



Realtà Virtuale From 3D to 2D


Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano




Sommario

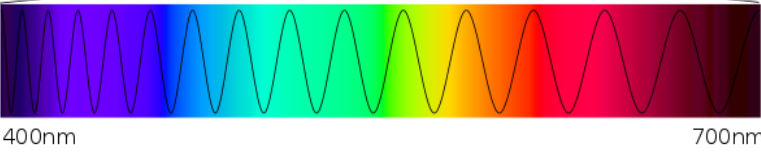
- La trasformazione proiettiva
- Notazione matriciale
- Calibrazione

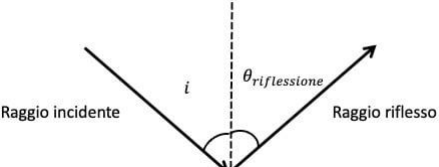


Immagine



La luce sono onde elettromagnetiche nello spettro del visibile.

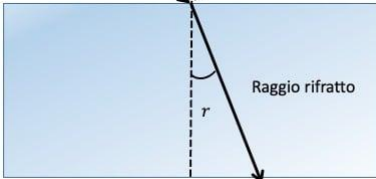




Raggio incidente

Raggio riflesso


$\theta_{riflessione}$




Raggio rifratto

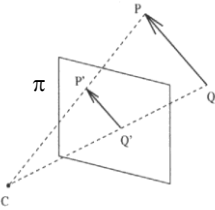
r

Un raggio di luce viene riflesso e/o rifratto dalle superfici

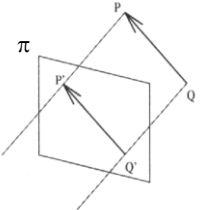


Proiezione centrale e proiezione ortogonale (3D -> 2D)





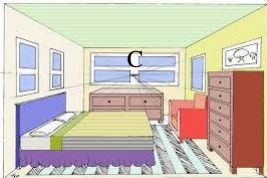
1)




2)

$P(X,Y,Z)$ viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto $P'(X',Y')$. Z è la distanza dal piano immagine.


- 1) X' dipende da X e Z .
- 2) X' non dipende da Z , ma solo da X .



Proiezione centrale: centro di proiezione al finito - C.



Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.



A.A. 2024-2025

4/56



Dal 3D al 2D



Come si forma un'immagine?

- Scena con oggetti riflettenti.
- Sorgente di illuminazione
- Piano di rilevazione della luce riflessa.

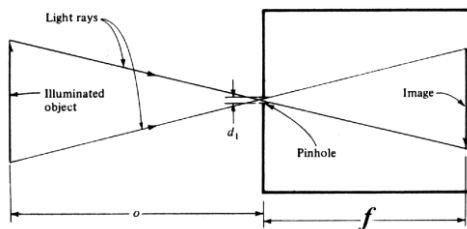
Il motore di questa trasformazione è la **proiezione prospettica**.

A.A. 2024-2025

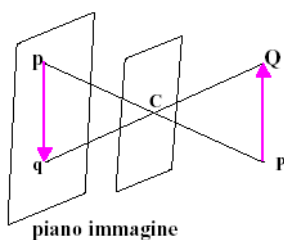
5/56



La pin-hole camera



Proiezione prospettica:
tutti i raggi di proiezione
passano per un unico punto,
detto **centro di proiezione**.




Pinhole camera


Perchè non funziona in pratica?

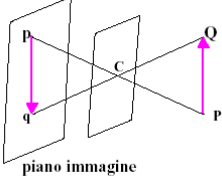
A.A. 2024-2025

6/56



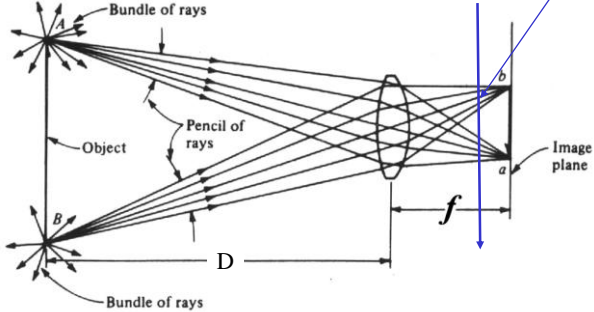
La lente





pinhole camera

Pinhole camera




Lente convergente

I raggi provenienti da un punto 3D vengono fatti convergere nello stesso punto del piano immagine


Lente convergente

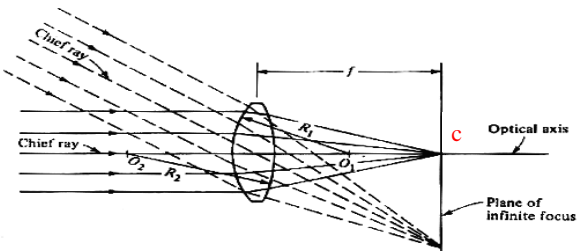
I raggi provenienti da un punto 3D vengono fatti convergere nello stesso punto del piano immagine

A.A. 2024-2025 Data la forma della lente f e D sono fissati



Geometria dell'ottica





Oggetti all'infinito

Oggetti all'infinito

- **Lunghezza focale:** distanza del piano immagine quando un oggetto si trova all'infinito e dà un'immagine nitida sul piano immagine.
- **Asse ottico:** raggio che non viene deviato dalla lente.
- **Intersezione dell'asse ottico con il piano immagine dà il punto principale (c).**

A.A. 2024-2025 8/56

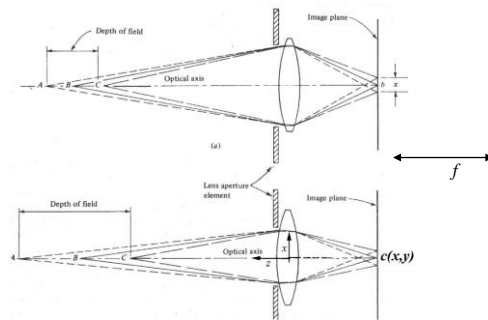


Messa a fuoco



Problema della messa a fuoco

La profondità di campo dipende dall'apertura della lente.



Parametri di camera (o intrinseci – 3 parametri):

- Punto principale $c(x,y)$
- distanza focale (piano messa a fuoco), f

Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).

Distorsioni.

A.A. 2024-2025

9/56

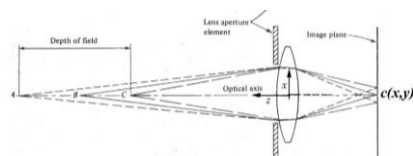


Obiettivi



Stessa proiezione centrale.


Sistema di specchi per mettere a fuoco a distanze diverse e/o aumentare l'angolo di vista di una camera




A.A. 2024-2025


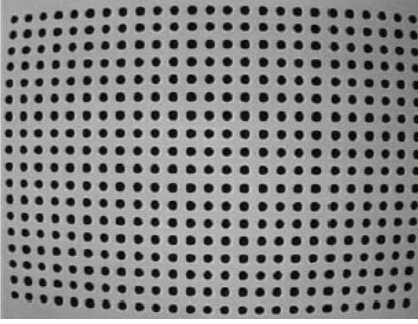
10/56


<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>



Distorsioni






Ottime per effetti speciali, un po' meno per delle misure.....


Le camere non sono metriche.

A.A. 2024-2025

11/56



Distorsioni



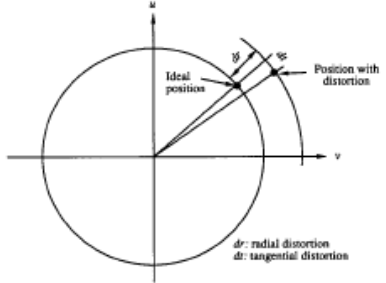
Distorsioni radiali.

Distorsioni tangenziali.

Shrinkage ($x' = \lambda x, y' = y$).

$$x_m = x + f(x,y)$$


$$y_m = y + g(x,y)$$



d_r: radial distortion
d_t: tangential distortion


A.A. 2024-2025

12/56



Distorsioni radiali

A cuscinetto



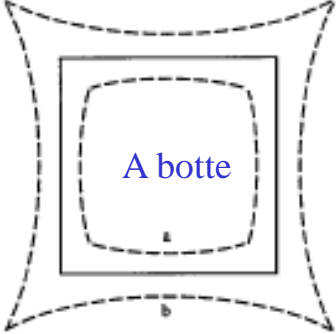
$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots$

$r = |p - p_0|$

Rappresentazione polare (ρ, ϕ) :

$x = \rho \cos\phi$

$y = \rho \sin\phi$




$$dx(p) = k_0 x + k_1 x(x^2 + y^2) + O[(x,y)^4]$$


$$dy(p) = k_0 y + k_1 y(x^2 + y^2) + O[(x,y)^4]$$

Il parametro k_0 non si considera perchè corrisponde ad una variazione di scala.

A.A. 2024-2025
13/56



I modelli di distorsioni




Modelli parametrici


1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$ (1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$ (2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$ (3)

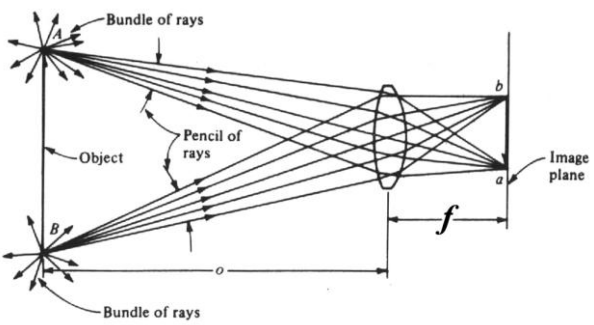
In alternativa: modelli **semi-parametrici** che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.

A.A. 2024-2025
14/56



Le distorsioni







$dr(p) = k_0r + k_1r^3 + k_2r^5 + \dots$ $p_{\text{misurato}} = p_{\text{proiettato}} + dr(p)$

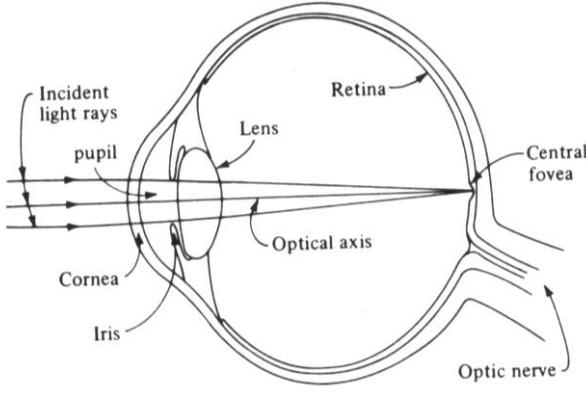
Il punto a per effetto delle distorsioni viene misurato in una posizione $p_{a_proiettato} + dr(p_{a_proiettato})$

A.A. 2024-2025
15/56




L'occhio umano






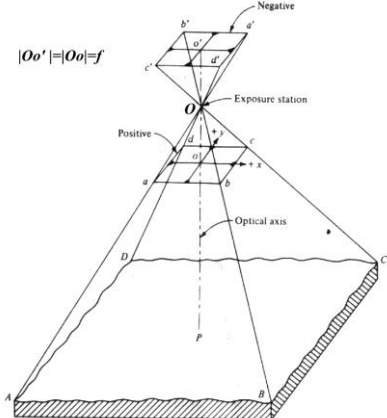
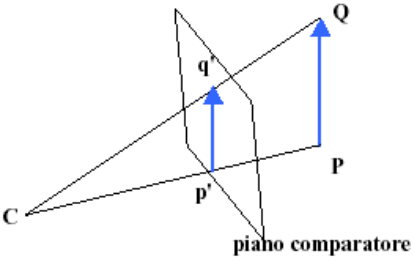
Its behavior is very similar to that of a camera

A.A. 2024-2025
16/56




Raddrizzamento dell'immagine







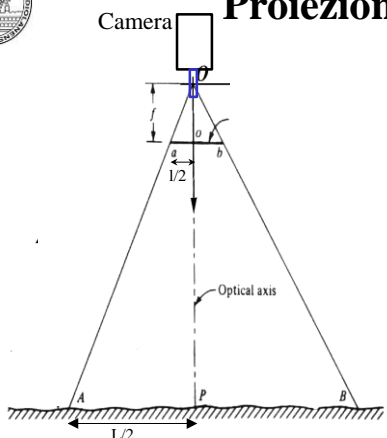
Si considera un piano posto davanti al centro di proiezione (si ottiene scandendo l'immagine dall'angolo a dx in basso). In digitale si ottiene iniziando a «contare» i pixel dal punto in alto a dx invece che in basso a sx.

A.A. 2024-2025
17/56



Proiezione semplice






Per similitudine fra i triangoli aOo e AOP:


$Oo : OP = ao : AP$

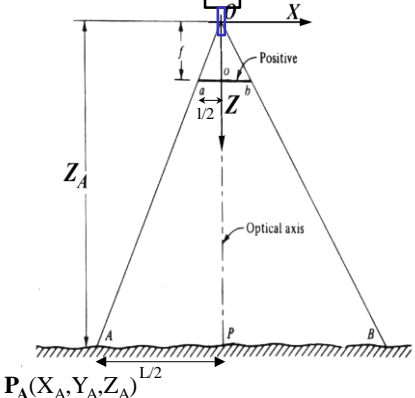
E' una relazione tra enti geometrici, come facciamo a passare a una relazione algebrica?

A.A. 2024-2025
18/56



Proiezione semplice

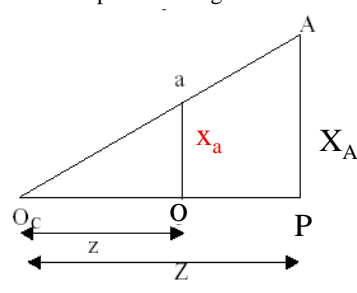




$P_A(X_A, Y_A, Z_A)$

co un sistema di riferimento Cartesiano.

coordinate misurate rispetto a un centro comune.
sono orientate come il piano immagine




Per similitudine fra i triangoli aOo e AOP:

Oo : OP = ao : AP
 $f : Z_A = x_a : X_A \rightarrow x_a = f X_A / Z_A$


$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = f X_A / Z_A \\ y_a = f Y_A / Z_A \end{cases}$$

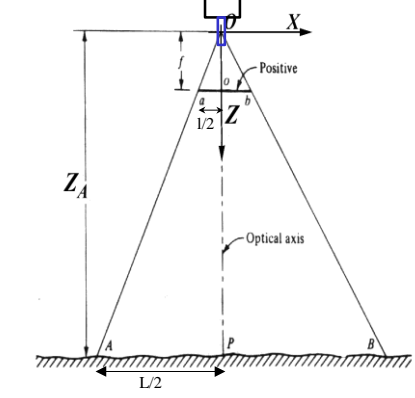
A.A. 2024-2025


19/56



Offset sull'immagine








Il punto principale non avrà coordinate $c(x_0, y_0)$

Dipende da 3 parametri: f, x_0, y_0 - **parametri interni**


$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a - x_0 = f X_A / Z_A \\ y_a - y_0 = f Y_A / Z_A \end{cases}$$

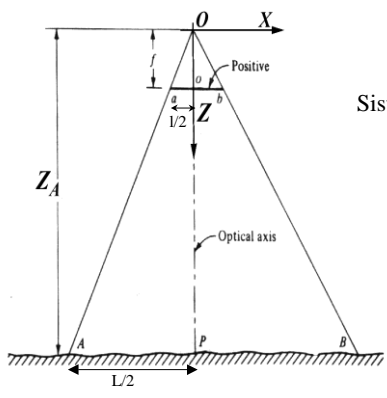
A.A. 2024-2025

20/56



Sistemi di riferimento







Sistema di riferimento opportuno per la camera

Gli oggetti virtuali possono essere definiti in un sistema di riferimento diverso, assoluto (e.g. sistema di riferimento del SW di modellazione)

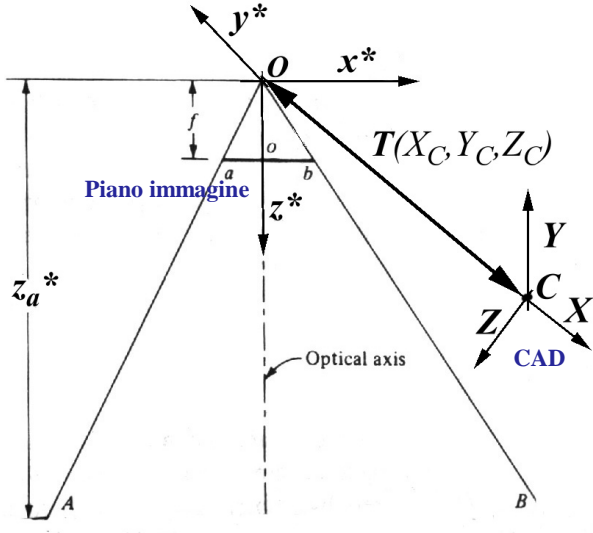
A.A. 2024-2025
21/56



I parametri esterni



- **Traslazione:**
3 componenti:
 $T(X_C, Y_C, Z_C)$
- **Rotazione**
 $R_{3 \times 3}(\omega, \phi, k)$



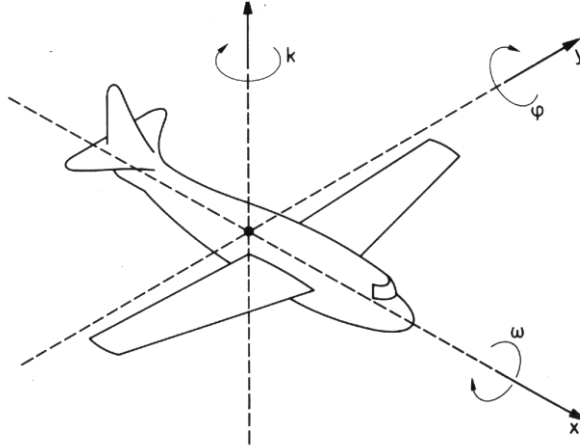
A.A. 2024-2025
22/56



Angoli di orientamento nello spazio 3D



Modo generale: roll, pitch, e yaw. Sono 3 rotazioni sequenziali,
 (ω, ϕ, κ) : rollio, beccheggio e deriva. non commutative.



A.A. 2024-2025

23/56



Rototraslazione



$$\mathbf{P}^* = \mathbf{R} (\mathbf{P} - \mathbf{T})$$

$$X^* = r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)$$

$$Y^* = r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)$$


$$Z^* = r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)$$

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -(r_{11}T_x + r_{12}T_y + r_{13}T_z) \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -(r_{21}T_x + r_{22}T_y + r_{23}T_z) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -(r_{31}T_x + r_{32}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$


A.A. 2024-2025

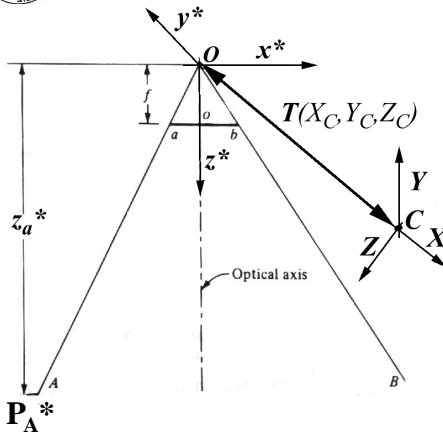
24/56

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Dal 3D al 2D






1) Mi riconduco alla proiezione semplice


$$P_A^* = R (P_A - T)$$

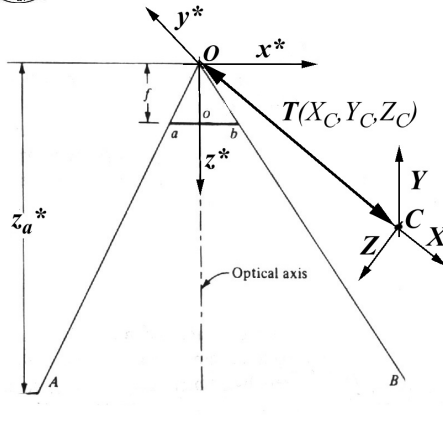
$$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*)$$

A.A. 2024-2025
25/56



Dal 3D al 2D






2) Implemento la proiezione semplice

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a - x_0 = f X_A^* / Z_A^* \\ y_a - y_0 = f Y_A^* / Z_A^* \end{cases}$$


$$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*) \Rightarrow a(x_a, y_a)$$

La terza coordinata sul piano immagine, $z_a = f = \overline{oO}$

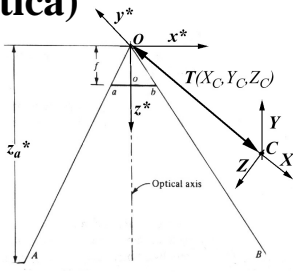
A.A. 2024-2025
26/56



Equazioni di collinearità (rappresentazione prospettica)



$$\begin{aligned} X^*_A &= r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C) \\ Y^*_A &= r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C) \\ Z^*_A &= r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C) \end{aligned}$$




$$(x_a - x_o) = f \frac{X^*_A}{Z^*_A} = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$


$$y_a - y_o = f \frac{Y^*_A}{Z^*_A} = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.

A.A. 2024-2025
27/56

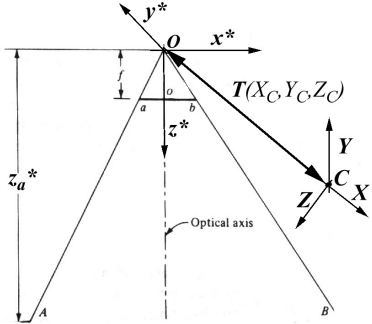


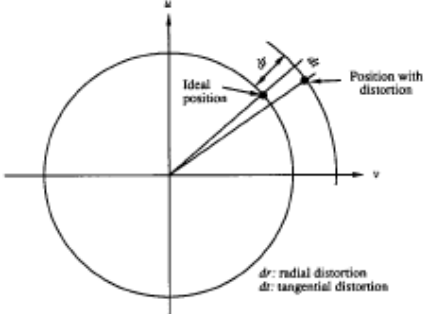
Modello reale della ripresa fotografica

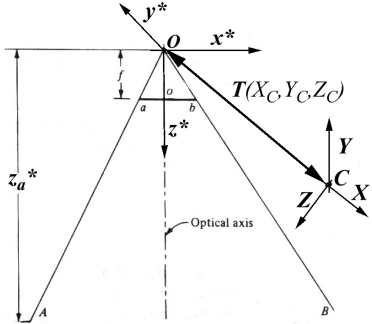



$$(x_a - x_o) + f(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$(y_a - y_o) + g(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$










Tassonomia dei parametri



$P^3 \rightarrow P^2$ Interior parameters

- Focal length, f
- Principal point (x_o, y_o)

$P^3 \rightarrow P^3$ Exterior parameters

- Orientation (ω, ϕ, κ)
- Position (X_o, Y_o, Z_o)


$P^2 \rightarrow P^2_m$ Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$
 $(f(x, y, x_o, y_o); g(x, y, x_o, y_o))$

$$(x_a - x_o) + f(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$


$$(y_a - y_o) + g(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

A.A. 2024-2025

29/56



Sommaro



- La trasformazione proiettiva
- **Notazione matriciale**
- Calibrazione

A.A. 2024-2025

30/56



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

A =

$$MA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RT} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -r_{11}X_C - r_{12}Y_C - r_{13}Z_C \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -r_{21}X_C - r_{22}Y_C - r_{23}Z_C \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -r_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025

33/56



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$MA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RT} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -r_{11}X_C - r_{12}Y_C - r_{13}Z_C \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -r_{21}X_C - r_{22}Y_C - r_{23}Z_C \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -r_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{MA}) = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -r_{11}X_C - r_{12}Y_C - r_{13}Z_C \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -r_{21}X_C - r_{22}Y_C - r_{23}Z_C \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -r_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix} =$$

A.A. 2024-2025

34/56



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{MA}) = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_{11}X_C - r_{12}Y_C - r_{13}Z_C \\ -r_{21}X_C - r_{22}Y_C - r_{23}Z_C \\ -r_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} fr_{11} + x_0r_{31} & fr_{12} + x_0r_{32} & fr_{13} + x_0r_{33} & -f(r_{11}X_C + r_{12}Y_C + r_{13}Z_C) - x_0(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C) \\ fr_{21} + y_0r_{31} & fr_{22} + y_0r_{32} & fr_{23} + y_0r_{33} & -f(r_{21}X_C + r_{22}Y_C + r_{23}Z_C) - y_0(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -r_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$



Notazione matriciale




$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$


$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} fr_{11} + x_0r_{31} & fr_{12} + x_0r_{32} & fr_{13} + x_0r_{33} & -f(r_{11}X_C + r_{12}Y_C + r_{13}Z_C) - x_0(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C) \\ fr_{21} + y_0r_{31} & fr_{22} + y_0r_{32} & fr_{23} + y_0r_{33} & -f(r_{21}X_C + r_{22}Y_C + r_{23}Z_C) - y_0(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -r_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix} \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} (fr_{11} + x_0r_{31})X + (fr_{12} + x_0r_{32})Y + (fr_{13} + x_0r_{33})Z - f(r_{11}X_C + r_{12}Y_C + r_{13}Z_C) - x_0(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C) \\ (fr_{21} + y_0r_{31})X + (fr_{22} + y_0r_{32})Y + (fr_{23} + y_0r_{33})Z - f(r_{21}X_C + r_{22}Y_C + r_{23}Z_C) - y_0(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C) \\ r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z - m_{31}X_C - r_{32}Y_C - r_{33}Z_C \end{bmatrix}$$

in coordinate omogenee



Notazione matriciale



$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P} =$

$$\left[\begin{array}{l} (fr_{11} + x_0 r_{31})X + (fr_{12} + x_0 r_{32})Y + (fr_{13} + x_0 r_{33})Z - f(r_{11}X_c + r_{12}Y_c + r_{13}Z_c) - x_0(r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c) \\ (fr_{21} + y_0 r_{31})X + (fr_{22} + y_0 r_{32})Y + (fr_{23} + y_0 r_{33})Z - f(r_{21}X_c + r_{22}Y_c + r_{23}Z_c) - y_0(r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c) \\ r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z - m_{31}X_c - r_{32}Y_c - r_{33}Z_c \end{array} \right]$$

in coordinate omogenee


↓

in coordinate cartesiane


$$= \left[\begin{array}{l} (fr_{11} + x_0 r_{31})X + (fr_{12} + x_0 r_{32})Y + (fr_{13} + x_0 r_{33})Z - f(r_{11}X_c + r_{12}Y_c + r_{13}Z_c) - x_0(r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \\ (fr_{21} + y_0 r_{31})X + (fr_{22} + y_0 r_{32})Y + (fr_{23} + y_0 r_{33})Z - f(r_{21}X_c + r_{22}Y_c + r_{23}Z_c) - y_0(r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \end{array} \right] =$$

1

A.A. 2024-2025 37/56



Notazione matriciale



$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P} =$

in coordinate cartesiane

$$= \left[\begin{array}{l} (fr_{11} + x_0 r_{31})X + (fr_{12} + x_0 r_{32})Y + (fr_{13} + x_0 r_{33})Z - f(r_{11}X_c + r_{12}Y_c + r_{13}Z_c) - x_0(r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \\ (fr_{21} + y_0 r_{31})X + (fr_{22} + y_0 r_{32})Y + (fr_{23} + y_0 r_{33})Z - f(r_{21}X_c + r_{22}Y_c + r_{23}Z_c) - y_0(r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \end{array} \right] =$$

1

$$= \left[\begin{array}{l} fr_{11}(X - X_c) + x_0 r_{31}(X - X_c) + fr_{12}(Y - Y_c) + x_0 r_{32}(Y - Y_c) + fr_{13}(Z - Z_c) + x_0 r_{33}(Z - Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \\ fr_{21}(X - X_c) + y_0 r_{31}(X - X_c) + fr_{22}(Y - Y_c) + y_0 r_{32}(Y - Y_c) + fr_{23}(Z - Z_c) + y_0 r_{33}(Z - Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \end{array} \right] =$$

1


$$= \left[\begin{array}{l} f[r_{11}(X - X_c) + r_{12}(Y - Y_c) + r_{13}(Z - Z_c)] + x_0[r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c)] \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \\ fr_{21}(X - X_c) + y_0 r_{31}(X - X_c) + fr_{22}(Y - Y_c) + y_0 r_{32}(Y - Y_c) + fr_{23}(Z - Z_c) + y_0 r_{33}(Z - Z_c) \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \end{array} \right] =$$

1


$$= \left[\begin{array}{l} f[r_{11}(X - X_c) + r_{12}(Y - Y_c) + r_{13}(Z - Z_c)] + x_0 \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \\ fr_{21}(X - X_c) + y_0 r_{31}(X - X_c) + fr_{22}(Y - Y_c) + y_0 \\ r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c) \end{array} \right] + y_0$$

1

A.A. 2024-2025 38/56




Sommarario




- La trasformazione proiettiva
- Notazione matriciale
- **Calibrazione**

A.A. 2024-2025

39/56



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$(x_a - x_o) + f(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$(y_a - y_o) + g(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

3 attori:

A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X, Y, Z)\}$

B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x, y, f)\}$

C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, r_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).

B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).

A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2024-2025

40/56




Augmented reality at work (proiezione)






A.A. 2024-2025

41/56



Le operazioni richieste



- Posiziono l'oggetto virtuale nella scena reale manualmente
 - Definisco la sua posizione e orientamento
 - Definisco la sua grandezza (proiezione)

- Applico all'oggetto virtuale la stessa rototraslazione della camera
 - Calcolo la rototraslazione della camera a ogni frame (dallo spostamento di un insieme di punti identificati nella scena attraverso marker virtuali o reali)
 - Applico la stessa rototraslazione all'oggetto virtuale (aggiorno la roto-traslazione della camera rispetto all'oggetto virtuale)

A.A. 2024-2025

42/56

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Il problema della calibrazione



We do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to **view the volume of interest!**

Set-up requires:

- Cameras position and orientation (exterior parameters)
- Focusing (and possibly choice of a proper lens, interior parameters)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time
and/or
Multiple cameras are used.**



In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- **Parametri esterni:** $X_C, Y_C, Z_C, r_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- Parametri interni: x_o, y_o, f .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1,$
.....

Calibrazione dei parametri esterni può essere fatta separatamente dai parametri interni e/o di distorsione.



Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.
- Per proiettare oggetti virtuali su camere.



Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).

Metodi:

- Scacchiere (Zhang et al., Software in Matlab e OpenCV)
- Barra rigida con 2 marker (Borghese e Cerveri, 2000; utilizzata nei sistemi di Mocap; e.g. nello SMART-3D).
- Griglie 3D (non più utilizzato, Borghese et al., 1990)

Metodi ibridi:

- **Structure from Motion (SfM)**, **SLAM** (Simultaneous Localization and Mapping), vengono ricostruite le coordinate 3D dei punti, stimati i parametri interni e determinato il movimento. Molto utilizzata in robotica.

Algoritmi:

- DLT (Direct Linear Transform -> da 9 parametri, si passa a 12 in un sistema lineare).
- Bundle adjustment. Stima iterativa dei parametri.



2D Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche – mappatura tra incroci di una griglia regolare e la loro misura sul piano immagine)

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external + other internal parameters).



A.A. 2024-2025

47/56



Calibrazione 3D con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.

Ho 9 + D parametri aggiuntivi.


Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo (ogni punto di controllo -> 2 equazioni).

$$(x_a - x_o) + f(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$(y_a - y_o) + g(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

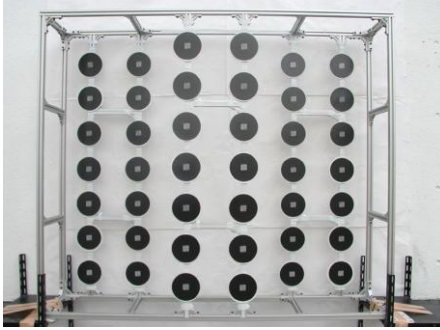
A.A. 2024-2025


48/56

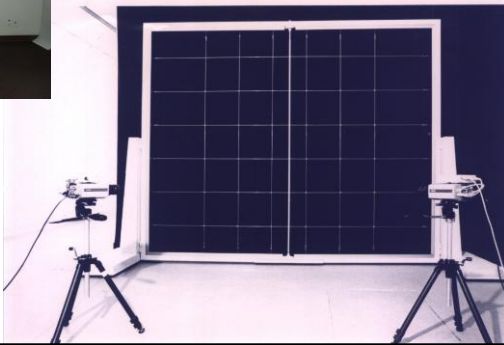



Test field (Known control points)

3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.











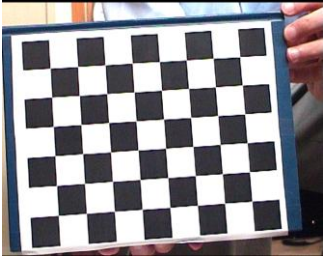
49/56

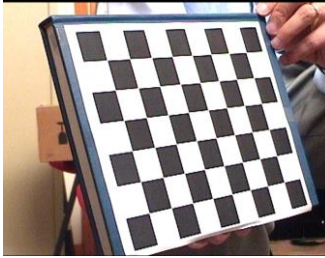
A.A

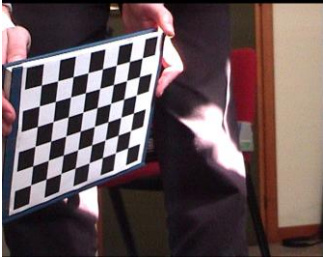


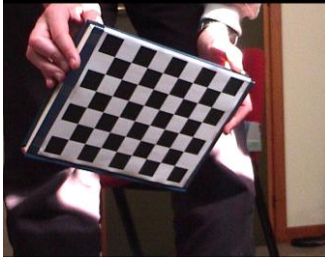
Calibration through a chessboard











Estimated Parameters.
Distortions
Internal
External

<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>

Also suite in Matlab

A.A. 2024-2025

50/56

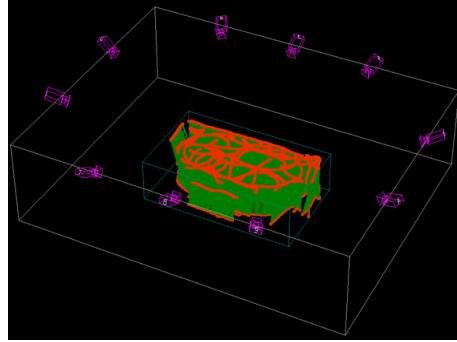


Wand Calibration



2 steps:

- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.



Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor, video).

A.A. 2024-2025

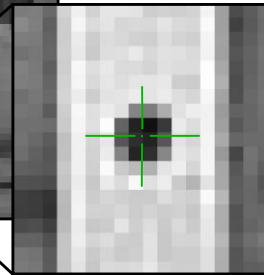
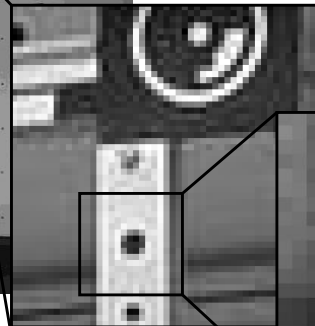
51/56



Misurazione manuale dei punti di controllo



Coded target




Misure con mouse/cursore sul monitor


Precisione: 1/4 - 1/8 Pixel

A.A. 2024-2025

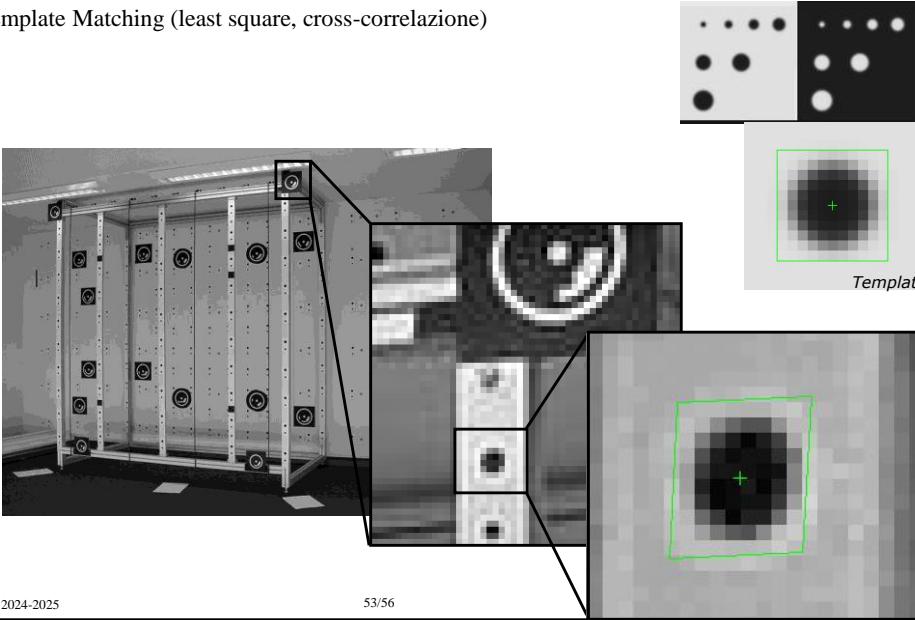
52/56




Misurazione automatica dei control points




Template Matching (least square, cross-correlazione)



A.A. 2024-2025 53/56



Cross-correlazione

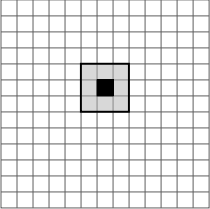


Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

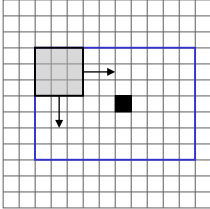
$$\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$


$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{mn-1}} \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{mn-1}} \quad \sigma_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$


finestra di correlazione




finestra di ricerca




 Conjugate pixels

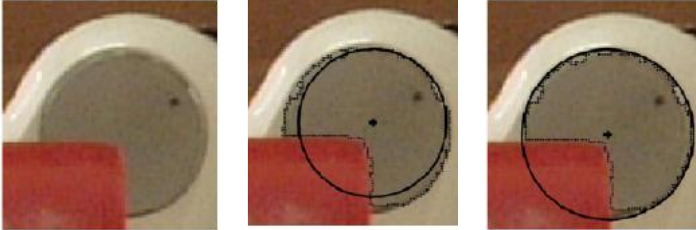
 Search window

A.A. 2024-2025 54/56



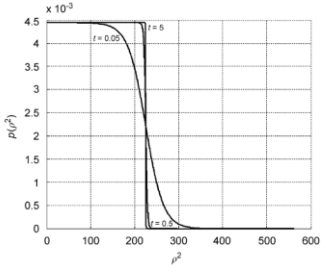
Approccio statistico al circle fitting






Frosio, Borghese – Pattern Recognition - 2008


$$L(\mathbf{p}_C, R_C) = \prod_{i=1}^N p(\rho_i^2, R_C).$$



A.A. 2024-2025
55/56



Sommaro



- La trasformazione proiettiva
- Notazione matriciale
- Calibrazione

A.A. 2024-2025
56/56