# Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso dei joint

**Prof. Alberto Borghese**

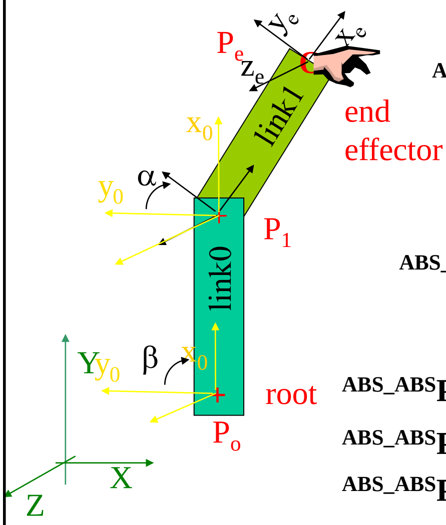
N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.



# Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

# Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)




$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}(\mathbf{t}) = {}^{ABS\_ABS}_{\ \ \ \ \ \ \ \ \ e}\mathbf{A}(\mathbf{t}) \ \ {}^{e}\mathbf{P}$$

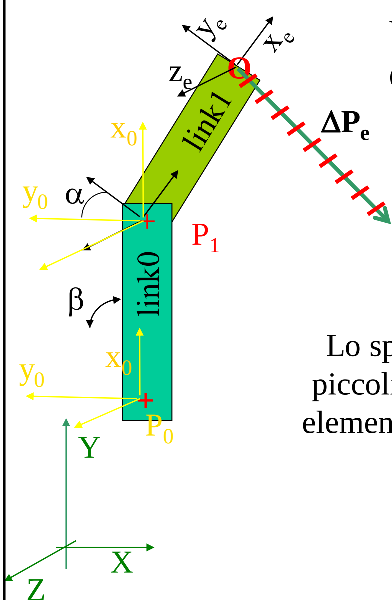
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\,(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_x(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\,(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_y(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\,(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_z(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$



# Cinematica inversa

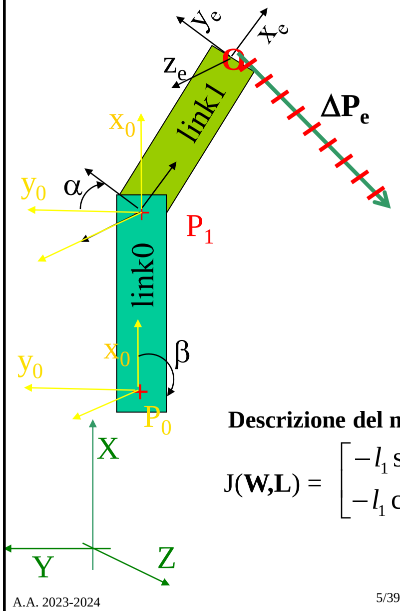



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

# Cinematica linearizzata




Consideriamo la trasformazione end_point -> joint.

La trasformazione joint -> end_point è:

**P(t)** = f(α(t), β(t), $T_x$(t), $T_y$(t)| $l_0$, $l_1$).

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\ \mathbf{(t)} = \mathbf{f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\ |\ l_0, l_1)}$

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\ \mathbf{(t)} = \mathbf{f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\ |\ l_0, l_1)}$

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\ \mathbf{(t)} = \mathbf{f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\ |\ l_0, l_1)}$

$$^{\mathbf{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Descrizione del movimento alle differenze finite**

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_e = J\ \Delta W$$



# Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo $w_{ini}$ e da una posizione dell'end-point $^eP_{ini}$ = f(w, L)

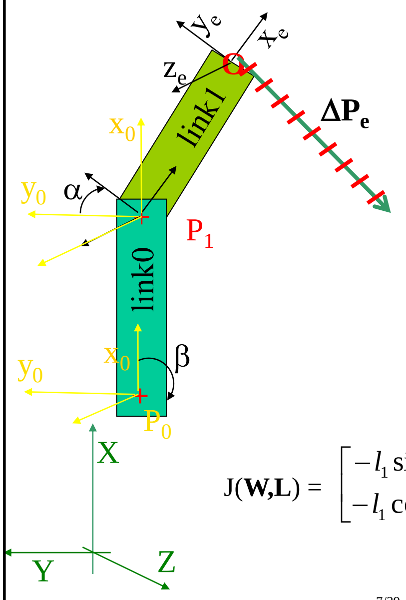
Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico $\Delta P_k$ dalla posizione corrente verso la posizione finale di $^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, $w_k$.
3) Calcolo, attraverso $J_k^{-1}$, il valore $\Delta w_k$ associato ($\Delta w_k = J_k^{-1}\,\Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

$^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, $^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a $P_{finale}$.

# Sistema sottodeterminato - esempio




Sono 2 equazioni in 4 incognite

End point: $\Delta P_e=\{X_e,Y_e\}$: 2 dof

Parametri di controllo (parametri liberi):
- $\Delta\alpha$
- $\Delta\beta$
- $\Delta T_x$
- $\Delta T_y$

Esistono $\infty^2$ modi di spostare l'end-point e ottenere $\Delta P_e$

Quale scegliamo?

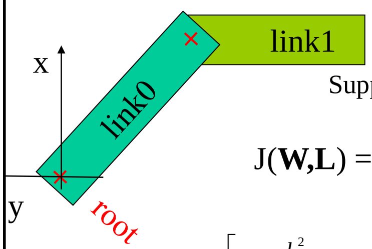
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Esempio (m = 2, n = 4)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \underset{2\ x\ 1}{\begin{bmatrix} dP_{e_x}/dt \\ dP_{e_y}/dt \end{bmatrix}} \qquad x = \underset{4\ x\ 1}{\begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ dT_x/dt \\ dT_y/dt \end{bmatrix}}$$




Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1-l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

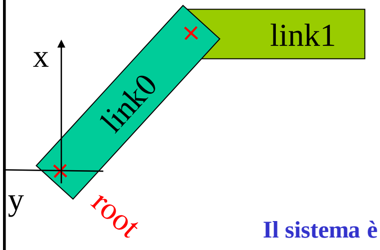
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2+l_1 l_o\sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2+l_1 l_o\sin 45 & l_1^2+l_o/2+2l_1 l_o\sin 45+l_o^2/2 & -l_1-l_0\sin 45 & -l_0\cos 45 \\ -l_1 & -l_1-l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Soluzione (m=2, n=4)

$$
J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

ma: $\det(J^T * J) = 0$




**Il sistema è indeterminato, ammette inifinite soluzioni.**

**Voglio poterne determinare una secondo un qualche criterio ragionevole.**



# Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

# Decomposizione ai valori singolari

**A X = b**

**J$\Delta$W = $\Delta$P$_e$**

$(U^T\ W\ V)\ X = b$

Ortonormale M x N
Determinante = 1

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N
Determinante = 1

***Singular Value Decomposition***

Se A ( J ) è singolare -> almeno 1 dei $w_{ii}$ = 0.

Per esempio: $\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

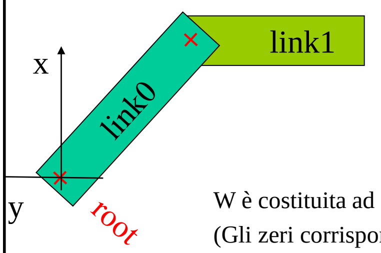


# Soluzione indeterminata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T * J) = 0$ $\qquad x = \cancel{(J^T * J)^{-1}} * J^T * b$




Applico la SVD a J
$(U^T\ W\ V) = J$

W è costituita ad esempio così:
(Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli)
Non posso invertire W

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x = (V' \cancel{W^{-1}} U)\ J^T\ b}$$

# Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$\Delta W = (J'*J)^{-1}J'*\Delta P_e$ $\qquad$ $\boxed{\Delta W = \mathbf{V'*W^{-1}*U*}\Delta P_e}$

Se J è rank-deficient, J'*J è singolare e W è singolare. Non le posso invertire.

**Il sistema è indeterminato, esistono $\infty^2$ soluzioni, ma posso determinare ugualmente una soluzione**

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice diagonale W = diag{wii}.

In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

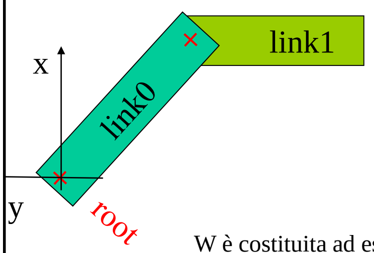


# Soluzione indeterminata (m=2, n=4)

$$J^T*J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T*J) = 0 \qquad \det(W) = 0$




$\Delta w = (J^T*J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$

$\boxed{\Delta w = (\mathbf{V'*W^{-1}*U}) *\Delta P}$

W è costituita ad esempio così:
Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione**

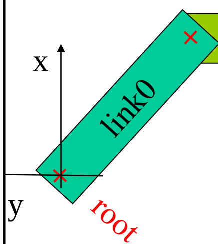
# Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det(W) = 0 ?

$\Delta w = (V' W^{-1} * U) * \Delta P$ X

**Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione**




$\mathbf{x = V' \widetilde{W}^{-1} U J^T b}$

$\widetilde{W}^{-1}$ è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Se $w_{ii} = 0$ ➔ $1/w_{ii} = 0$**

Gli zeri sulla diagonale corrispondono ai valori singolari nulli.



# Soluzione (m=2, n=4)

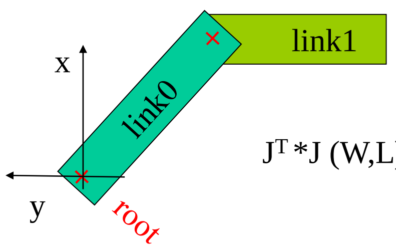
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x = V' W^{-1} U b}$ X

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

det($J^T * J$) = 0




$$J^T * J\,(W,L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\quad \Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\boxed{\cancel{x = V' W^{-1} U\, b}}$

$>>[U'\ W\ V] = svd(J^TJ)$

$\det(J^T * J) = 0$

U' =

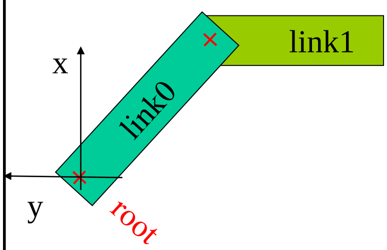
| | | | |
|---|---|---|---|
| -0.4469 | 0.5005 | -0.7398 | 0.0497 |
| -0.8633 | -0.2591 | 0.3622 | 0.2375 |
| 0.2234 | -0.2502 | -0.2432 | 0.9101 |
| 0.0710 | 0.7873 | 0.5122 | 0.3359 |

W =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18.1915 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1.4653 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0.0000 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.0000 |

V =

| | | | |
|---|---|---|---|
| -0.4469 | 0.5005 | 0.7407 | 0.0336 |
| -0.8633 | -0.2591 | -0.3333 | -0.2766 |
| 0.2234 | -0.2502 | 0.3436 | -0.8771 |
| 0.0710 | 0.7873 | -0.4713 | -0.3911 |






# Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

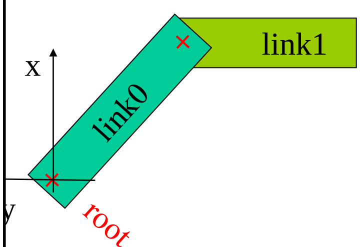
$l_0 = l_1 = 2$ $\quad \Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\boxed{\mathbf{\Delta W = V'\, \tilde{W}^{-1} U\, \Delta P_e}}$

$\tilde{W}^{-1} =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.0550 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.6824 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

$\det(J^T * J) = 0$




$>>\Delta W = V' * \tilde{W}^{-1} * U * \Delta P_e$

$\Delta W =$

-0.2251

-0.1281

0.1125

-0.1811

Norma $l^2$ pari a 0.335459

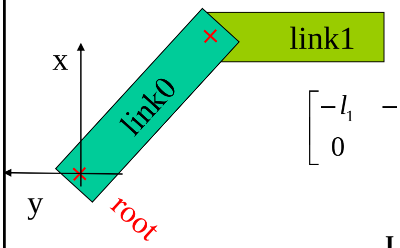
# Verifica Soluzione

$$J=\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$   $\Delta P^e_x = 1$   $\Delta P^e_y = 0$

$$\boxed{\Delta W = V' \tilde{W}^{-1} U \, \Delta P_e}$$

**Soluzione mediante pseudo-inversa**




$J * \Delta w = \Delta P_e$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix}}_{\Delta W} = \underbrace{[1 \;\; 0]^T}_{\Delta P_e}$$

**Spostamento ottenuto = spostamento desiderato**

Norma $l^2$ pari a 0.335459

**Utilizzo più o meno con la stessa ampiezza tutti i gradi di libertà**

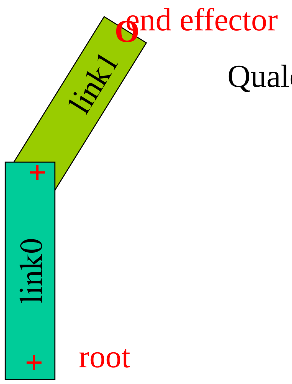


# Proprietà della Soluzione

Proprietà: **soluzione a norma minima**

Altre soluzioni possibili (tali per cui Ax = b), si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione

Quale altra soluzione sarebbe possibile per ottenere lo spostamento desiderato: {1 0}?




Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$   $\Delta P^e_x = 1$   $\Delta P^e_y = 0$

# Un’altra soluzione

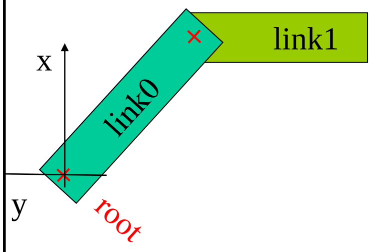
Soluzione possibile:
$\Delta\alpha = \Delta\beta = 0^o$
$\Delta T_x = 1$
$\Delta T_y = 0$

$$\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix} = [1 \;\; 0]^T$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P^e{}_x = 1$ $\Delta P^e{}_y = 0$

Spostamento verso l’alto dell’end-point di 1




$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \; 0]$$

J ΔW = ΔP

Norma della soluzione pari a 1 > 0.335459



# Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

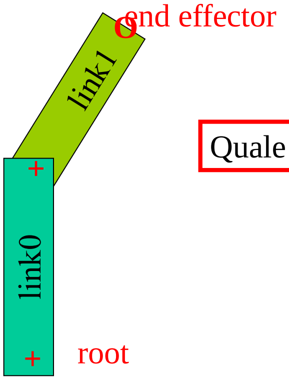
# Soluzione mediante pseudo-inversa

$\Delta P_e = J \, \Delta W \quad \Rightarrow \quad \nu = J \, \Delta W - \Delta P_e$

$\mathbf{J' J \, \Delta W = J' \Delta P_e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(J' J)^{-1} (J' J) \, \Delta W = (J' J)^{-1} J' \Delta P_e}$

$\Downarrow$

$\mathbf{\Delta W = (J'J)^{-1} J' \Delta P_e}$




Quale criterio viene soddisfatto dalla soluzione?

$\min \nu^2 = (\|J \, \Delta W - \Delta P\|)^2$



# Come rendere risolubile il sistema

$\nu = J \, \Delta W - \Delta P \qquad \min \nu^2 = (\|J \, \Delta W - \Delta P\|)^2 \qquad$ Soluzione $\|\Delta W\|$ a norma minima

$b - Ax$

Inserisco il vincolo $\|\Delta W\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare.

Il problema si trasforma in un problema di **regolarizzazione**

$\min (\| J \, \Delta W - dP \|^2 + \lambda \, \|\Delta W\|^2)$

Dove la norma è intesa in $l_2$.

$\min [\, ( J \, \Delta W - \Delta P )^2 + \lambda \, (\Delta W)^2 \,]$

Risulta un funzionale quadratico di $\Delta W$, "facile" da minimizzare

# Sviluppo della regolarizzazione

$\min (\| J\, \Delta W - \Delta P \|^2 + \lambda\, \|\Delta W\|^2)$

$\Delta W$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, $\min_{\Delta w} (\|J\, \Delta W - \Delta P\|^2 + \lambda\, \|\Delta W\|^2 )$

il risultato è relativamente semplice $2[J^T(J\, \Delta W - \Delta P) + \lambda\, \Delta W] = 0$

$$J^T(J\, \Delta W - \Delta P) + \lambda\, \Delta W = 0$$

Da cui risulta:

$$J^T(J\, \Delta W - \Delta P) + \lambda\, I\, \Delta W = 0 \Rightarrow (J^TJ + \lambda\, I)\, \Delta W - J^T\Delta P = 0$$

$$\boxed{\Delta W = (J^TJ + \lambda\, I)^{-1}J^T\, \Delta P)}$$



# Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

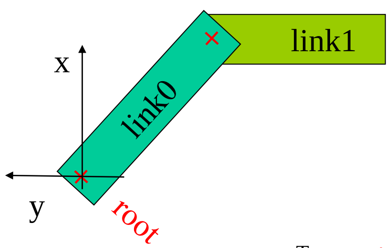
$\boxed{\Delta W = (J^TJ + \lambda\, I)^{-1}J^T\, \Delta P)}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{ex} = 1$ $\Delta P_{ey} = 0$

$\det(J^T * J) = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$




$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

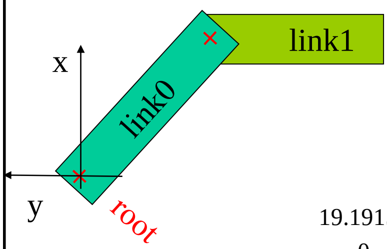
# Esempio regolarizzazione

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\quad \Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$ >>det = 47.3137




**Soluzione con regolarizzazione con $\lambda$ =1**

$J^T * J = U^T W V$

>>W =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19.1915 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2.4653 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1.0000 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1.0000 |

>>ΔW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

$\det(W) \neq 0$



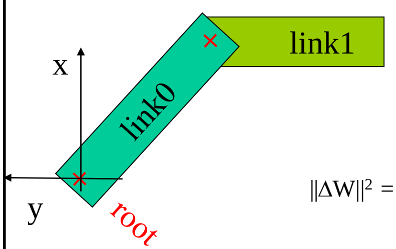
# Esempio regolarizzazione - errore

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\quad \Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$ >>det = 47.3137




**Soluzione con regolarizzazione con $\lambda$ =1**

| >>ΔW = | ΔW = |
|---|---|
| -0.1691 | -0.2251 |
| -0.1443 | -0.1281 |
| 0.0845 | 0.1125 |
| -0.1021 | -0.1811 |

$||\Delta W||^2 = 0.0647$

$\Delta \mathbf{P_e} = J\,\Delta W$

$||\Delta W||^2 = 0.1125$

>> J ΔW =

0.9155
0.1021

**Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato $\Delta P_e$\{1, 0\}**

L'errore ha 2 componenti

$\min(|| J\,\Delta W - \Delta P_e ||^2 + \lambda\, ||\Delta W||^2)$

Non realizzo ΔP

"pago" perche' mi muovo (ΔW)

## Esempio regolarizzazione con ampiezza diversa

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

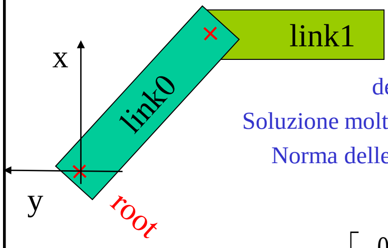
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$

**$x = V' W^{-1} U b$**

**Soluzione con regolarizzazione con $\lambda$ =0.01**




>>ΔW =
-0.2242
-0.1284
0.1121
-0.1798

>>ΔP =
0.9989
0.0018

$\det(J^T * J + \lambda I) = 0.0027$

Soluzione molto vicina a quella non regolarizzata

Norma delle variazioni dei parametri liberi

$||\Delta W||^2 = 0.1116$

$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix} = [1 \;\; 0]^T$$

ΔW =
-0.2251
-0.1281
0.1125
-0.1811

$\mathbf{\Delta P_e} = J \, \Delta W$

$||\Delta W||^2 = 0.1125$



## Esempio regolarizzazione con λ =10

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

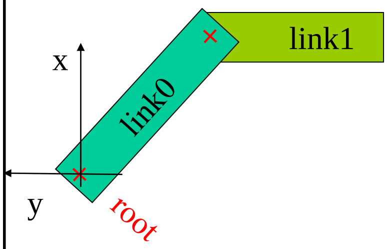
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$

**$x = V' W^{-1} U b$**

**Soluzione con regolarizzazione con $\lambda$ =10**




$\det(J^T * J + \lambda I) = 3.32 \times 10^{-4}$

>>ΔW =
-0.0804
-0.1162
0.0402
-0.0149

>>$\Delta P_e$ =
0.5978
0.1494

$||\Delta W||^2 = 0.0021$

Soluzione non molto lontana da quella non regolarizzata

Norma delle variazioni dei parametri liberi MINORE (costano di più)

## Come introdurre un peso diverso sui joint

$\Delta P_e = J\,\Delta W$ $\min \| \Delta P_e - J\,\Delta W\|$ $\|\Delta W\|$ a norma minima

Inserisco il vincolo $\|dW\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare e peso il costo sui vari joint in modo differente.

$$\min (\| J\,\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda\, C\, \|\Delta W\|^2)$$

Dove la norma è intesa in $l_2$ e C è una matrice diagonale

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\min [ ( J\Delta W - \Delta P_e)^2 + \lambda\, C(\Delta W)^2 ]$$

Risulta un funzionale quadrato di "facile" minimizzazione

2 termini:

- Fedeltà al movimento $\| J\,\Delta W - \Delta P_e\|$
- "utilizzo" dei gradi di libertà $\|\Delta W\|$



## Sviluppo della regolarizzazione

$$\min (\| J\,\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda\, C\|\Delta W\|^2)$$

$d\Theta$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, $\min (\| J\,\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda\, C\|dW\|^2 )$

il risultato è relativamente semplice $2[J^T(J\,\Delta W - \Delta P_e) + \lambda\, C\,\Delta W] = 0$

$$J^T(J\,\Delta W - \Delta P_e) + \lambda\, C\, dW = 0$$

Da cui risulta:

$$(J^TJ + \lambda\, C\,)\,\Delta W = J^T\,\Delta P_e$$

$$\boxed{\Delta W = (J^TJ + \lambda\, C)^{-1}J^T\,\Delta P_e}$$

# Esempio regolarizzazione con pesi

$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

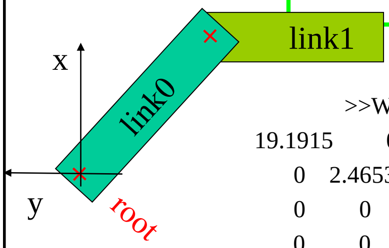
$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: c1 = c2 = c3 = c4 = 1

$\lambda = 1$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$

>>det = 47.3137




**Soluzione con regolarizzazione con pesi unitari**
**C = I**

>>Ws =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19.1915 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2.4653 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1.0000 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1.0000 |

>>ΔW =
-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>$\Delta P_e$ =
0.9155
0.1021

**Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato**

$\|\Delta W\|^2 = 0.0647$

$\min (\| J\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda \| \Delta W\|^2)$

Non realizzo $\Delta P_e$

"pago" perche' mi muovo ($\Delta W$)



# Esempio regolarizzazione con pesi non uguali

$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

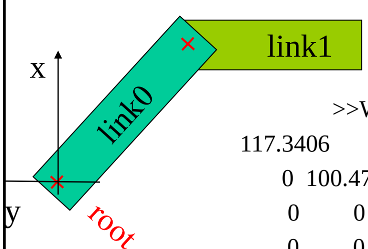
$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: c1 = c2 = 100; c3 = c4 = 1

$\lambda = 1$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$

>>det = 4.3539e+004




**Soluzione con regolarizzazione con pesi inferiori applicati alle traslazioni**

>>Ws2 =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 117.3406 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 100.4701 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1.9953 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1.8510 |

>>ΔW =
-0.0093
-0.0157
0.4639
-0.0111

Utilizzo molto Tx

$\|\Delta W\|^2 = 0.2156$

>>$\Delta P_e$ =
0.5361
0.0111

**Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato**

$\min (\| J\,\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$

Non realizzo $\Delta P_e$

"pago" perche' mi muovo ($\Delta W$)

# Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

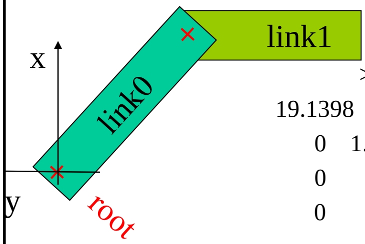
$l_0 = l_1 = 2$  $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$

$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: c1 = c2 = 100;  c3 = c4 = 1
$\lambda = 0.01$

>>det = 1.1992




>>Ws2 =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19.1398 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1.9568 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0.5185 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.0618 |

>>ΔW

-0.0172
-0.0288
0.8589
-0.0403

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

>> $\Delta P_e$ =
0.9914
0.0004

**Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)**

$||\Delta W||^2 = 0.2151$, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti ΔTx e ΔTy



# Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

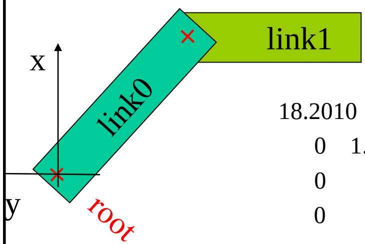
$l_0 = l_1 = 2$  $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$

$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: c1 = c2 = 100;  c3 = c4 = 1
$\lambda = 0.00001$

>>det = $1.17 \times 10^{-4}$




>>W =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18.2010 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1.4686 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0.0068 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.0006 |

>> ΔW

-0.0173
-0.0290
0.8663
-0.0410

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

>>$\Delta P_e$ =
0.9999
0.0000

**Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto molto vicino)**

$||\Delta W||^2 = 0.2170$ Il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 10000 per le componenti ΔTx e ΔTy e per 100 per le componenti Δα e Δβ.

Il costo di penalizzazione del movimento è un centesimo rispetto al caso precedente.

# Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo $w_{ini}$ e da una posizione dell'end-point $^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:
1) Identifico $\Delta P_k$ dalla posizione corrente verso la posizione finale di $^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, $w_k$.
3) Calcolo, attraverso $(J_k'^*J_k + \lambda C)^{-1}$, il valore $\Delta w_k$ associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:
   $^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, $^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a $P_{finale}$.



# Osservazioni sulla matrice C

C può essere costante su tutto il movimento oppure può essere diversa per ogni passo k, $C_k$.

Si possono utilizzare diverse strategie per impostare $C_k$:
- Utilizzare all'inizio del movimento maggiormente i gradi di libertà prossimali e alla fine quelli distali.
- Definire l'inizio dell'utilizzo di alcuni gradi di libertà (e.g. l'apertura e la forma della mano) più o meno presto in funzione dell'intenzione del movimento.
- Definire un peso in funzione degli altri elementi della scena (e.g. mantenere una certa distanza da alter entità nella scena).
- …..

# Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo