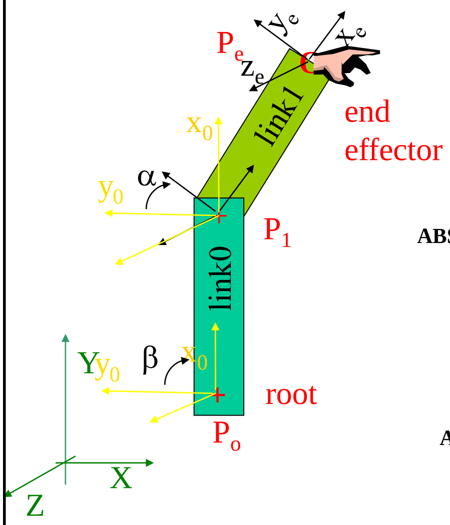
Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso di end-point

Prof. Alberto Borghese

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione ai minimi quadrati robusta
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell’end-point.

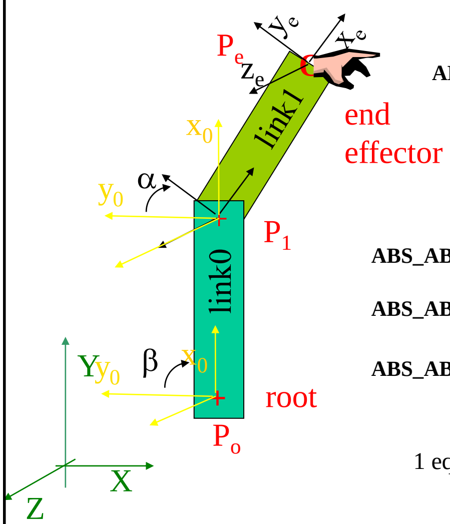
Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A(t)} \quad {}^{e}\mathbf{P}$$

Descrizione cinematica diretta (forma analitica)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

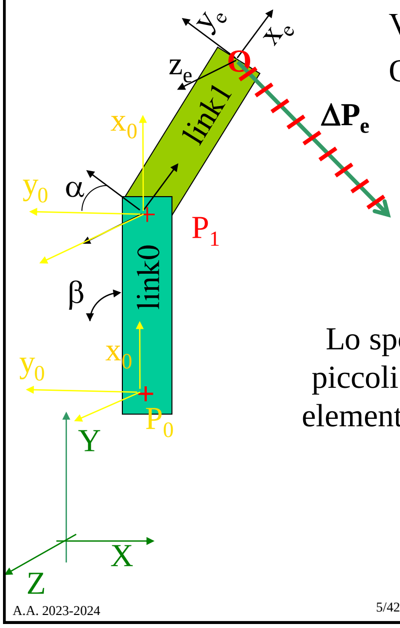
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\mathbf{(t)} = \mathbf{f}_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\mathbf{(t)} = \mathbf{f}_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\mathbf{(t)} = \mathbf{f}_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

1 equazione per ogni grado di libertà di end point

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point in forma matriciale.
P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

Chiamiamo **$W_k = \{\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}\}$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\begin{array}{ccccc} & \Delta\alpha_k & \Delta\beta_k & \Delta T_{xk} & \Delta T_{yk} \end{array}$$

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{yk})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{yk})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{yk})$$

$$\mathbf{\Delta P = J\ \Delta W}$$

Cinematica inversa con J

Quando la matrice del Jacobiano è quadrata, risolvo la cinematica inversa mediante inversione della matrice Jacobiano

$$\Delta P = J \Delta W \longrightarrow \Delta W = J^{-1} \Delta P$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a tutti i parametri liberi.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale $\forall$valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ${}^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso J_k^{-1}, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

   ${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, ${}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Fissiamo l'attenzione su 1 passo di iterazione.

Esempio di Jacobiano (2x2)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & +l_1 \sin(\alpha+\beta) + l_0 \sin\beta \\ +l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta \cos(\alpha+\beta)$$

$\mathbf{\Delta W = J^{-1}\, \Delta P}$

J calcolata per il valore corrente di α e β
J **quadrata**

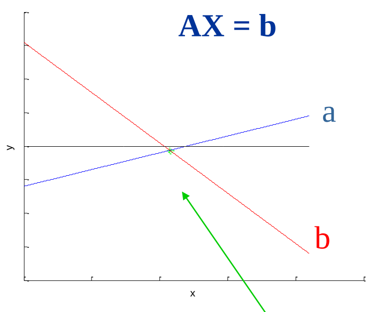
Sistemi lineari con m = n

J(W,L) è quadrata m = n

y = x + 2
y = -3x + 1

$x_1 - x_2 = -2$
$-3x_1 - x_2 = -1$

$x = x_1$
$y = x_2$



Ax = b

A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ b = $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

x = P = [-1/4 7/4]

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

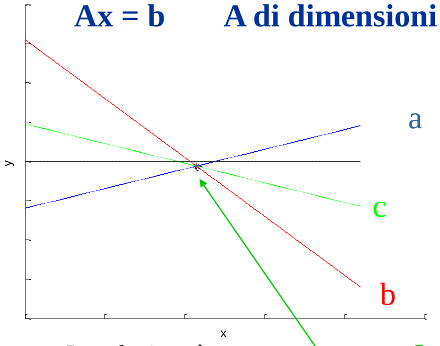
Sistemi lineari con m > n

J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

Ax = b **A di dimensioni m x n**

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$
$y = -x + 3/2$

$x=x_1$
$y=x_2$



Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

La soluzione è sempre: **x = P = [-1/4 7/4]**

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

Sistema lineare: soluzione algebrica

Caso generale:

$$\mathbf{A\,X = b} \Rightarrow \mathbf{A'\,A\,X = A'\,b} \Rightarrow \mathbf{(A'\,A)^{-1}\,(A'\,A)\,X = (A'\,A)^{-1}A'\,b}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{X = (A'A)^{-1}A'b}$$

(A'A) gioca il ruolo di A quadrata.

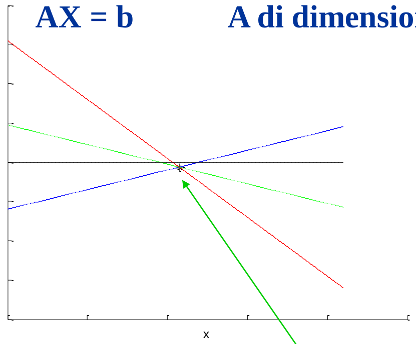
Quale criterio viene soddisfatto da X?

Sistemi lineari con m > n

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 3/2

$x=x_1$
$y=x_2$



$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -1.5\end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix}11 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix} \qquad \det(A) = 24$$

P = [-1/4 7/4]

Intersezione di 3 rette

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}0.1250 & -0.1250\\ -0.1250 & 0.4583\end{bmatrix}$$

$$x = C * A^T * b$$

x = P = [-0.25 +1.75]

Riformulazione del problema

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots. \quad a_{1N}\,x_N = b_1 + \nu_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots. \quad a_{2N}\,x_N = b_2 + \nu_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots. \quad a_{MN}\,x_N = b_M + \nu_M$

M x 1 => **Residuo.**

A x = b + N

Vettore dei termini noti M x 1

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Modello
Spostamento indotto dai parametri liberi JΔW

Misure
Spostamento desiderato ΔP

Quale criterio viene soddisfatto da X (ΔW)?

Soluzione come problema di ottimizzazione

J∆W ∆P

Funzione costo: $(Ax - b)^2 = \sum_k^n \nu_k^{\,2} = \|Ax - b\|^2 = |\nu|^2$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x, non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza minima da tutte le rette.

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_k \nu_k^{\,2} = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{A^T A x = A^T b}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{(A^T A)^{-1} A^T b}$$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convesse perchè hanno un unico minimo globale.

Sistemi lineari con m > n

AX = b **A di dimensioni m x n**

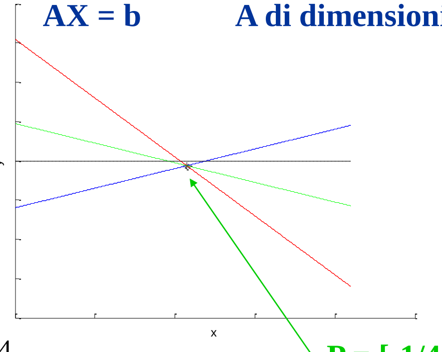
$y = x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 3/2$

$x = x_1$

$y = x_2$



P = [-1/4 7/4]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \qquad x = C * A^T * b$$

x = P = [-0.25 +1.75]
intersezione

$\sum_k^n \nu_k^{\,2} = \|Ax - b\| = 0$ x soddisfa tutte le equazioni

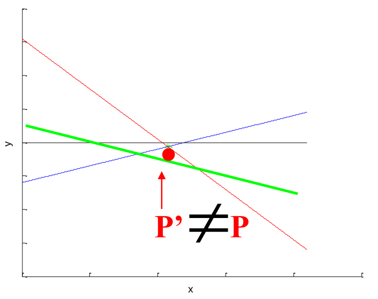
Sistemi lineari con m > n
non esiste soluzione (matematica)

$y = x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 1/2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 24$$

x' = P' = [-0.25 +1.4167]
No intersezione

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \qquad x' = C * A^T * b$$

Sistemi lineari con m > n – residui

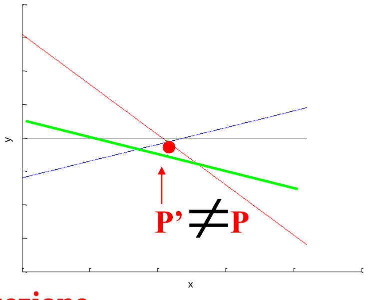
$y = x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 1/2$

$x = x_1$
$y = x_2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$x' = C * A^T * b$

x' = P' = [-0.25 +1.4167] **No intersezione**

ν_1 = 1*(-0.25) -1*(1.4167) – (-2) = 0.333
ν_2 = -3*(-0.25) -1*(1.4167) – (-1) = 0.333
ν_3 = -1*(-0.25) -1*(1.4167) – (-0.5) = -0.666

$$\sum_{i=1}^{3} \nu^2 = \|Ax - b\|^2 = |\nu|^2$$

$$= $$

$$\sum_{i=1}^{3} \nu^2 = 0.111 + 0.111 + 0.444 = 0.666$$

Commenti

$$\sum_k {\nu_k}^2 = \|Ax - b\|^2 = \sum_k \| A_{k,*}x - b_k \|^2 =$$

$$\left[\left(A_{11}x_1 + A_{12}x_2\right) - b_1\right]^2 + \left[\left(A_{21}x_1 + A_{22}x_2\right) - b_2\right]^2 +$$

$$\left[\left(A_{31}x_1 + A_{32}x_2\right) - b_3\right]^2$$

Lo scarto misura la distanza del punto dalle rette misurata lungo y

$y - x + 2 = \nu_1 = 0.33333$
$y + 3x - 1 = \nu_2 = 0.33333$
$y + x - 1/2 = \nu_3 = -0.6666$

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione ai minimi quadrati robusta
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell’end-point.

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

A x = **b**

A = $\mathbf{U^T W V}$

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

Se N = M

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

$\mathbf{A^{-1} = (U^T W V)^{-1} = V^T W^{-1} U}$

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
w_{ii} sono detti valori singolari.

$$\mathbf{Ax = b \rightarrow x = A^{-1} b = V^T W^{-1} U^T b}$$

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
w_{ii} sono detti valori singolari.

A x = **b**

M x N

A = $\mathbf{U^T W V}$

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

Se M > N

$\mathbf{A^T A x = A^T b}$ $\mathbf{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$

$$\mathbf{x = (V^T W U U^T W V)^{-1} V^T W U b = (V^T W I W V)^{-1} V^T W U b}$$

Essendo W diagonale, posso riorganizzare il prodotto di matrici:

$$\mathbf{x = (V^T V W W)^{-1} V^T W U b = (W W)^{-1} V^T W U b = V^T W^{-1} U b}$$

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

$\mathbf{A\,x = b}$

M x N

$\mathbf{A = U^T\,W\,V}$

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
w_{ii} sono detti valori singolari.

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

$$\mathbf{x = (A^TA)^{-1}A^Tb}$$
$$\mathbf{x = V^T\,W^{-1}\,U\,b}$$

Non devo calcolare l'inversa di una matrice dell'ordine di A*A

Calcolo l'inversa in modo semplice: inversa di W è ottenuta come $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Controllo il condizionamento della matrice: rapporto tra w_{11} e w_{nn}

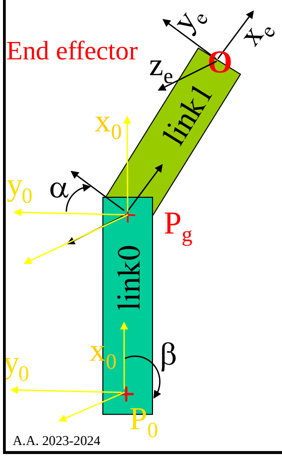
Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Cinematica diretta semplificata

Considero solo α e β come parametri liberi

4 equazioni nei 2 parametri liberi α e β

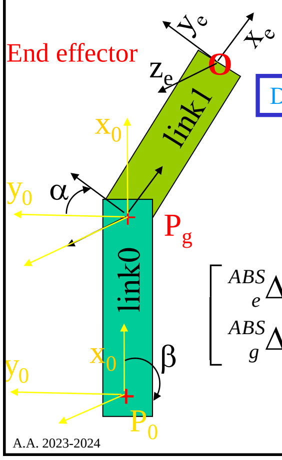


$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{\ e}P \\ {}^{ABS}_{\ g}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ l_o \cos\beta \\ -l_o \sin\beta \end{bmatrix}$$

Definiamo la traiettoria dell'end effector **e** del joint **g, link 0**

Il Jacobiano dell'esempio

$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{\ e}P \\ {}^{ABS}_{\ g}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ l_o \cos\beta \\ -l_o \sin\beta \end{bmatrix}$$



Definiamo la traiettoria dell'end effector **e** del joint **g, link 0**

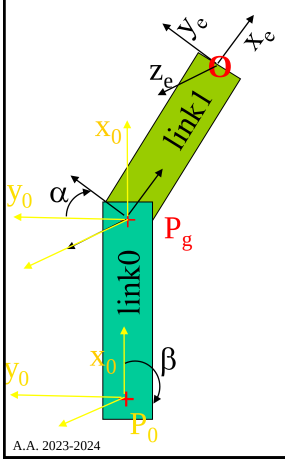
Jacobiano
rettangolare: 4 x 2

$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{\ e}\Delta P \\ {}^{ABS}_{\ g}\Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

J = J(W,L)

Esempio (m = 4, n = 2) – sistema lineare

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$



$$b = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

4 x 1   2 x 1

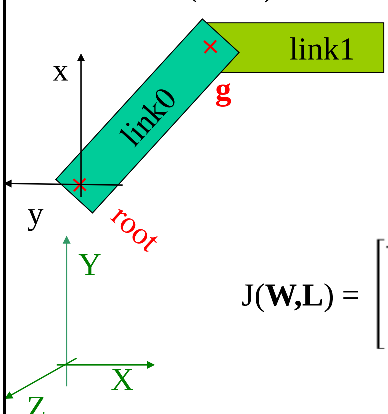
$$J\,\Delta w = \Delta P_e$$

$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$$

Esempio (m = 4, n = 2) per α = β = 45°

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$$



$$b = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

4 x 1   2 x 1

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \\ 0 & -l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \end{bmatrix}$$

Supponiamo: α = β = 45°

Esempio (m = 4, n = 2) – Pseudo-inversa

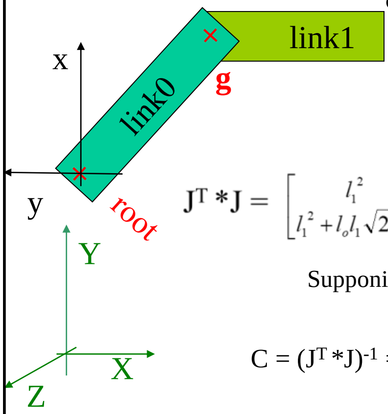
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Supponiamo:

$\alpha = \beta = 45^o$

$$J(\{\mathbf{45, 45}\},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \\ 0 & -l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$



$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2 \\ l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2 & (-l_1 - l_o\sin 45)^2 + (l_o\cos 45)^2 + (l_0\sin 45)^2 + (l_0\cos 45)^2 \end{bmatrix} =$$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} & 12+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2) - soluzione

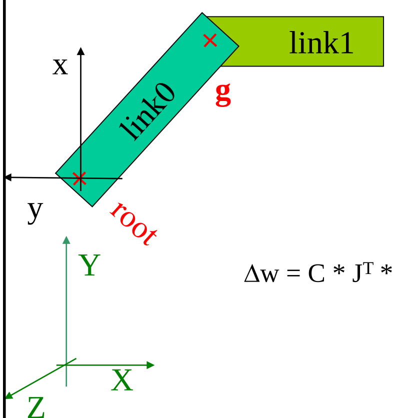
$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P$

$$b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$$

$$x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$
Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$



$\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$
$\Delta P_{g_x} = 1$ $\Delta P_{g_y} = 0$

$$\Delta w = C * J^T * \Delta P = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} radianti = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} gradi$$

Esempio (m = 4, n = 2) – errore

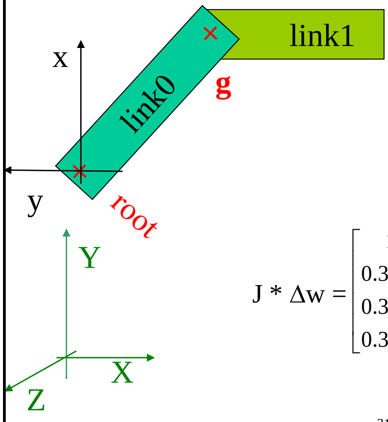
$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P$ $\qquad b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$ $\qquad x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$\Delta P_{e_x} = 1 \qquad \Delta P_{e_y} = 0$

$\Delta P_{g_x} = 1 \qquad \Delta P_{g_y} = 0$



$$\Delta w = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} radianti = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} gradi$$

$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Movimento ottenuto

E' diverso dal valore desiderato per ΔP

Esempio (m = 4, n = 2) - quantificazione

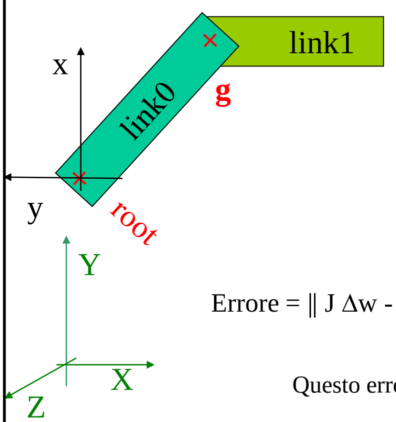
$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P$ $\qquad b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$ $\qquad x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} grad$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$\Delta P_{e_x} = 1 \qquad \Delta P_{e_y} = 0$

$\Delta P_{g_x} = 1 \qquad \Delta P_{g_y} = 0$



$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$$

Errore = $\| J\,\Delta w - \Delta P \|^2 = 0^2 + 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2 = 0.8165$

Questo errore è il minimo errore ottenibile in norma l_2.

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ${}^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso J_k^{-1}, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

   ${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, ${}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Abbiamo analizzato 1 passo

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n, sistemi sovradeterminati).
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Stima ai minimi quadrati pesata

Introduco un peso p_i sull'errore di ogni end-point, v_i

$$p_1a_{11}x_1 + p_1a_{12}x_2 - p_1b_1 = p_1v_1$$
$$p_2a_{21}x_1 + p_2a_{22}x_2 - p_2b_2 = p_2v_2$$
$$p_3a_{31}x_1 + p_3a_{32}x_2 - p_3b_3 = p_3v_3$$

Residuo pesato

Il sistema diventa PAX = Pb con P matrice diagonale m x m

$$\min \sum_k (p_k v_k)^2$$

$$\min \| PAx - Pb \|^2 = \min \| P(Ax - b) \|^2$$

Stima ai minimi quadrati pesata - soluzione

Introduco un peso p_i sull'errore di ogni end-point, v_i

$$p_1a_{11}x_1 + p_1a_{12}x_2 - p_1b_1 = p_1v_1$$
$$p_2a_{21}x_1 + p_2a_{22}x_2 - p_2b_2 = p_2v_2$$
$$p_3a_{31}x_1 + p_3a_{32}x_2 - p_3b_3 = p_3v_3$$

Residuo pesato

$$\min \| P(Ax - b) \|^2$$

$$\frac{d}{x}(PAx - Pb)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A'P'(PAx - Pb) = 0$$

$$\Rightarrow A'P'PAx - A'P'Pb = 0$$

lato che P' = P, è non singolare ed è diagonale si puo' spostare all'interno del prodotto

$$P'(A'PAx - A'Pb) = 0$$

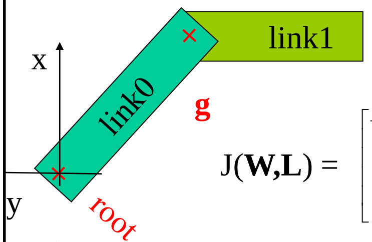
$$\boxed{x = (A^T P A)^{-1} A^T P b}$$

Esempio (m = 4, n = 2; $\alpha = \beta = 45^o$)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = (J^T * P * J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e$$

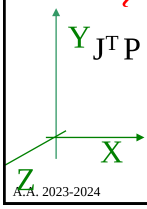
$$\Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \qquad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$



$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin 45 \\ 0 & -l_0\cos 45 \\ 0 & -l_o\sin 45 \\ 0 & l_o\cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$

$$J^T P J = \begin{bmatrix} p_1 * l_1^2 & p_1(l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2) \\ p_1(l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2) & p_1[(-l_1 - l_o\sin 45)^2] + p_2(l_o\cos 45)^2 + p_3(l_0\sin 45)^2 + p_4(l_0\cos 45)^2] \end{bmatrix}$$



Soluzione con i pesi

$$\Delta w = (J^T PJ)^{-1} * J^T P * \Delta P_e \qquad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

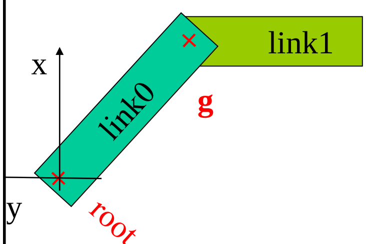
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta P^e_x = 1$ $\Delta P^e_y = 0$

$\Delta P^g_x = 1$ $\Delta P^g_y = 0$



$$(J^T PJ) = \begin{bmatrix} 40 & 68.284 \\ 68.284 & 140.568 \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = [-22,887; 2,56] \text{ gradi}$$

Errore ottenuto

$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P^* \Delta P_e \qquad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

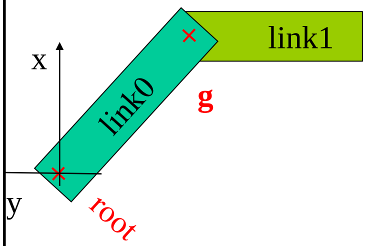
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta P^e_x = 1$ $\quad \Delta P^e_y = 0$

$\Delta P^g_x = 1$ $\quad \Delta P^g_y = 0$



$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P^e_x \\ \Delta P^e_y \\ \Delta P^g_x \\ \Delta P^g_y \end{bmatrix}$$

Spostamento ottenuto

Spostamento desiderato

Errore ottenuto - valutazione

$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P^* \Delta P_e \qquad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

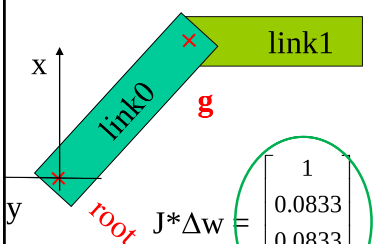
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta P^e_x = 1$ $\quad \Delta P^e_y = 0$

$\Delta P^g_x = 1$ $\quad \Delta P^g_y = 0$



$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P^e_x \\ \Delta P^e_y \\ \Delta P^g_x \\ \Delta P^g_y \end{bmatrix} \qquad \text{Errore} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0833 \\ 0.9166 \\ 0{,}0833 \end{bmatrix}$$

più vicino al valore desiderato per il punto **e** e **meno vicino** per il punto **g**

Spostamento ottenuto

Spostamento desiderato

$$\min \| P(J\,\Delta w - \Delta P_e) \| = ((1-1)*10)^2 + ((0.0833-0)*10)^2 + (0.0833-1)^2 + (0.0833-0)^2$$

Privilegio di alcuni punti dello scheletro rispetto ad altri

$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e$$

Attraverso la matrice diagonale dei pesi P
posso influenzare la soluzione
(vincolo soft sul movimento)

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione robusta ai minimi quadrati
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.