



Realtà Virtuale From 3D to 2D


Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano




Sommario

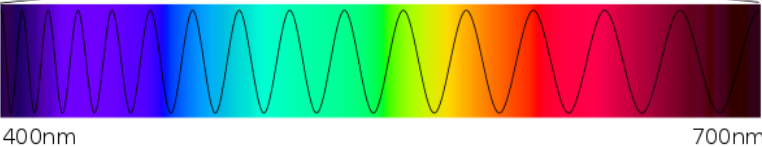
- La trasformazione proiettiva
- Notazione matriciale
- Calibrazione

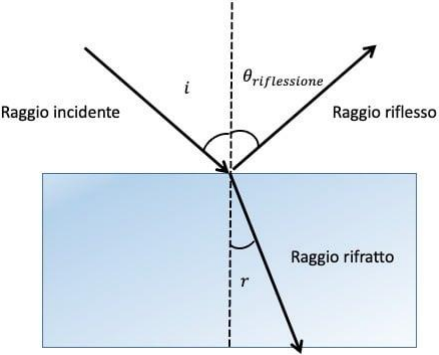


Immagine




La luce sono onde elettromagnetiche nello spettro del visibile.




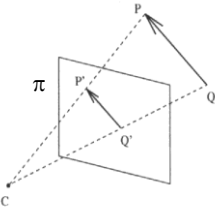


Un raggio di luce viene riflesso e/o rifratto dalle superfici

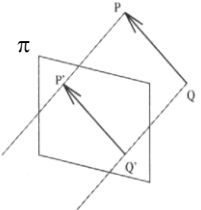


Proiezione centrale e proiezione ortogonale (3D -> 2D)





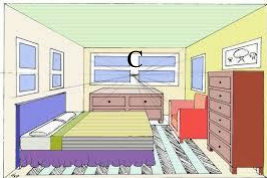
1)




2)

$P(X, Y, Z)$ viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto $P'(X', Y')$. Z è la distanza dal piano immagine.

- 1) X' dipende da X e Z .
- 2) X' non dipende da Z , ma solo da X .



Proiezione centrale: centro di proiezione al finito - C.



Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.

A.A. 2023-2024 4/55



Dal 3D al 2D



Come si forma un'immagine?

- Scena con oggetti riflettenti.
- Sorgente di illuminazione
- Piano di rilevazione della luce riflessa.

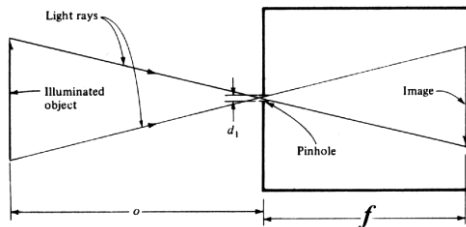
Il motore di questa trasformazione è la **proiezione prospettica**.

A.A. 2023-2024

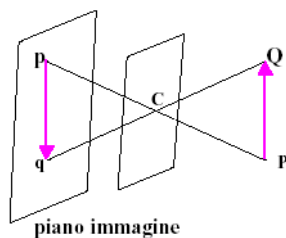
5/55



La pin-hole camera



Proiezione prospettica:
tutti i raggi di proiezione
passano per un unico punto,
detto **centro di proiezione**.




Pinhole camera


Perchè non funziona in pratica?

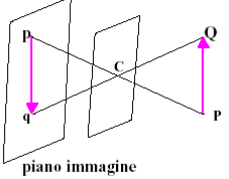
A.A. 2023-2024

6/55

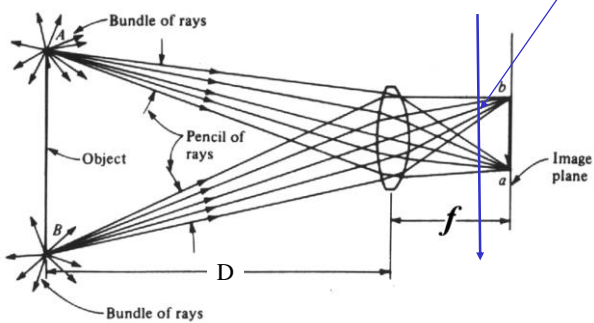


La lente





Pinhole camera




Lente convergente


I raggi provenienti da un punto 3D vengono fatti convergere nello stesso punto del piano immagine

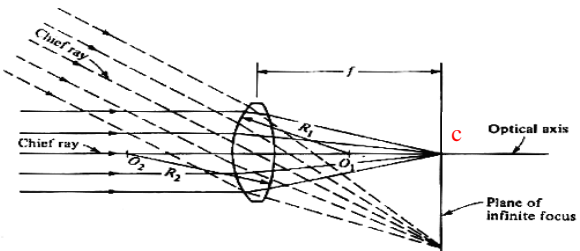
Data la forma della lente f e D sono fissati

A.A. 2023-2024



Geometria dell'ottica





Oggetti all'infinito

- **Lunghezza focale:** distanza del piano immagine quando un oggetto si trova all'infinito e dà un'immagine nitida sul piano immagine.
- **Asse ottico:** raggio che non viene deviato dalla lente.
- **Intersezione dell'asse ottico con il piano immagine dà il punto principale (c).**

A.A. 2023-2024 8/55

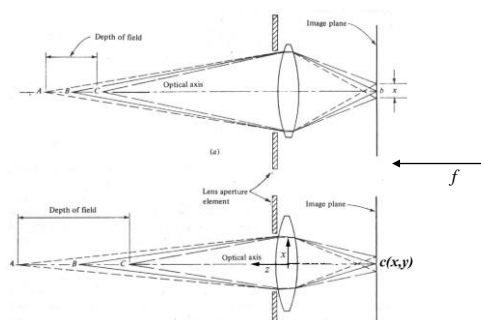


Messa a fuoco



Problema della messa a fuoco

La profondità di campo dipende dall'apertura dell'obiettivo.



Parametri di camera (o intrinseci – 3 parametri):

- Punto principale $c(x,y)$
- distanza focale (piano messa a fuoco), f

Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).

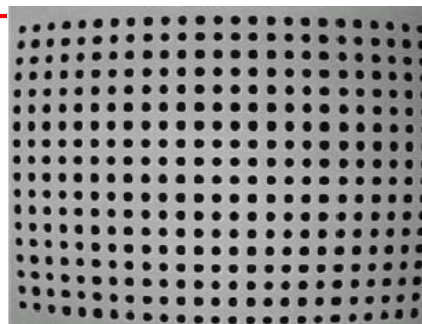
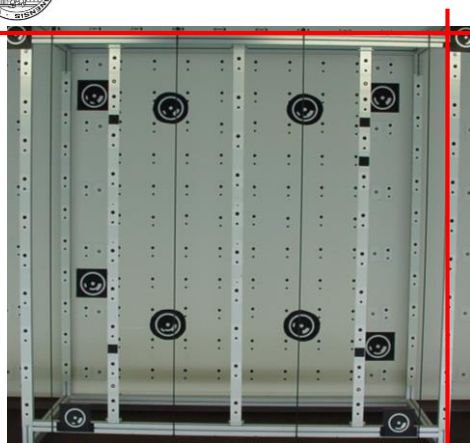
Distorsioni.

A.A. 2023-2024

9/55



Distorsioni




Ottime per effetti speciali, un po' meno per delle misure.....


Le camere non sono metriche.

A.A. 2023-2024

10/55



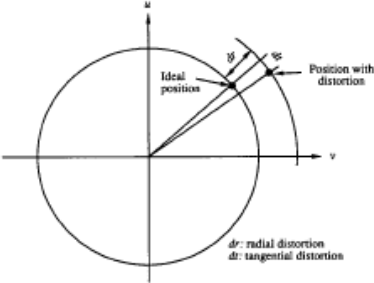
Distorsioni



Distorsioni radiali.
Distorsioni tangenziali.
Shrinkage ($x' = \lambda x, y' = y$).


$$x_m = x + f(x, y)$$

$$y_m = y + g(x, y)$$




dr: radial distortion
dt: tangential distortion

A.A. 2023-2024
11/55



Distorsioni radiali



A cuscinetto

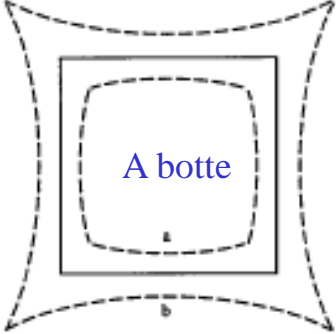
$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots$$

$$r = |p - p_0|$$

Rappresentazione polare (ρ, ϕ):

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$




$$dx(p) = k_0 x + k_1 x(x^2 + y^2) + O[(x, y)^4]$$


$$dy(p) = k_0 y + k_1 y(x^2 + y^2) + O[(x, y)^4]$$

Il parametro k_0 non si considera perchè corrisponde ad una variazione di scala.

A.A. 2023-2024
12/55



I modelli di distorsioni




Modelli parametrici


1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$ (1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$ (2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$ (3)

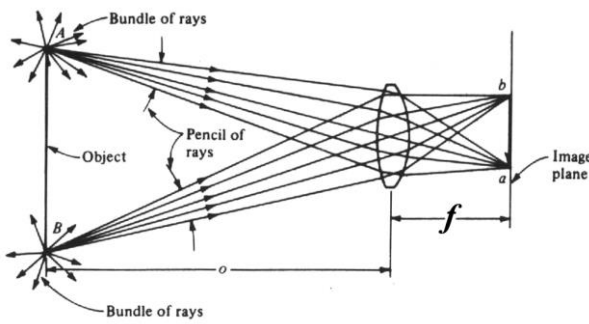
In alternativa: modelli **semi-parametrici** che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.

A.A. 2023-2024
13/55



Le distorsioni

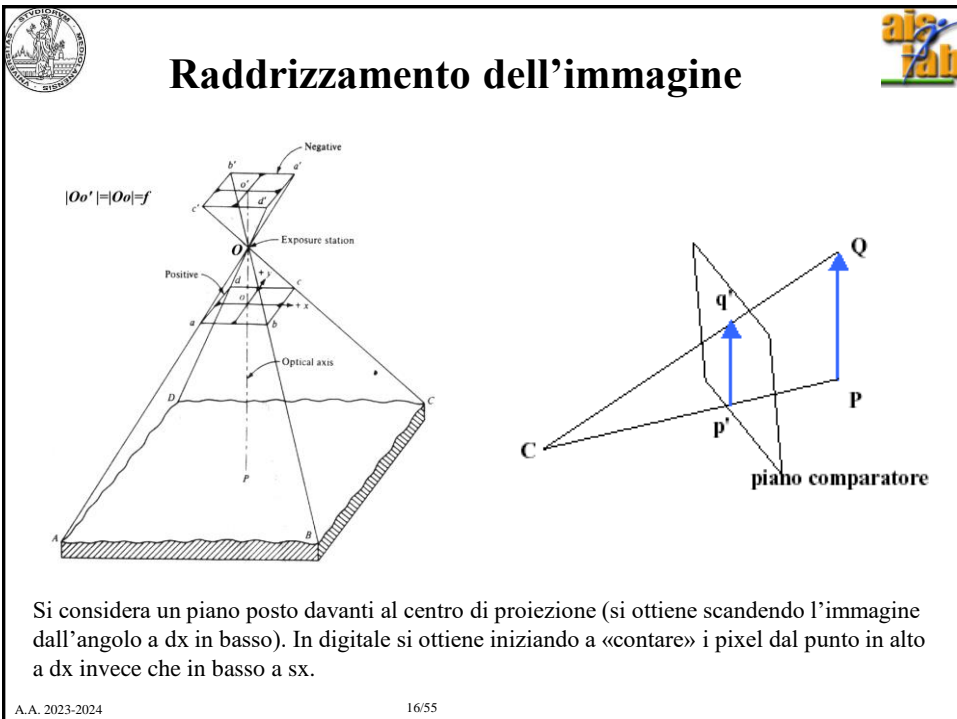
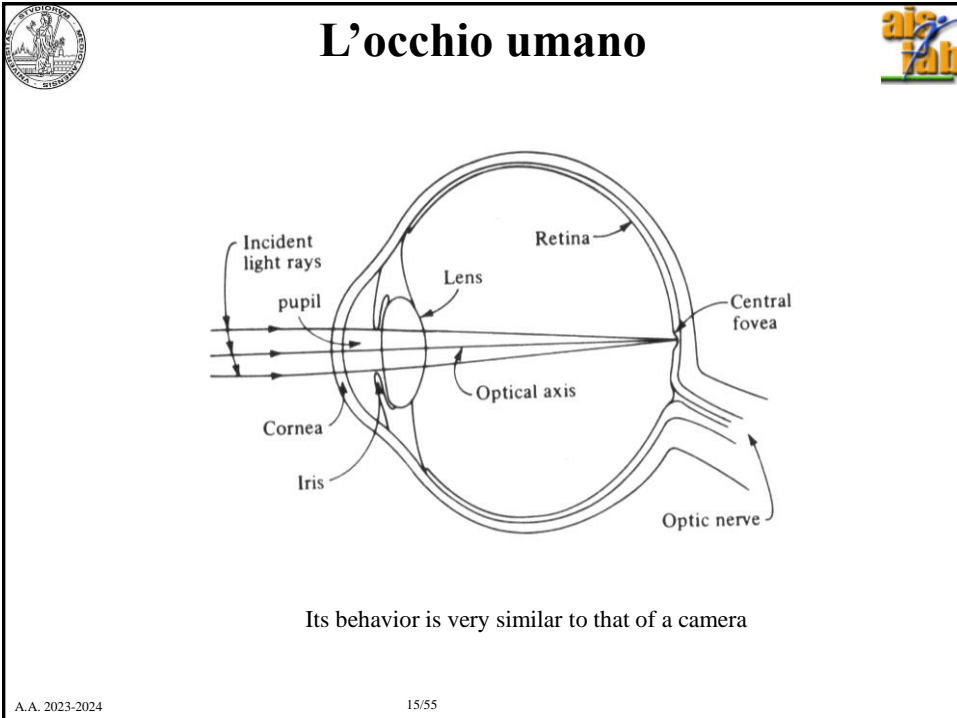





$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots \quad p_{\text{misurato}} = p_{\text{proiettato}} + dr(p)$$


Il punto a per effetto delle distorsioni viene misurato in una posizione $p_{a_proiettato} + dr(p_{a_proiettato})$

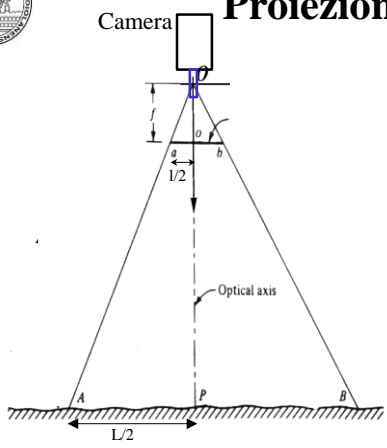
A.A. 2023-2024
14/55





Proiezione semplice






Per similitudine fra i triangoli aOo e AOP:

Oo : OP = **ao** : AP


E' una relazione tra enti geometrici, come facciamo a passare a una relazione algebrica?

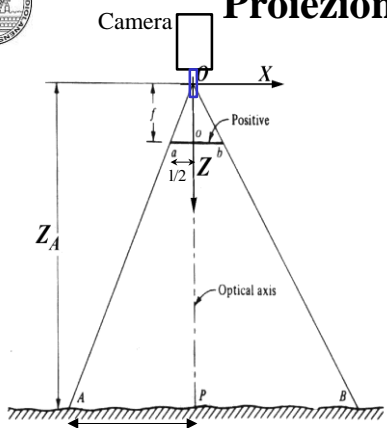
A.A. 2023-2024

17/55



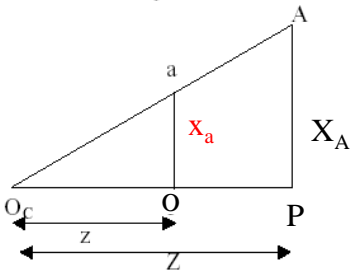
Proiezione semplice





co un sistema di riferimento Cartesiano.

coordinate misurate rispetto a un centro comune.
sono orientate come il piano immagine



Per similitudine fra i triangoli aOo e AOP:


Oo : OP = **ao** : AP

f : Z_A = **x_A** : X_A → **x_A** = f X_A / Z_A


$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = f X_A / Z_A \\ y_a = f Y_A / Z_A \end{cases}$$

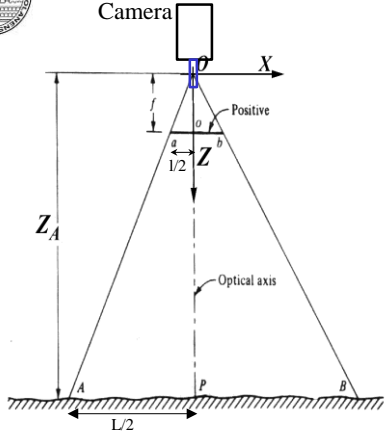
A.A. 2023-2024

18/55



Offset sull'immagine





Dimensione immagine

Dimensione pixel: 900 KB OK

Larghezza: 640 pixel Annulla

Altezza: 480 pixel Auto...

Dimensioni documento:

Larghezza: 5,42 cm

Altezza: 4,06 cm

Risoluzione: 300 pixel/pollice

Mantieni proporzioni

Ricampiona immagine: Bicubica


Il punto principale non avrà coordinate $c(x_0, y_0)$

Dipende da 3 parametri: f, x_0, y_0 – **parametri interni**


$$a(x_a; y_a) \left\{ \begin{array}{l} x_a - x_0 = f X_A / Z_A \\ y_a - y_0 = f Y_A / Z_A \end{array} \right.$$

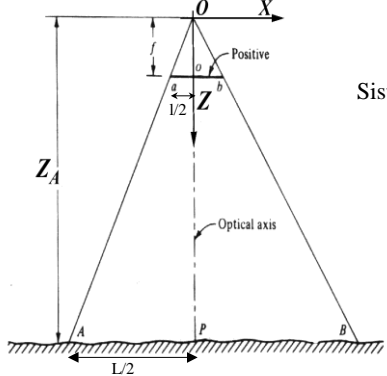
A.A. 2023-2024

19/55



Sistemi di riferimento






Sistema di riferimento opportuno per la camera


Gli oggetti virtuali possono essere definiti in un sistema di riferimento diverso, assoluto (e.g. sistema di riferimento del SW di modellazione)

A.A. 2023-2024

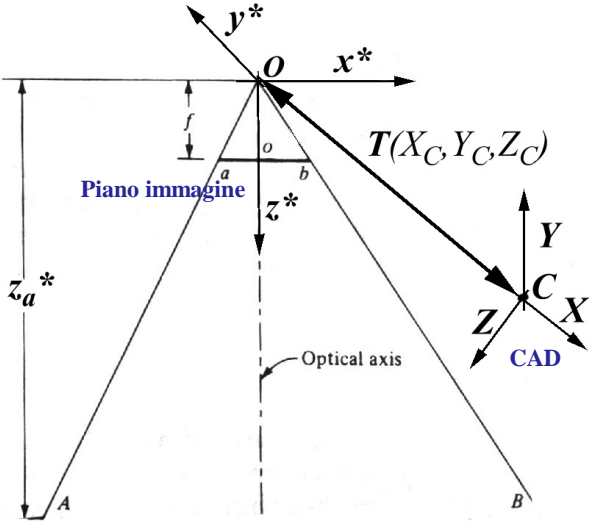
20/55




I parametri esterni




- **Traslazione:**
3 componenti:
 $T(X_C, Y_C, Z_C)$.
- **Rotazione**
 $R_{3 \times 3}(\omega, \phi, k)$



A.A. 2023-2024
21/55

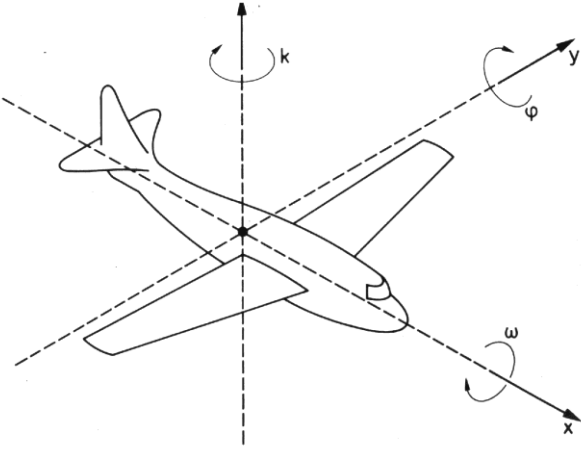


Angoli di orientamento nello spazio 3D



Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali,
non commutative.



A.A. 2023-2024
22/55



Rototraslazione



$$\mathbf{P}^* = \mathbf{R} (\mathbf{P} - \mathbf{T})$$

$$X^* = r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)$$

$$Y^* = r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)$$

$$Z^* = r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)$$

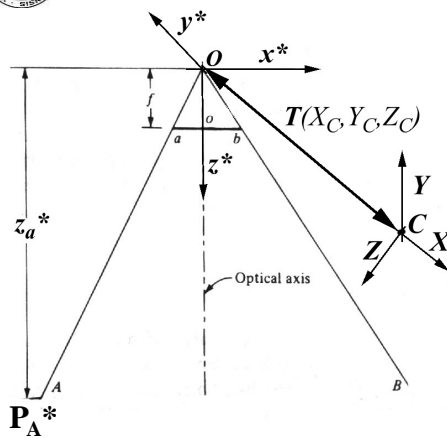
$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -(r_{11}T_x + r_{12}T_y + r_{13}T_z) \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -(r_{21}T_x + r_{22}T_y + r_{23}T_z) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -(r_{31}T_x + r_{32}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2023-2024

23/55

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Dal 3D al 2D




1) Mi riconduco alla proiezione semplice

$$\mathbf{P}_A^* = \mathbf{R} (\mathbf{P}_A - \mathbf{T})$$


$$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*)$$

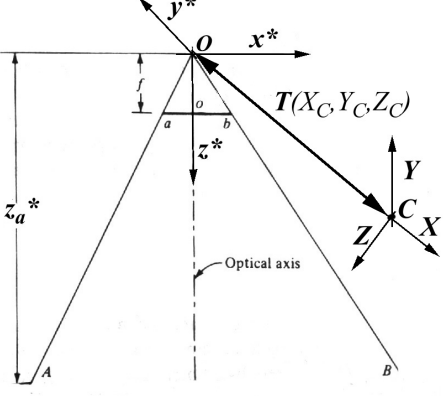
A.A. 2023-2024

24/55



Dal 3D al 2D






2) Implemento la proiezione semplice

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a - x_0 = f X_A^* / Z_A^* \\ y_a - y_0 = f Y_A^* / Z_A^* \end{cases}$$


$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*) \Rightarrow a(x_a, y_a)$

La terza coordinata sul piano immagine, $z_a = f = \overline{oO}$

A.A. 2023-2024
25/55

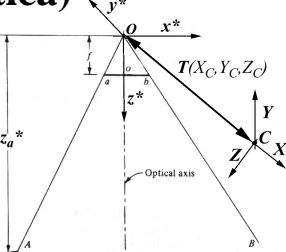


Equazioni di collinearità (rappresentazione prospettica)



$$\begin{aligned} X_A^* &= r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C) \\ Y_A^* &= r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C) \\ Z_A^* &= r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C) \end{aligned}$$


$$(x_a - x_0) = f X_A^* / Z_A^* = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$




$$y_a - y_0 = f Y_A^* / Z_A^* = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.

A.A. 2023-2024
26/55

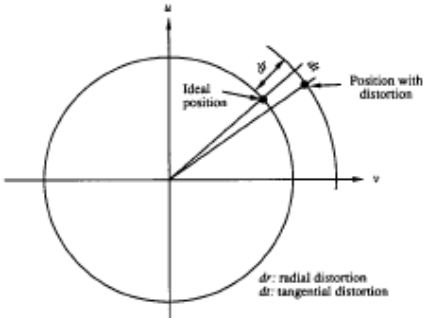
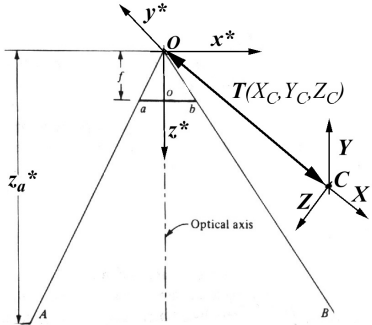



Modello reale della ripresa fotografica




$$(x_a - x_o) + f(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$(y_a - y_o) + g(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$



Tassonomia dei parametri



$P^3 \rightarrow P^2$ Interior parameters

- Focal length, f
- Principal point (x_o, y_o)

$P^3 \rightarrow P^3$ Exterior parameters

- Orientation (ω, ϕ, κ)
- Position (X_o, Y_o, Z_o)


$P^2 \rightarrow P^2_m$ Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$
 $(f(x, y, x_o, y_o); g(x, y, x_o, y_o))$

$$(x_a - x_o) + f(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$


$$(y_a - y_o) + g(x, y, x_o, y_o) = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

A.A. 2023-2024

28/55




Sommarario




- La trasformazione proiettiva
- **Notazione matriciale**
- Calibrazione

A.A. 2023-2024 29/55



Notazione matriciale



$$A = \begin{bmatrix} R & -RT \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Roto-traslazione}$$


Partiamo da P

Applichiamo la rototraslazione e poi?


$$P^* = AP = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X^*_A = r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C) \\ Y^*_A = r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C) \\ Z^*_A = r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C) \\ 1 \end{cases}$$

e poi?

A.A. 2023-2024 30/55



Notazione matriciale



Proiezione

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMP}^*$$


$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_o \\ 0 & f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Trasformazione} \\ \text{mediante scala } (f) \text{ e} \\ \text{traslazione } (x_o, y_o) \end{array}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMA P} = \mathbf{H P}$$


$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Che forma ha H?
Che dimensioni?

A.A. 2023-2024
31/55



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H P}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{RT} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & -m_{11}X_C - m_{12}Y_C - m_{13}Z_C \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & -m_{21}X_C - m_{22}Y_C - m_{23}Z_C \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -m_{31}X_C - m_{32}Y_C - m_{33}Z_C \end{bmatrix}$$

A.A. 2023-2024
32/55



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RT} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & -m_{11}X_C - m_{12}Y_C - m_{13}Z_C \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & -m_{21}X_C - m_{22}Y_C - m_{23}Z_C \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -m_{31}X_C - m_{32}Y_C - m_{33}Z_C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{MA}) = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & -m_{11}X_C - m_{12}Y_C - m_{13}Z_C \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & -m_{21}X_C - m_{22}Y_C - m_{23}Z_C \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -m_{31}X_C - m_{32}Y_C - m_{33}Z_C \end{bmatrix} =$$

A.A. 2023-2024

33/55



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{MA}) = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & -m_{11}X_C - m_{12}Y_C - m_{13}Z_C \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & -m_{21}X_C - m_{22}Y_C - m_{23}Z_C \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -m_{31}X_C - m_{32}Y_C - m_{33}Z_C \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} fm_{11} + x_0m_{31} & fm_{12} + x_0m_{32} & fm_{13} + x_0m_{33} & -f(m_{11}X_C + m_{12}Y_C + m_{13}Z_C) - x_0(m_{31}X_C + m_{32}Y_C + m_{33}Z_C) \\ fm_{21} + y_0m_{31} & fm_{22} + y_0m_{32} & fm_{23} + y_0m_{33} & -f(m_{21}X_C + m_{22}Y_C + m_{23}Z_C) - y_0(m_{31}X_C + m_{32}Y_C + m_{33}Z_C) \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -m_{31}X_C - m_{32}Y_C - m_{33}Z_C \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

A.A. 2023-2024

34/55



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} fm_{11} + x_0m_{31} & fm_{12} + x_0m_{32} & fm_{13} + x_0m_{33} & -f(m_{11}X_c + m_{12}Y_c + m_{13}Z_c) - x_0(m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c) \\ fm_{21} + y_0m_{31} & fm_{22} + y_0m_{32} & fm_{23} + y_0m_{33} & -f(m_{21}X_c + m_{22}Y_c + m_{23}Z_c) - y_0(m_{31}X_c + m_{32}Y_c + m_{33}Z_c) \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c \end{bmatrix} \mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (fm_{11} + x_0m_{31})X + (fm_{12} + x_0m_{32})Y + (fm_{13} + x_0m_{33})Z - f(m_{11}X_c + m_{12}Y_c + m_{13}Z_c) - x_0(m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c) \\ (fm_{21} + y_0m_{31})X + (fm_{22} + y_0m_{32})Y + (fm_{23} + y_0m_{33})Z - f(m_{21}X_c + m_{22}Y_c + m_{23}Z_c) - y_0(m_{31}X_c + m_{32}Y_c + m_{33}Z_c) \\ m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}Z - m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c \end{bmatrix}$$

in coordinate omogenee

A.A. 2023-2024

35/55



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (fm_{11} + x_0m_{31})X + (fm_{12} + x_0m_{32})Y + (fm_{13} + x_0m_{33})Z - f(m_{11}X_c + m_{12}Y_c + m_{13}Z_c) - x_0(m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c) \\ (fm_{21} + y_0m_{31})X + (fm_{22} + y_0m_{32})Y + (fm_{23} + y_0m_{33})Z - f(m_{21}X_c + m_{22}Y_c + m_{23}Z_c) - y_0(m_{31}X_c + m_{32}Y_c + m_{33}Z_c) \\ m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}Z - m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c \end{bmatrix}$$

in coordinate omogenee

in coordinate cartesiane

$$= \left[\frac{\begin{bmatrix} (fm_{11} + x_0m_{31})X + (fm_{12} + x_0m_{32})Y + (fm_{13} + x_0m_{33})Z - f(m_{11}X_c + m_{12}Y_c + m_{13}Z_c) - x_0(m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c) \\ (fm_{21} + y_0m_{31})X + (fm_{22} + y_0m_{32})Y + (fm_{23} + y_0m_{33})Z - f(m_{21}X_c + m_{22}Y_c + m_{23}Z_c) - y_0(m_{31}X_c + m_{32}Y_c + m_{33}Z_c) \\ m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c) \end{bmatrix}}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)} \right] =$$

$$= \left[\frac{\begin{bmatrix} fm_{11}X + x_0m_{31}X + fm_{12}Y + x_0m_{32}Y + fm_{13} + x_0m_{33}Z - f(m_{11}X_c + m_{12}Y_c + m_{13}Z_c) - x_0(m_{31}X_c - m_{32}Y_c - m_{33}Z_c) \\ (fm_{21} + y_0m_{31})X + (fm_{22} + y_0m_{32})Y + (fm_{23} + y_0m_{33})Z - f(m_{21}X_c + m_{22}Y_c + m_{23}Z_c) - y_0(m_{31}X_c + m_{32}Y_c + m_{33}Z_c) \\ m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c) \end{bmatrix}}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)} \right] =$$

A.A. 2023-2024

36/55



Notazione matriciale



$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA}) \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P} =$$

in coordinate cartesiane

$$= \left[\begin{array}{c} fm_{11}X + x_0m_{31}X + fm_{12}Y + x_0m_{32}Y + fm_{13} + x_0m_{33}Z - f(m_{11}X_C + m_{12}Y_C + m_{13}Z_C) - x_0(m_{31}X_C - m_{32}Y_C - m_{33}Z_C) \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \\ (fm_{21} + y_0m_{31})X + (fm_{22} + y_0m_{32})Y + (fm_{23} + y_0m_{33})Z - f(m_{21}X_C + m_{22}Y_C + m_{23}Z_C) - y_0(m_{31}X_C + m_{32}Y_C + m_{33}Z_C) \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} fm_{11}(X - X_C) + x_0m_{31}(X - X_C) + fm_{12}(Y - Y_C) + x_0m_{32}(Y - Y_C) + fm_{13}(Z - Z_C) + x_0m_{33}(Z - Z_C) \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \\ fm_{21}(X - X_C) + y_0m_{31}(X - X_C) + fm_{22}(Y - Y_C) + y_0m_{32}(Y - Y_C) + fm_{23}(Z - Z_C) + y_0m_{33}(Z - Z_C) \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} f[m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)] + x_0[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \\ fm_{21}(X - X_C) + y_0m_{31}(X - X_C) + fm_{22}(Y - Y_C) + y_0m_{32}(Y - Y_C) + fm_{23}(Z - Z_C) + y_0m_{33}(Z - Z_C) \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} f[m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)] + x_0 \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \\ fm_{21}(X - X_C) + y_0m_{31}(X - X_C) + fm_{22}(Y - Y_C) + y_0m_{32}(Y - Y_C) + y_0 \\ m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C) \end{array} \right]$$

A.A. 2023-2024

37/55



Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Notazione matriciale
- **Calibrazione**

A.A. 2023-2024

38/55



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X, Y, Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x, y, f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2023-2024

39/55



Augmented reality at work (proiezione)



A.A. 2023-2024

40/55



Le operazioni richieste



- Posiziono l'oggetto virtuale nella scena reale manualmente
 - Definisco la sua posizione e orientamento
 - Definisco la sua grandezza (proiezione)
- Applico all'oggetto virtuale la stessa rototraslazione della camera
 - Calcolo la rototraslazione della camera a ogni frame (dallo spostamento di un insieme di punti identificati nella scena attraverso marker virtuali o reali)
 - Applico la stessa rototraslazione all'oggetto virtuale (aggiorno la roto-traslazione della camera rispetto all'oggetto virtuale)



Il problema della calibrazione



We do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to **view the volume of interest!**

Set-up requires:

- Cameras position and orientation (exterior parameters)
- Focusing (and possibly choice of a proper lens, interior parameters)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time
and/or
Multiple cameras are used.**



In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- **Parametri esterni:** $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- Parametri interni: x_0, y_0, f .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1,$
.....

Calibrazione dei parametri esterni può essere fatta separatamente dai parametri interni e/o di distorsione.



Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.
- Per proiettare oggetti virtuali su camere.



Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).

Metodi:

- Scacchiere (Zhang et al., Software in Matlab e OpenCV)
- Barra rigida con 2 marker (Borghese e Cerveri, 2000; utilizzata nei sistemi di Mocap; e.g. nello SMART-3D).
- Griglie 3D (non più utilizzato, Borghese et al., 1990)

Metodi ibridi:

- **Structure from Motion (SfM)**, **SLAM** (Simultaneous Localization and Mapping), vengono ricostruite le coordinate 3D dei punti, stimati i parametri interni e determinato il movimento. Molto utilizzata in robotica.

Algoritmi:

- DLT (Direct Linear Transform -> da 9 parametri, si passa a 12 in un sistema lineare).
- Bundle adjustment. Stima iterativa dei parametri.

A.A. 2023-2024

45/55



2D Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)




On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche – mappatura tra incroci di una griglia regolare e la loro misura sul piano immagine)

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external + other internal parameters).



A.A. 2023-2024

46/55



Calibrazione 3D con punti in posizione nota

- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.


Ho $9 + D$ parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo (ogni punto di controllo \rightarrow 2 equazioni).

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

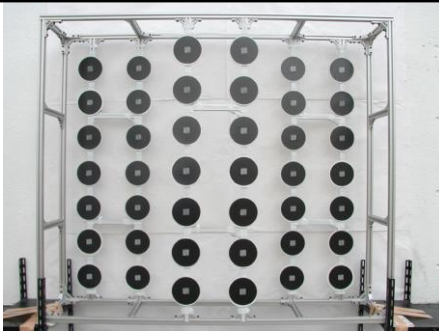
$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$


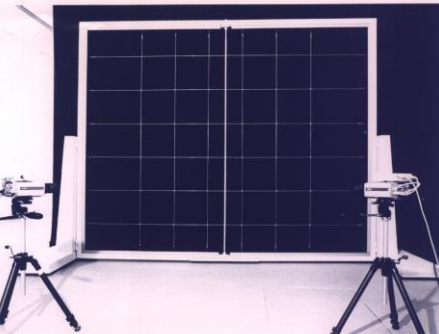
A.A. 2023-2024
47/55



Test field (Known control points)

3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.




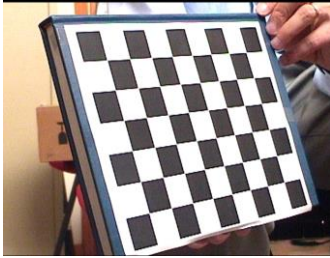




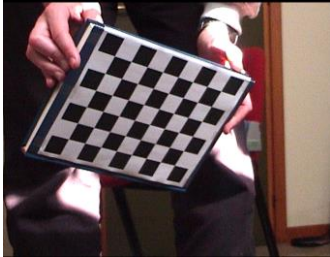
A.A.
48/55



Calibration through a chessboard



Estimated Parameters.


Distortions
Internal
External

<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>


Also suite in Matlab

A.A. 2023-2024

49/55


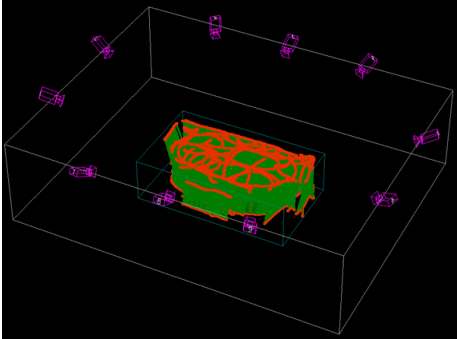


Wand Calibration



2 steps:



- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.

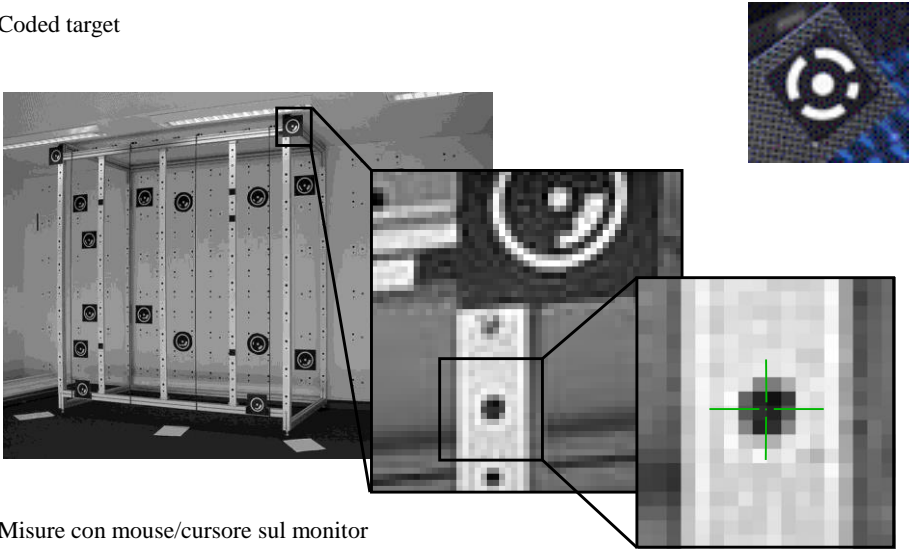
Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor, video).

A.A. 2023-2024

50/55



 **Misurazione manuale dei punti di controllo** 

Coded target

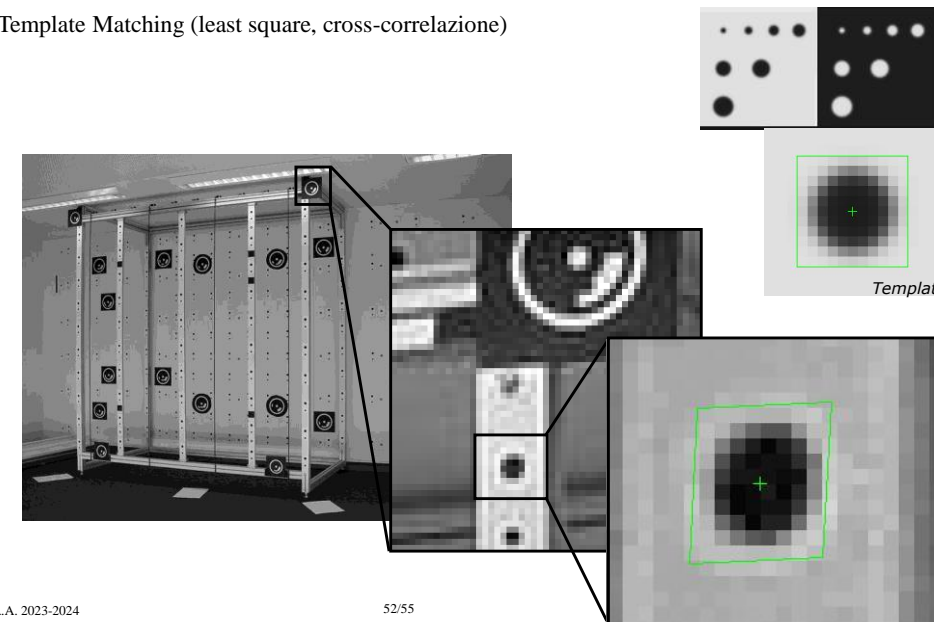


Misure con mouse/cursore sul monitor
Precisione: 1/4 - 1/8 Pixel


A.A. 2023-2024 51/55

 **Misurazione automatica dei control points** 


Template Matching (least square, cross-correlazione)



A.A. 2023-2024 52/55



Cross-correlazione

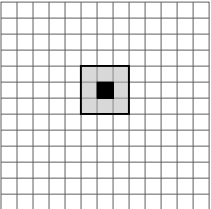


Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

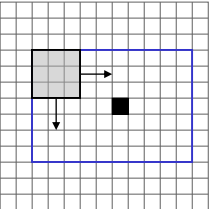
$$\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$


$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{mn-1}} \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{mn-1}} \quad \sigma_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$


finestra di correlazione



finestra di ricerca




 Conjugate pixels


 Search window

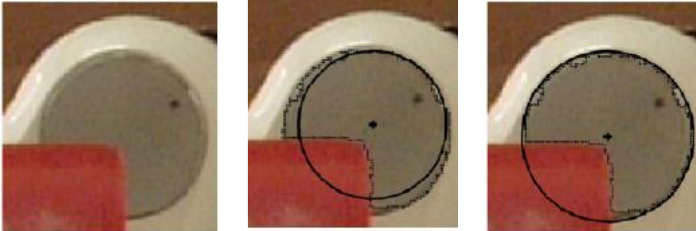
A.A. 2023-2024

53/55



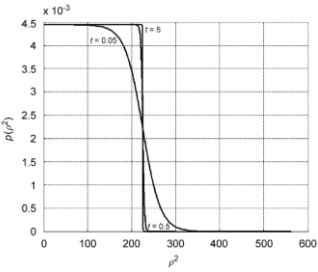
Approccio statistico al circle fitting





Frosio, Borghese – Pattern Recognition - 2008

$$L(p_C, R_C) = \prod_{i=1}^N p(\rho_i^2, R_C).$$



A.A. 2023-2024

54/55



Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione