



# Realtà Virtuale Le trasformazioni geometriche



Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Informatica  
[alberto.borghese@unimi.it](mailto:alberto.borghese@unimi.it)

Università degli Studi di Milano



## Lesson content



- **Skeleton**
- Representation of the skeleton position



## Visione 3D, Elaborazione di immagini e grafica



- **Vision 3D:** Images / sec  $\Rightarrow$  3D reconstruction of the static or dynamic scene and its interpretation
- **3D Graphics:** 3D model of the scene, static or dynamic  $\Rightarrow$  3D visualization

*Virtual Reality is a branch of 3D graphics*

*They meet on the ground of 3D visualization*



## Skeleton animation through rotations



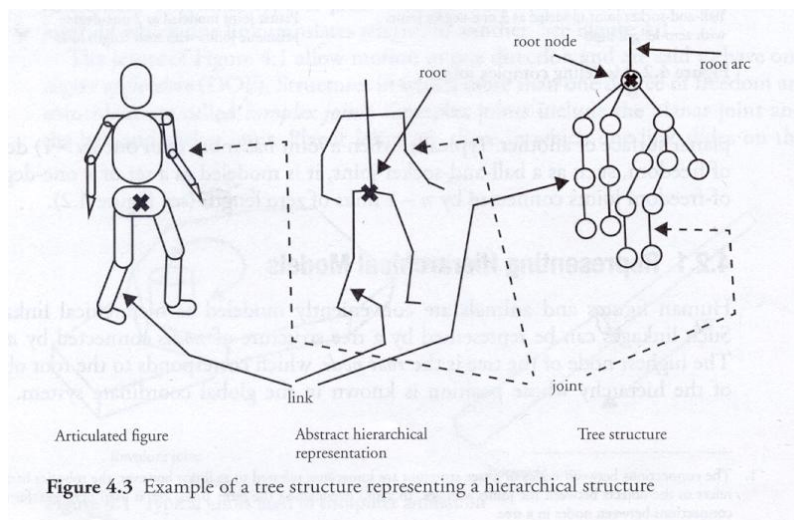
Unregistered HyperCam



Skeleton - **segments** connected by **hinges**



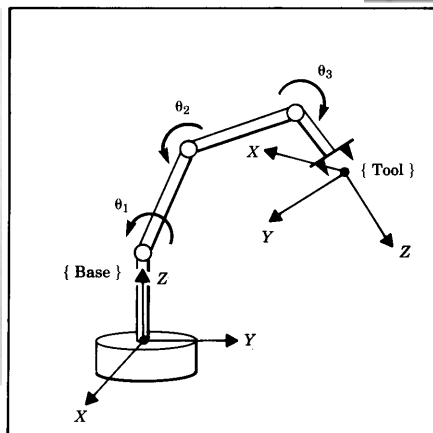
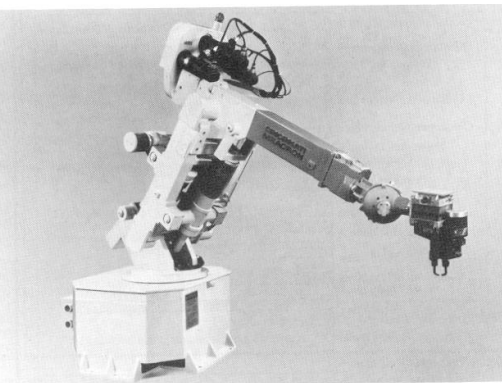
## Graphical representation



Scheletro senza skin



## Position description (skeleton = robot)



Kinematic chain. Hierarchical structure.

Position fully defined by degrees of freedom (movements allowed by articulated joints).

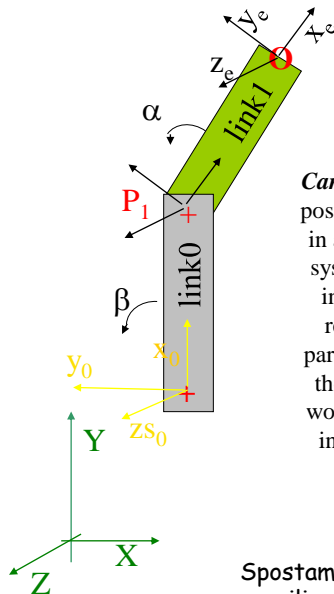
Frame. Reference system rigidly connected with part of the robot.

End point (punto finale della catena cinematica -> punto di interesse)

Convenzione di Denavit-Hartenberg importata dalla robotica.

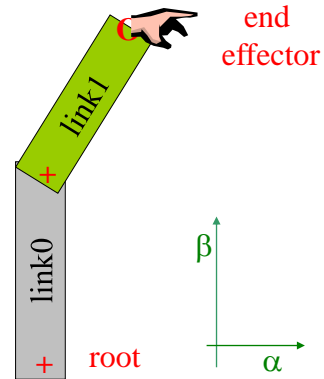


# Movement spaces



**Joint space.** It is the space of free parameters.  
Here:  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Cartesian space.** It is the position of points, hinges in a Cartesian reference system. This can be for instance the absolute reference system. In particular the position of the end-effector as the world is often described inside a Cartesian 3D space.



Spostamento lineare nel joint space => spostamento curvilineo in Cartesian space

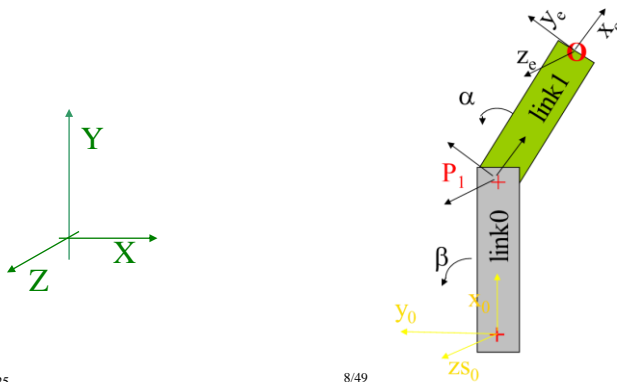
A.A. 2024-2025

e.di.unimi.it/



# Position description

- Transform from one frame into another.
- The transform is a function of the free parameters and of the geometrical parameters.
- We will consider here the rototranslation (rotation + translation) that can be expressed through matrixes.



A.A. 2024-2025

8/49

<http://borgnese.di.unimi.it/>



## Lesson content



- Skeleton
- Representation of the skeleton position

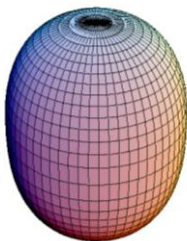


## Descrizione della posizione di un corpo rigido (non solo scheletri)

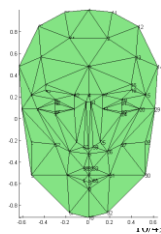


- Punto materiale:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(X, Y, Z) - 3$  dof
- Corpo rigido: 6 dof  $[\mathbf{R}, \mathbf{T}]$ .
- Corpo deformabile: N dof  $\mathbf{G}$  (poligono / griglia di controllo)
- Sistema particellare: ogni particella ha 3 dof. Relazioni statistiche tra particelle.

Griglia di controllo generica



Griglia di controllo semantica





## Coordinate omogenee



Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate cartesiane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo (proiettivo) 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo  $w$ :

$V(x, y, z)$  corrisponde a :

$$V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X/w$$

$$y = Y/w$$

$$z = Z/w$$

solitamente si sceglie  $w=1$

$w = 0$  identifica il punto all' $\infty$  sulla retta per l'origine, passante per  $V(x,y,z)$ .

I coseni direttori saranno  $x/|V|$ ,  $y/|V|$ ,  $z/|V|$ .



## Trasformazioni 3D



**Traslazione** - tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

**Rotazione** - tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all'asse.

**Scala** - variazione della dimensione lungo un asse.



Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici. Questo vale per tutte le trasformazioni affini.



## Traslazione



- Tutti i punti si spostano della stessa quantità
- $P' = P + T$

$$\square P' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad \forall P$$



## Traslazione in coordinate omogenee



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x + 0 + 0 + T_x)$$

$$y' = (0 + y + 0 + T_y)$$

$$z' = (0 + 0 + z + T_z)$$

$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

*coord. omogenee*

$$x' = x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x$$

$$y' = y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y$$

$$z' = z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z$$

*coord. cartesiane*



## Scala



- Tutti i punti si spostano di una quantità proporzionale alla loro distanza dal centro.
- $P' = S P$

$$\square P' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \forall P$$



## Scala in coordinate omogenee



$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x.S_x + 0 + 0 + 0)$$

$$y' = (0 + y.S_y + 0 + 0)$$

$$z' = (0 + 0 + z.S_z + 0)$$

$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

*coord. omogenee*

$$x^s = x'/w' = (x.S_x)/1$$

$$y^s = y'/w' = (y.S_y)/1$$

$$z^s = z'/w' = (z.S_z)/1$$

*coord. cartesiane*



## Traslazione + Scala



$$V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \quad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scala Traslazione

$$V'' = S \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x(x + T_x) \\ S_y(y + T_y) \\ S_z(z + T_z) \\ 1 \end{pmatrix}$$



## Traslazione + Scala



$$V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione Scala

$$V'' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & S_x T_x \\ 0 & S_y & 0 & S_y T_y \\ 0 & 0 & S_z & S_z T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V$$

$$V'' = SV' \quad V' = TV$$

$$\downarrow$$

$$V'' = S(TV) = (ST)V$$

Fattorizzazione delle trasformazioni:  
rappresentazione della trasformazione  
in un'unica matrice



## Scala + Traslazione

$$V'' = SV' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_z \\ 0 & 1 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V'$$

Traslazione

$$V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V$$

Scala

$$V'' = (TS)V = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione delle trasformazioni:  
rappresentazione della trasformazione  
in un'unica matrice.

Scala + Traslazione

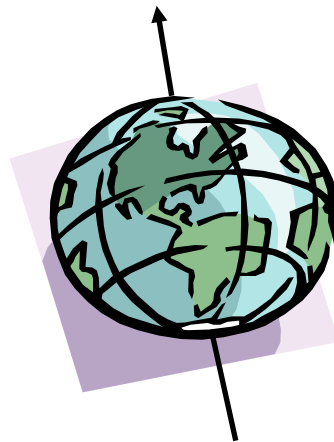
ST = TS solo perché S è diagonale



## La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

- 1) Quaternioni (asse + angolo)
- 2) Matrice di rotazione
- 3) Tre angoli di rotazione indipendenti

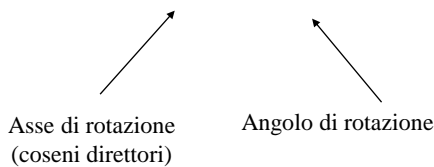




# Quaternioni



Rappresentazione della rotazione mediante:  
1 vettore + 1 scalare



Si può dimostrare che data una rotazione attorno all'asse identificato dal versore  $\mathbf{n}$ , di un angolo  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , questa può essere rappresentata dal quaternione:  $q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$

3 parametri indipendenti



# Algebra with quaternions



- La rotazione di un punto  $p(X, Y, Z)$  si può ottenere mediante prodotto di Hamilton:
  - Dato  $q$  il quaternione che rappresenta la rotazione
  - Espresso un punto  $P$  come:  $P = [X, Y, Z]$
  - Il punto  $P'$  ottenuto da  $P$  dopo l'applicazione della rotazione  $q$  si ottiene come:
    - $P' = q P q^*$  separatamente per  $X, Y, Z$
- $q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$
- $q^* = (\cos \theta/2, -\mathbf{n} \sin \theta/2)$
- Più semplicemente, senza coinvolgere il prodotto di Hamilton...



# Matrici di rotazione

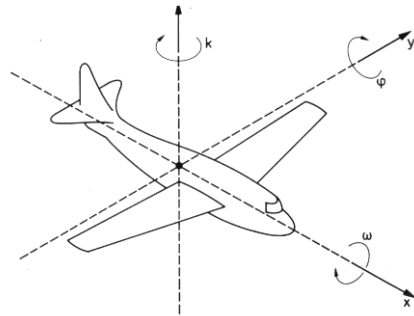


Rappresentazione della rotazione mediante una matrice  $\mathbf{R}$   $3 \times 3$  (9 parametri, non indipendenti)

Le matrici di rotazione sono ortonormali

3 parametri indipendenti

Utilizziamo un approccio costruttivo alla matrice di rotazione  $\mathbf{R}$ .

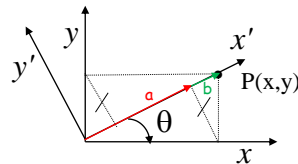


# La rotazione piana attorno a z (forma matriciale)



$$\sin \theta = \cos (90-\theta)$$

$$P(x,y) \rightarrow P(x',y')$$



$$|x'| = a + b$$

$$x' = x \cos(-\theta) + y \cos(90-\theta) = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

$$|y'| = 0$$

$$y' = x \cos(-90-\theta) + y \cos(-\theta) = x (-\sin(\theta)) + y \cos(\theta)$$

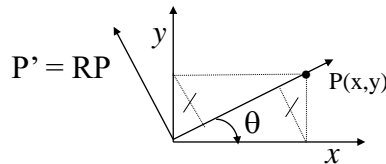


## La rotazione piana attorno a z (forma matriciale)



$$\sin \theta = \cos (90-\theta)$$

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$P' = RP$$

**Matrice di rotazione**

$$\sum_{i=1}^3 m_{ij}^2 = 1$$

$$\det(M) = 1$$

Matrice ortonormale (6 equazioni tra le incognite)

$$\sum_{i=1}^3 m_{ij} m_{ik} = 0 \quad i \neq k$$



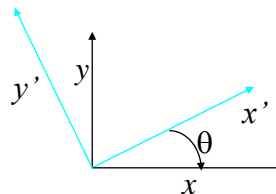
## Significato geometrico della matrice di rotazione



Ruotiamo il sistema di riferimento  $xy$  in  $x'y'$  di un angolo  $-\theta$ .

$$x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



**Matrice di rotazione**

$$M = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**M** contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento  $xy$  sugli assi di  $x'y'$ .



## Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)



$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta + 0 + 0)$$

$$x^{R_z} = x' / w' = (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta) / 1$$

$$y' = (-x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta + 0 + 0)$$

$$y^{R_z} = y' / w' = (-x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta) / 1$$

$$z' = (0 + 0 + z + 0)$$

$$z^{R_z} = z' / w' = (z \cdot 1) / 1$$

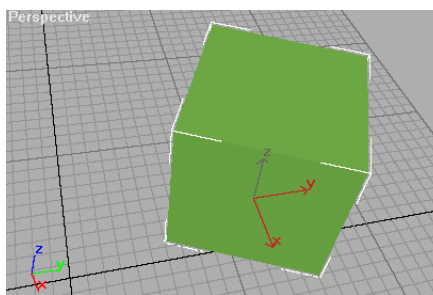
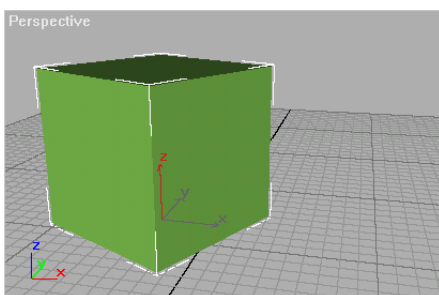
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

*coord. cartesiane*

*coord. omogenee*



## Orientamento di un corpo rigido nello spazio



Tre rotazioni indipendenti → tre parametri.

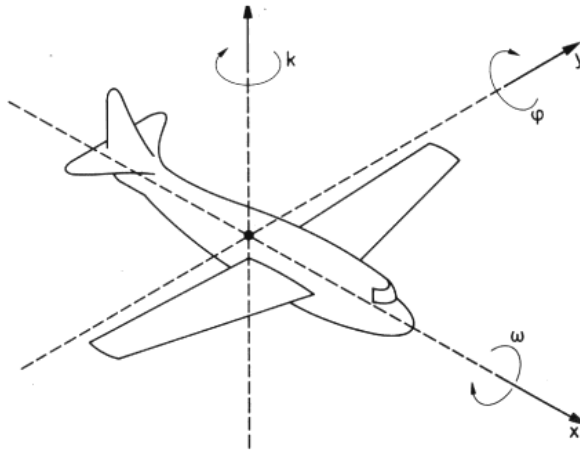


# Angoli di orientamento nello spazio 3D



Modo generale: roll, pitch, e yaw.  
( $\omega$ ,  $\phi$ ,  $k$ ): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni **sequenziali**, non commutative.



A.A. 2024-2025

29/49

<http://borgnese.di.unimi.it/>



# Rotazione attorno ad un singolo asse

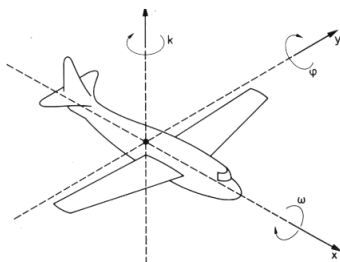


Modo generale: roll, pitch, e yaw.  
( $\omega$ ,  $\phi$ ,  $k$ ): rollio, beccheggio e deriva.

$$R_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$R_{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_k = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2024-2025

30/49

<http://borgnese.di.unimi.it/>



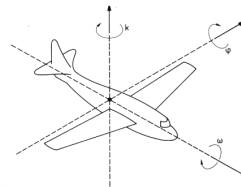
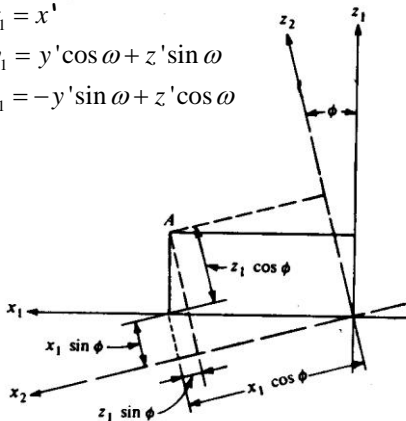


## II) Rotazione attorno all'asse y (pitch)



$$\begin{aligned}x_1 &= x' \\y_1 &= y' \cos \omega + z' \sin \omega \\z_1 &= -y' \sin \omega + z' \cos \omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \phi - z_1 \sin \phi \\y_2 &= y_1 \\z_2 &= +x_1 \sin \phi + z_1 \cos \phi\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_2 &= x' \cos \phi - (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \sin \phi \\y_2 &= y' \cos \omega + z' \sin \omega \\z_2 &= +x' \sin \phi + (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \cos \phi\end{aligned}$$

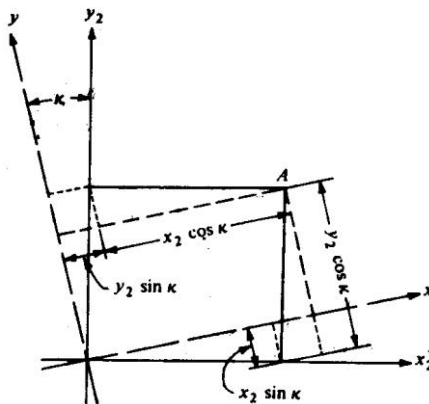
A.A. 2024-2025

33/49

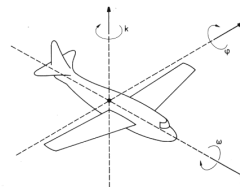
<http://borgnese.di.unimi.it/>



## III) Rotazione attorno all'asse z (yaw)



$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 \cos k + y_2 \sin k \\y_3 &= -x_2 \sin k + y_2 \cos k \\z_3 &= z_2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_3 &= [x' \cos \phi - (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \sin \phi] \cos k + [y' \cos \omega + z' \sin \omega] \sin k \\y_3 &= -[x' \cos \phi - (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \sin \phi] \sin k + [y' \cos \omega + z' \sin \omega] \cos k \\z_3 &= +x' \sin \phi + (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \cos \phi\end{aligned}$$

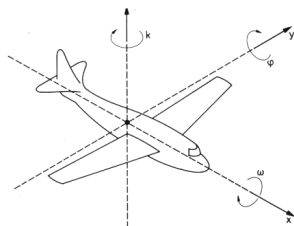
A.A. 2024-2025

34/49

<http://borgnese.di.unimi.it/>



# Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$R = R_{\kappa} R_{\phi} R_{\omega}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos k & \sin \omega \sin \phi \cos k + \cos \omega \sin k & -\cos \omega \sin \phi \cos k + \sin \omega \sin k \\ -\cos \phi \sin k & -\sin \omega \sin \phi \sin k + \cos \omega \cos k & \cos \omega \sin \phi \sin k + \sin \omega \cos k \\ \sin \phi & -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega \cos \phi \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.

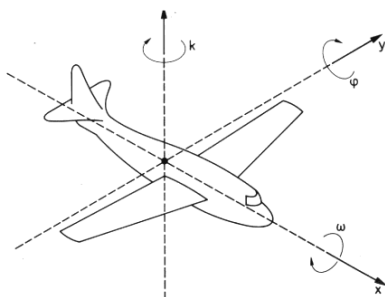
Rotazioni “*semplici*” utilizzate dai programmi di animazione, grafica, game engine.... Gestione matriciale *efficiente* del calcolo.



# Rotazione generica (coordinate omogenee)



$$V' = RV = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$





## Matrici di rotazione e quaternioni



Si può trasformare un quaternioni in una matrice di rotazione secondo:

$$\square \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_j^2 + q_k^2) & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_i q_k + q_j q_r) \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_k^2) & 2(q_j q_k - q_i q_r) \\ 2(q_i q_k - q_j q_r) & 2(q_j q_k + q_i q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_j^2) \end{bmatrix}$$

Dove:  $q = \{q_r, q_i, q_j, q_k\}$



## Quaternioni vs. matrici di rotazione



Le matrici di rotazione si possono facilmente fattorizzare e tenere quindi conto di trasformazioni complesse (rotazione + traslazione + scala).

I quaternioni sono più efficienti per interpolare la singola rotazione



## Esempi di trasformazioni



$$\text{Traslazione + scala: } V'' = S (T V) \Rightarrow V'' = (S T) V$$

$$\text{Rotazione: } V'' = R_{\kappa} (R_{\phi} (R_{\omega} V)) \Rightarrow V'' = (R_{\kappa} R_{\phi} R_{\omega}) V$$

$$V'' = R V$$

$$\text{Traslazione + rotazione: } V''' = T (R V) \Rightarrow V''' = (T R) V$$



## La rototraslazione in forma matriciale



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

$$\text{Rotazione prima e poi traslazione: } V''' = T (R V) \Rightarrow V''' = (T R) V$$

$$P' = (R P) + T \Rightarrow P' = A P$$



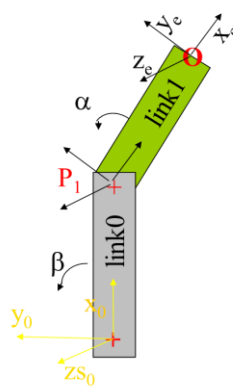
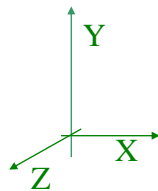
## Trasformare gli oggetti



- i vertici dell'oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate)
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna  $V$ .
- $R$ ,  $D$  e  $S$  sono matrici associate a rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene in coordinate Euclidee come:  
 $V' = V + D$  traslazione,  $D$  è un vettore di traslazione  
 $V' = S V$  scala,  $S$  è una matrice di scala  
 $V' = R V$  rotazione,  $R$  è una matrice di rotazione
- Il punto trasformato si ottiene in coordinate omogenee come:  
 $V' = V * D$  traslazione,  $D$  è una matrice 4x4 che contiene il vettore di traslazione  
 $V' = S * V$  scala,  $S$  è una matrice di scala 4 x 4.  
 $V' = R * V$  rotazione,  $R$  è una matrice 4x4 che contiene la matrice di rotazione



## Trasformazioni inverse



Trasformazione diretta: passo da  $\{X_e, Y_e, Z_e\}$  nel sistema di riferimento end-point a  $\{X_A, Y_A, Z_A\}$  nel sistema di riferimento assoluto.

Trasformazione inversa: passo da  $\{X_A, Y_A, Z_A\}$  nel sistema di riferimento assoluto a  $\{X_e, Y_e, Z_e\}$  nel sistema di riferimento di end-point.



# Trasformazioni inverse



- La trasformazione inversa si ottiene invertendo l'ordine delle trasformazioni ed invertendo le singole matrici:

$$A = A_3 A_2 A_1 \Leftrightarrow A^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1}$$

$$V'' = AV \Rightarrow V = A^{-1}V''$$

- Denotiamo le inverse come le matrici di trasformazione:  $T^{-1}$ ,  $S^{-1}$ ,  $R^{-1}$ .
- La traslazione inversa si ottiene **negando** i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il **reciproco** dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene **negando l'angolo di rotazione. Matrice trasposta.** Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa \rightarrow R^{-1} = R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$



# La rototraslazione inversa in forma matriciale



$$P' = RP + T \Rightarrow P' = AP \quad \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T R P = R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P'$$

Proiezione di  $T$  sugli assi di arrivo:  $r_i \cdot T$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

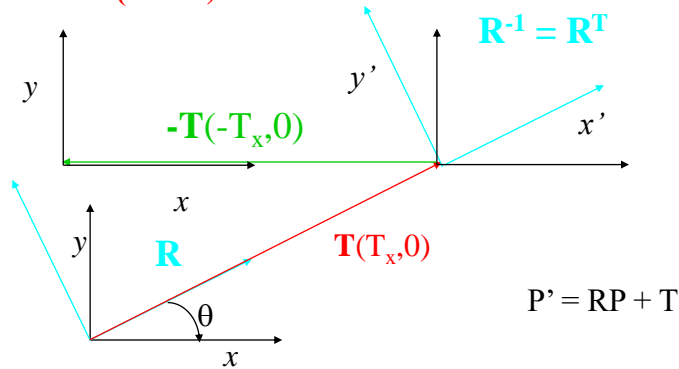
Vettore di traslazione (inverso)



## Perchè $-R^T T$ ?

Solo così applicando trasformatata diretta e inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.

$$P = R^T P' - R^T T = R^T (P' - T)$$



$R^T T$  è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.

A.A. 2024-2025

45/49

<http://borgnese.di.unimi.it/>



## Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

$$V'' = A_2 A_1 V = A_2 (A_1 V) = (A_2 A_1) V = A V$$

- la trasf.  $A_1$  viene applicata per prima!
- ricordiamo che il prodotto di matrici non è commutativo:  $A_2 A_1 \neq A_1 A_2$ , mentre vale la proprietà associativa:  $A_2 (A_1 V) = (A_2 A_1) V$ .
- L'applicazione di trasformazioni dipende dall'ordine con cui sono applicate.**
- Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice, fattorizzazione delle singole matrici di trasformazione.**

A.A. 2024-2025

46/49

<http://borgnese.di.unimi.it/>



## Trasformazioni rigide



- La stessa rappresentazione matriciale (matrice  $4 \times 4$ ) per tutte le trasformazioni. Gestite dallo stesso hardware.
- Più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- Una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, scala e traslazione.
- Questo si applica a tutte le trasformazioni affini.



## Skeleton animation through rotations



Unregistered HyperCam



Skeleton - segments connected by hinges

We have to specify the orientation of one segments with respect to the previous one -> stack of transformations.



## Sommario della lezione



- I comportamenti
- Comportamento reattivo
- Comportamento deliberativo (FSM)
- Gli scheletri
- Rappresentazione della posizione di uno scheletro