ )

L'errore ha 2 componenti

A.A. 2024-2025 28/39 http://borgese.di.unimi.it

28

## Esempio regolarizzazione con ampiezza diversa

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$   
 $\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$

$x = V'W^{-1}U b$

Soluzione con regolarizzazione con  $\lambda = 0.01$

$\gg \Delta W =$   
 $\gg \Delta P =$

$\det(J^T * J + \lambda I) = 0.0027$   
 Soluzione molto vicina a quella non regolarizzata  
 Norma delle variazioni dei parametri liberi

$\gg \Delta W =$   
 $\gg \Delta P =$ 

-0.2242	0.9989
-0.1284	0.0018
0.1121	
-0.1798	

$\|\Delta W\|^2 = 0.1116$

$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix} = [1 \ 0]^T$$

$\Delta W =$   

-0.2251	
-0.1281	$\Delta P_e = J \Delta W$
0.1125	
-0.1811	$\ \Delta W\ ^2 = 0.1125$

A.A. 2024-2025
29/39
http://borgese.di.unimi.it

29

## Esempio regolarizzazione con $\lambda = 10$

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$   
 $\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$

$x = V'W^{-1}U b$

Soluzione con regolarizzazione con  $\lambda = 10$

$\gg \Delta W =$

$\det(J^T * J + \lambda I) = 3.32 \times 10^{-4}$

$\gg \Delta P_e =$ 

-0.0804	0.5978
-0.1162	0.1494
0.0402	
-0.0149	

$\|\Delta W\|^2 = 0.0021$

Soluzione non molto lontana da quella non regolarizzata  
 Norma delle variazioni dei parametri liberi MINORE (costano di più)

A.A. 2024-2025
30/39
http://borgese.di.unimi.it

30



## Come introdurre un peso diverso sui joint



$$\Delta P_e = J \Delta W \quad \min \| \Delta P_e - J \Delta W \| \quad \| \Delta W \| \text{ a norma minima}$$

Inserisco il vincolo  $\|dW\|$  a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare e peso il costo sui vari joint in modo differente.

$$\min (\| J \Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda C \| \Delta W \|^2)$$

Dove la norma è intesa in  $l_2$  e  $C$  è una matrice diagonale

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\min [ ( J \Delta W - \Delta P_e )^2 + \lambda C (\Delta W)^2 ]$$

Risulta un funzionale quadrato di "facile" minimizzazione

2 termini:

- Fedeltà al movimento  $\| J \Delta W - \Delta P_e \|^2$
- "utilizzo" dei gradi di libertà  $\| \Delta W \|^2$

<http://borgnese.di.unimi.it>

31



## Sviluppo della regolarizzazione



$$\min (\| J \Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda C \| \Delta W \|^2)$$

$d\Theta$  penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica,  $\min (\| J \Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda C \| \Delta W \|^2)$

il risultato è relativamente semplice  $2[J^T(J \Delta W - \Delta P_e) + \lambda C \Delta W] = 0$

$$J^T(J \Delta W - \Delta P_e) + \lambda C \Delta W = 0$$

Da cui risulta:

$$(J^T J + \lambda C) \Delta W = J^T \Delta P_e$$

$$\Delta W = (J^T J + \lambda C)^{-1} J^T \Delta P_e$$


A.A. 2024-2025

32/39


<http://borgnese.di.unimi.it>

32





## Esempio regolarizzazione più corretto



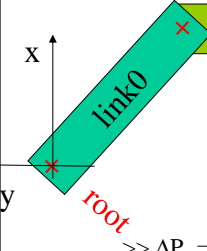
$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$

$x = V^T W^{-1} U^T b$

Supponiamo:  $c_1 = c_2 = 100; c_3 = c_4 = 1$   
 $\lambda = 0.01$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$



$\gg \Delta P_e =$   
 0.9914  
 0.0004

Spostamento ottenuto  $\neq$   
 spostamento desiderato  
 (ma molto vicino)

$\gg Ws2 =$

19.1398	0	0	0
0	1.9568	0	0
0	0	0.5185	0
0	0	0	0.0618


$\gg \Delta W$

-0.0172	Utilizzo quasi
-0.0288	esclusivamente
0.8589	$T_x$
-0.0403	


$\gg \det = 1.1992$   
 $\|\Delta W\|^2 = 0.2151$ , ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].  
 Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti  $\Delta T_x$  e  $\Delta T_y$

A.A. 2024-2025
35/39

35



## Esempio regolarizzazione più corretto



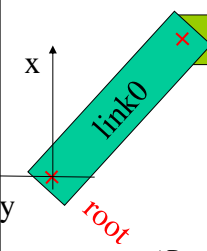
$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo:  $\alpha = \beta = 45^\circ / T_x = T_y = 0$   
 $l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P_{e_x} = 1 \quad \Delta P_{e_y} = 0$

$x = V^T W^{-1} U^T b$

Supponiamo:  $c_1 = c_2 = 100; c_3 = c_4 = 1$   
 $\lambda = 0.00001$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$



$\gg \Delta P_e =$   
 0.9999  
 0.0000

Spostamento ottenuto  $\neq$   
 spostamento desiderato  
 (ma molto molto vicino)

$\gg W =$

18.2010	0	0	0
0	1.4686	0	0
0	0	0.0068	0
0	0	0	0.0006

$\gg \Delta W$

-0.0173	Utilizzo quasi
-0.0290	esclusivamente
0.8663	$T_x$
-0.0410	

$\gg \det = 1.17 \times 10^{-4}$   
 $\|\Delta W\|^2 = 0.2170$  Il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 10000 per le componenti  $\Delta T_x$  e  $\Delta T_y$  e per 100 per le componenti  $\Delta \alpha$  e  $\Delta \beta$ .  
 Il costo di penalizzazione del movimento è un centesimo rispetto al caso precedente.

A.A. 2024-2025
36/39

36



## Cinematica inversa



Parto da una configurazione iniziale definita da un certo valore dei parametri di controllo  $w_{ini}$  e da una posizione dell'end-point  ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo  $k$ :

- 1) Identifico  $\Delta P_k$  dalla posizione corrente verso la posizione finale di  ${}^eP$ .
- 2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti,  $w_k$ .
- 3) Calcolo, attraverso  $(J_k^* J_k + \lambda C)^{-1}$ , il valore  $\Delta w_k$  associato ( $\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$ ).
- 4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo:  $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$ .
- 5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell'end point:

$${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L). \text{ In generale, } {}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k.$$

Fino a quando non arriva a  $P_{finale}$ .



## Osservazioni sulla matrice C



C può essere costante su tutto il movimento oppure può essere diversa per ogni passo  $k$ ,  $C_k$ .

Si possono utilizzare diverse strategie per impostare  $C_k$ :

- Utilizzare all'inizio del movimento maggiormente i gradi di libertà prossimali e alla fine quelli distali.
- Definire l'inizio dell'utilizzo di alcuni gradi di libertà (e.g. l'apertura e la forma della mano) più o meno presto in funzione dell'intenzione del movimento.
- Definire un peso in funzione degli altri elementi della scena (e.g. mantenere una certa distanza da alter entità nella scena).
- .....



## Sommario



- Più gradi di libertà che end-point ( $m < n$ , sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo