

Sistemi Intelligenti I fuzzy system::esercitazione

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di informatica
alberto.borghese@unimi.it



A.A. 2024-2025

1/40

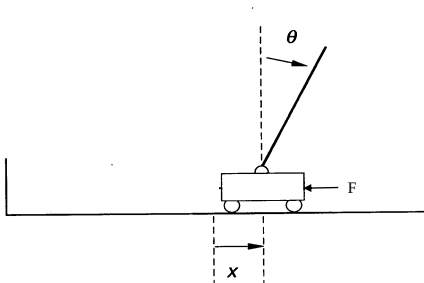
<http://borghese.di.unimi.it/>



Esercitazione sui sistemi fuzzy



		θ						
θ'	θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
	θ'							
NL					PL			
NM					PM			
NS					PS	NS		
ZE		PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS				PS	NS			
PM					NM			
PL					NL			



A.A. 2024-2025

2/40

<http://borghese.di.unimi.it/>

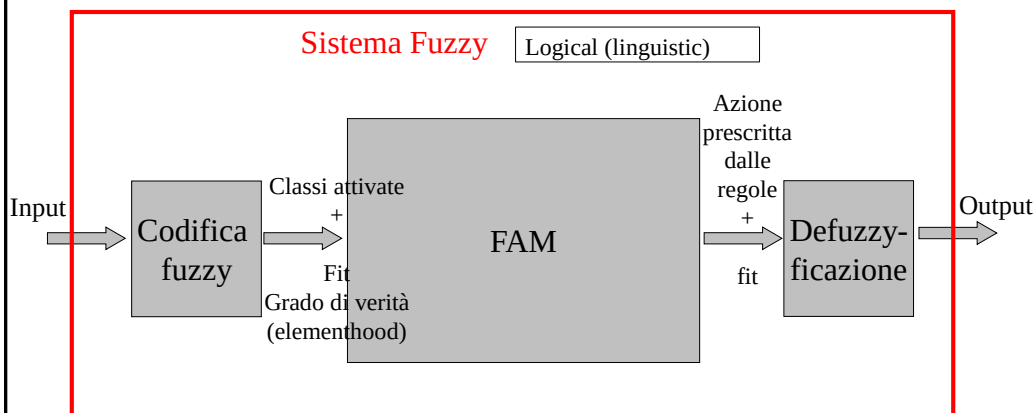


Struttura di un sistema fuzzy



Numeric

Numeric



Classi attive + fit delle classi → Regole + fit delle regole

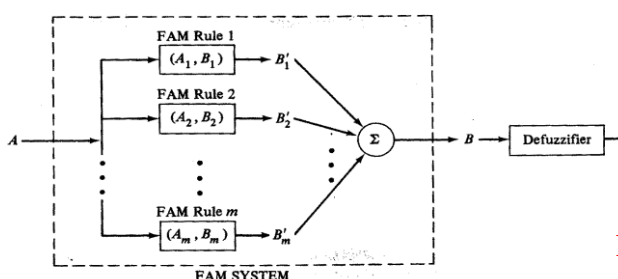
A.A. 2024-2025

3/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



Progettazione di un sistema fuzzy: struttura



Per tutti i modelli

- 1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
- 2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
- 3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole logiche: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input attive è possibile definire una classe di output (FAM).
- 4) Modalità di de-fuzzyficazione.

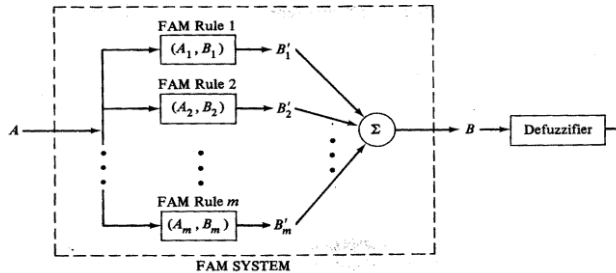
A.A. 2024-2025

4/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).

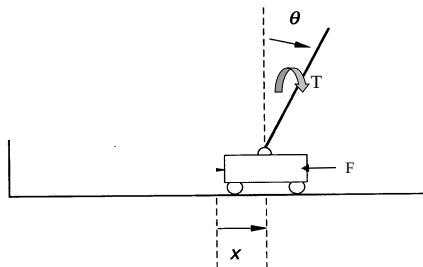


Video con cart pole





Cart-pole



Input: $A = \{\theta(t), \theta'(t), x(t), x'(t)\}$

Output: $B = \{F(t)\}$

Scopo del sistema di controllo è non fare cadere il bastone e mantenere il carrello sulla rotaia.

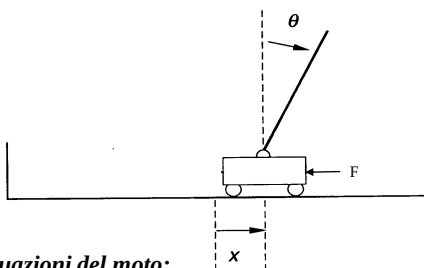
Il sistema è altamente non lineare, non si può applicare la teoria del controllo lineare.
Il sistema è altamente instabile (pendolo inverso)



Parametri del sistema Cart-pole completo (Mathematica!)



Condizioni iniziali: $\theta(0) = \theta'(0), x(0), x'(0) = 0$



Parametri:

g	9.8m/s
m	1.1kg (massa carrello + palo)
m_p	0.1kg (massa del palo)
l	0.5m distanza della cerniera dal centro di massa del palo.
Δt	0.02s (intervallo di campionamento e di controllo).

Equazioni del moto:

$$\theta(t+1) = \theta(t) + \theta'(t) \Delta t$$

$$x(t+1) = x(t) + x'(t) \Delta t$$

$$\theta'(t+1) = \theta'(t) + \frac{mg \sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t)) \left(F(t) + m_p l (\theta'(t) \pi / 180)^2 \sin(\theta(t)) \right)}{(4/3)ml - m_p l \cos^2(\theta(t))} \Delta t$$

$$x'(t+1) = x'(t) + \frac{F(t) + m_p l \left((\theta'(t) \pi / 180)^2 \sin(\theta(t)) - \theta''(t) \pi / 180 \cos(\theta(t)) \right)}{m} \Delta t$$



Obiettivo



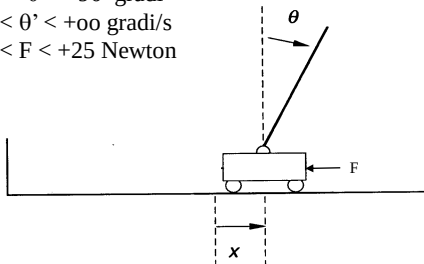
Vincoli possibili:

- $-90^\circ < \theta < +90^\circ$ gradi
- $-\infty < \theta' < +\infty$ gradi/s
- $-25 < F < +25$ Newton

Condizioni iniziali: $\theta(0) = \theta'(0)$, $x(0)$, $x'(0) = 0$

$F(t)$ tale per cui il palo è in equilibrio:

- $\theta(t) = 0$ gradi
- $\theta'(t) = 0$



$$\theta'(t+1) = \theta'(t) + \frac{mg \sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t)) (F(t) + m_p l (\theta'(t)\pi/180)^2 \sin(\theta(t)))}{(4/3)ml - m_p l \cos^2(\theta(t))} \Delta t$$

$$x'(t+1) = x'(t) + \frac{f(t) + m_p l ((\theta'(t)\pi/180)^2 \sin(\theta(t)) - \theta'(t)\pi/180 \cos(\theta(t)))}{m} \Delta t$$

A.A. 2024-2025

9/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole semplificato



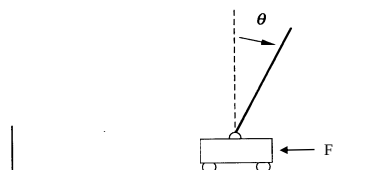
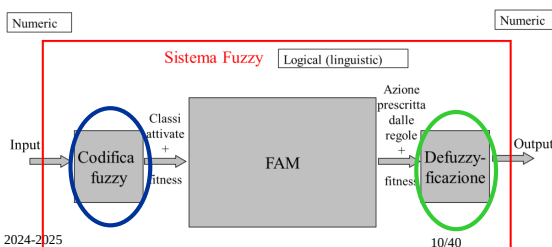
Consideriamo solamente il pendolo inverso semplificato:

1a) Identificazione delle variabili del sistema:

Input: A: $\{\theta(t), \theta'(t)\}$ Output: B: $\{F(t)\}$

1b) Definizione dei range delle 3 variabili:

$\theta(t)$ range $[-90 \ +90]$ gradi
 $\theta'(t)$ range $(-\infty \ +\infty)$ gradi/s
 $F(t)$ range $[-25 \ +25]$ N



A.A. 2024-2025

10/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: classi fuzzy



2) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy:

- a) Definizione delle classi fuzzy.
- b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza.

**Esempio di
classi fuzzy:**

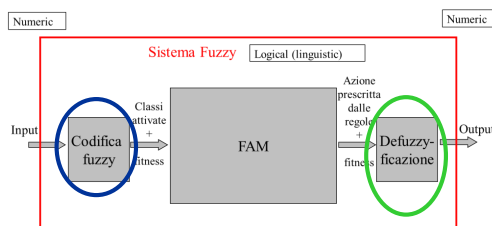
NL: Molto negativo (“negative large”)
NM: Mediamente negativo
NS: Poco negativo (“negative small”)
ZE: Zero
PS: Poco positivo
PM: Mediamente positivo
PL: Molto positivo



FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza



2b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza per ciascuna variabile fuzzy (di input e di output).

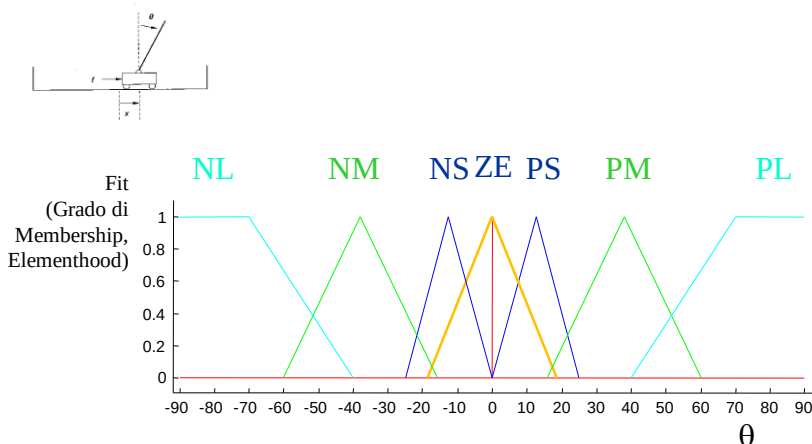


Le regioni sono solitamente triangolari o trapezoidali. Sovrapposizione, empiricamente 25%.

NB Le regioni sono più strette intorno allo 0, per avere una maggiore risoluzione e precisione.



FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per l'orientamento



Classi più dense intorno allo 0 dove il controllo deve essere più accurato

Bilanciamento tra crisp e ridondanza

A.A. 2024-2025

13/40

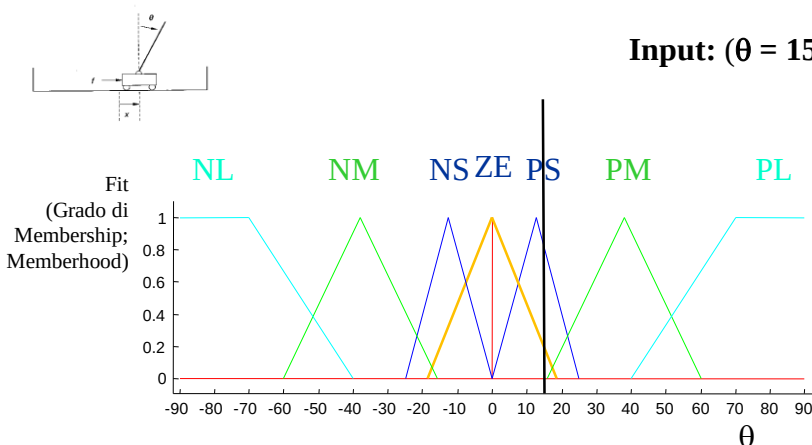
<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per l'orientamento



Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)



Classi attivate:

PS – grado di fit 0.8

ZE – grado di fit 0.2

Classi definite sul supporto di θ

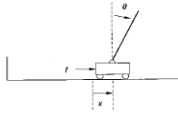
A.A. 2024-2025

14/40

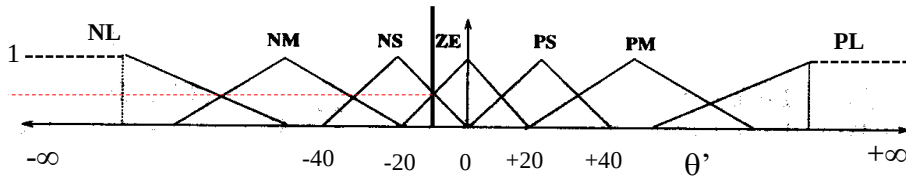
<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per velocità angolare



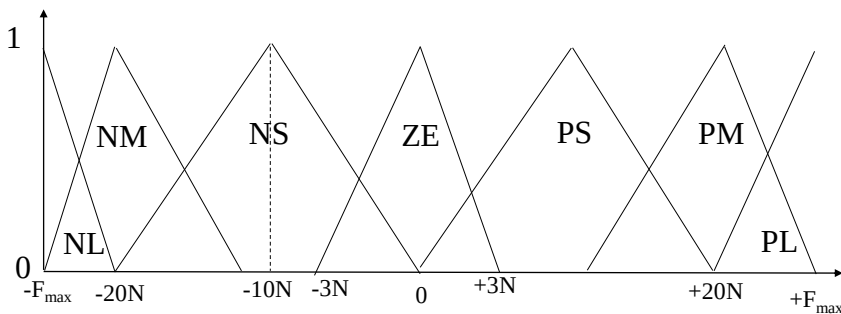
Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)



Classi attivate:
NS – grado di fit 0.5
ZE – grado di fit 0.5

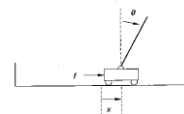


Fuzzyficazione dell'output



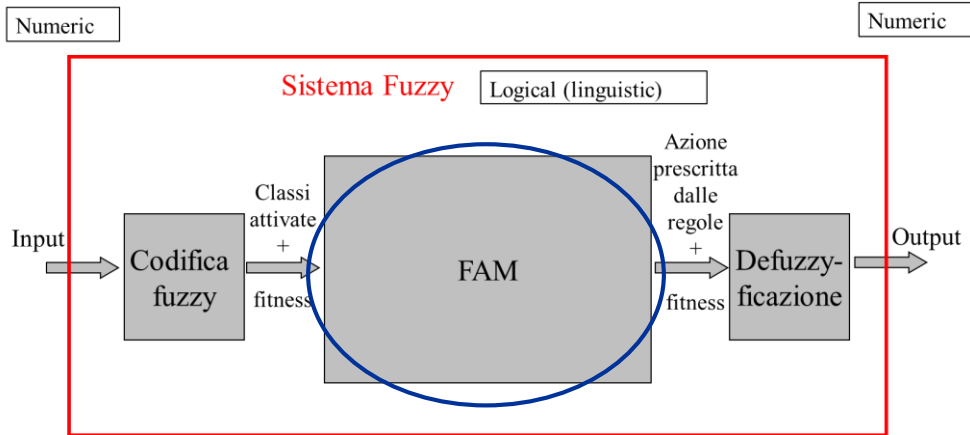
Considero 7 classi anche per questa variabile: $F(t)$.

$$F(t) = f(\theta(t), \theta'(t))$$





FAM per il cart-pole



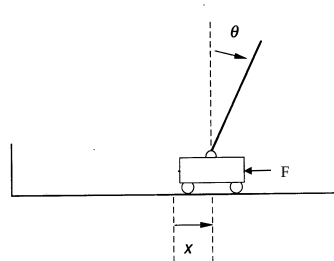
Le regole nella FAM

Una delle possibili **regole** della FAM può essere: (NM, ZE; PM).

if ($\theta == \text{NM}$ AND $\theta' == \text{ZE}$) then $F = \text{PM}$

Determino $F (= F_{\text{PM}})$ a partire da $\theta (= \theta_{\text{NM}})$ e $\theta' (= \theta'_{\text{ZE}})$.

if <l'orientamento del pendolo è negativa media> **and**
<la velocità di rotazione è circa nulla>
allora
<il motore dovrà fornire una forza di spinta positiva media>



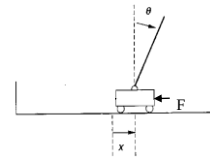
Le singole variabili non possono essere analizzate singolarmente, ma deve essere analizzata una loro combinazione.



FAM per il cart-pole: costruzione grafica della relazione I/O



θ		θ						
θ		NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
θ'	NL				PL			
	NM				PM			
	NS				PS	NS		
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
	PS			PS	NS			
	PM				NM			
	PL				NL			



Codifichiamo 15 regole delle 49 possibili.

La tabella rappresenta una superficie in R^3 .

Riduciamo la matematica ad un **discorso linguistico intuitivo**. Questo è particolarmente interessante quando si vuole trasferire della **conoscenza**, che di per sé viene espressa in **termini linguistici** (e non matematici)!

A.A. 2024-2025

19/40

<http://borgnese.di.unimi.it/>

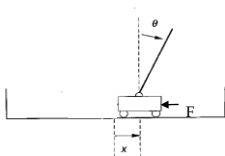


FAM per il cart-pole: Classi relative alla posizione attivate

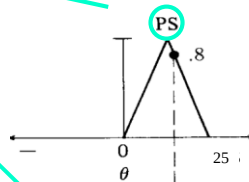


θ		NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
θ'	NL				PL			
	NM				PM			
	NS				PS	NS		
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
	PS			PS	NS			
	PM				NM			
	PL				NL			

Vengono considerate tutte le classi della velocità per ognuna delle classi di posizione attivate.

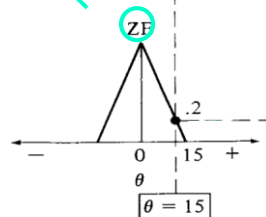


Posizione



Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)

fit 0.8



fit 0.2

C'è anche la velocità angolare da considerare

A.A. 2024-2025

20/40

<http://borgnese.di.unimi.it/>

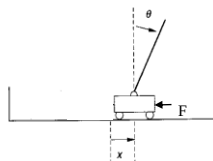


FAM per il cart-pole: classi relative alla velocità attivate



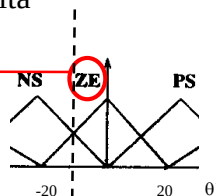
θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS			
ZE	PL	PM	PS	ZE	NM	NL	
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Vengono considerate tutte le classi della posizione per ognuna delle classi di velocità attivate.

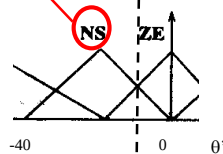


Velocità

Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)



fit 0.5



fit 0.5

A.A. 2024-2025

21/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: le regole fuzzy attivate



θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS			
ZE	PL	PM	PS	ZE	NM	NL	
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)

Regole attivate:

(PS, ZE; NS) ($\min(0.8, 0.5) = 0.5$)

(ZE, ZE; ZE) ($\min(0.2, 0.5) = 0.2$)

(PS, NS; NS) ($\min(0.8, 0.5) = 0.5$)

(ZE, NS; PS) ($\min(0.2, 0.5) = 0.2$)

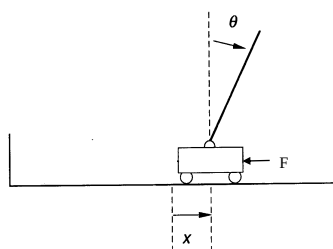
If ($\theta == PS$) **AND** ($\theta' == ZE$) then F = NS

If ($\theta == ZE$) **AND** ($\theta' == ZE$) then F = ZE

If ($\theta == PS$) **AND** ($\theta' == NS$) then F = NS

If ($\theta == ZE$) **AND** ($\theta' == NS$) then F = PS

Si selezionano solo 4 insiemi che sono quelli associati alle combinazioni di classi attivate



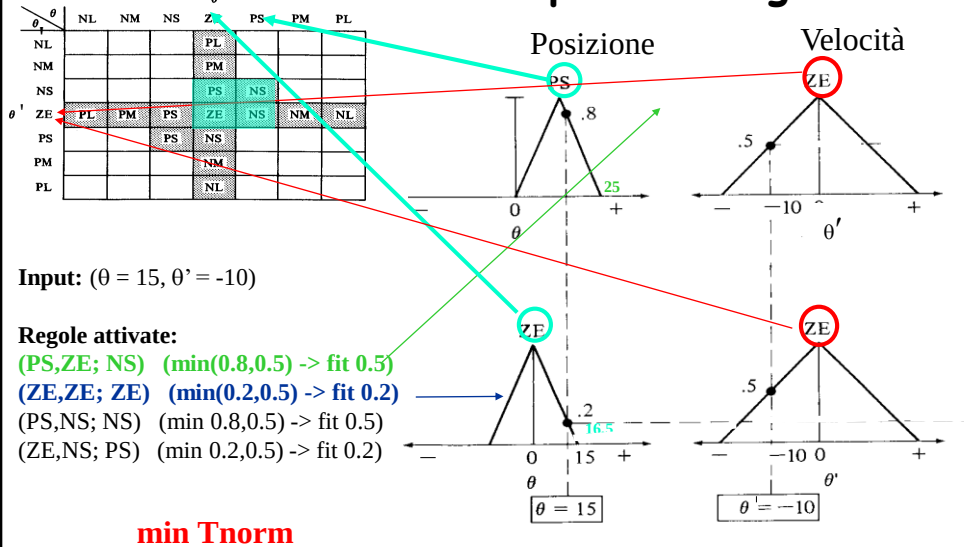
A.A. 2024-2025

22/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: grado di attivazione delle prime 2 regole



A.A. 2024-2025

23/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: output prodotto dalla prima regola



θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
θ'							
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Input: $(\theta = 15, \theta' = -10)$

Regola attivata:

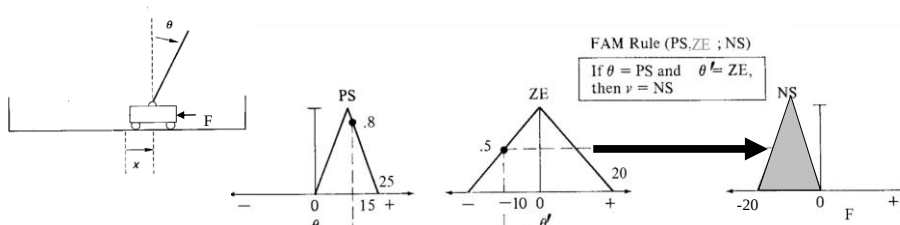
(PS, ZE; NS)

Peso della regola:

(0.8, 0.5; 0.5)

AND!!

(min)



Fit dell'output F_{NS} .

Grado di fit della classe $F_{NS} = 0.5$

A.A. 2024-2025

24/40

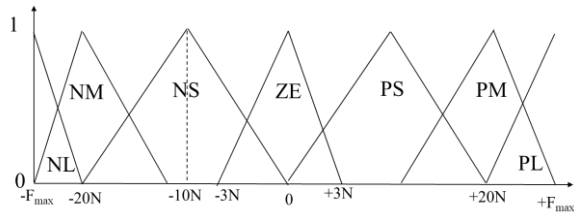
<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: output prodotto



θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
θ'							
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			



Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)

Regole attivate:

(PS, ZE; NS) ($\min(0.8, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.5$)

(ZE, ZE; ZE) ($\min(0.2, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.2$)

(PS, NS; NS) ($\min(0.8, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.5$)

(ZE, NS; PS) ($\min(0.2, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.2$)

$F_{\text{out}} = \text{NS grado di fit } 0.5$

$F_{\text{out}} = \text{ZE grado di fit } 0.2$

$F_{\text{out}} = \text{NS grado di fit } 0.5$

$F_{\text{out}} = \text{PS grado di fit } 0.2$

$F_{\text{NS}} = -10 \text{ N}$

$F_{\text{ZE}} = 0 \text{ N}$

$F_{\text{NS}} = -10 \text{ N}$

$F_{\text{PS}} = +10 \text{ N}$



Defuzzyficazione delle 4 regole attivate: metodo del massimo



Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)

Regole attivate:

(PS, ZE; NS) ($\min(0.8, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.5$)

(ZE, ZE; ZE) ($\min(0.2, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.2$)

(PS, NS; NS) ($\min(0.8, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.5$)

(ZE, NS; PS) ($\min(0.2, 0.5) \rightarrow \text{fit } 0.2$)

$F_{\text{out}} = \text{NS grado di fit } 0.5$

$F_{\text{out}} = \text{ZE grado di fit } 0.2$

$F_{\text{out}} = \text{NS grado di fit } 0.5$

$F_{\text{out}} = \text{PS grado di fit } 0.2$

$F_{\text{NS}} = -10 \text{ N}$

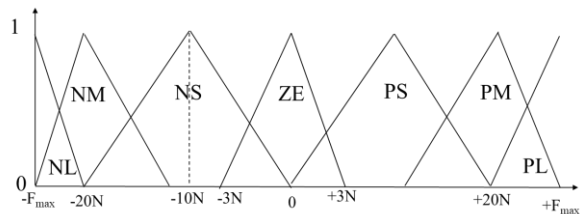
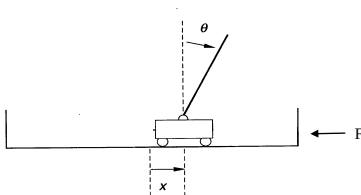
$F_{\text{ZE}} = 0 \text{ N}$

$F_{\text{NS}} = -10 \text{ N}$

$F_{\text{PS}} = +10 \text{ N}$

Scelgo come output la classe NS, se avessi attive due classi con lo stesso grado di fit devo operare una scelta.

In questo caso, scelgo la classe NS per la forza in uscita: $F = -10 \text{ N} = F_{\text{NS}}$





Defuzzyficazione delle 4 regole attivate: metodo del baricentro



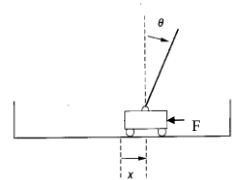
Input: ($\theta = 15$, $\theta' = -10$)

Regole attivate:

(PS,ZE; NS)	($\min(0.8,0.5) \rightarrow \text{fit } 0.5$)	$F_{\text{out}} = \text{NS grado di fit } 0.5$	$F_{\text{NS}} = -10 \text{ N}$
(ZE,ZE; ZE)	($\min(0.2,0.5) \rightarrow \text{fit } 0.2$)	$F_{\text{out}} = \text{ZE grado di fit } 0.2$	$F_{\text{ZE}} = 0 \text{ N}$
(PS,NS; NS)	($\min 0.8,0.5 \rightarrow \text{fit } 0.5$)	$F_{\text{out}} = \text{NS grado di fit } 0.5$	$F_{\text{NS}} = -10 \text{ N}$
(ZE,NS; PS)	($\min 0.2,0.5 \rightarrow \text{fit } 0.2$)	$F_{\text{out}} = \text{PS grado di fit } 0.2$	$F_{\text{PS}} = +10 \text{ N}$

Scelgo come output il baricentro, o media pesata con le fit, delle azioni.

$$Y = \frac{(0 \cdot 0.2 - 10 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.2) \text{ N}}{0.2 + 0.5 + 0.5 + 0.2} = -\frac{8}{1,4} \text{ N} \approx -5,714 \text{ N}$$



A.A. 2024-2025

27/40



Osservazioni



Metodo del massimo: $Y = -10$

Metodo del baricentro: $Y \approx -5.714$

Metodo del baricentro pesato con le aree: $Y \approx -5.876$

Con il metodo del massimo viene presa una decisione “crisp”, in stile “winner-takes-all”. La regola più forte vince. Variazioni anche piccole degli input possono provocare discontinuità nel momento in cui diventa più forte una regola diversa.

I metodi del baricentro sono più gradualisti. Al variare dell’input, varia gradualmente anche la forza generate perchè varia il grado di appartenenza alle diverse classi.

Quando il baricentro viene pesato con l’area, la variazione di output viene pesata con l’ampiezza della regione racchiusa in ciascuna classe di output.

A.A. 2024-2025

28/40

<http://borghese.di.unimi.it/>

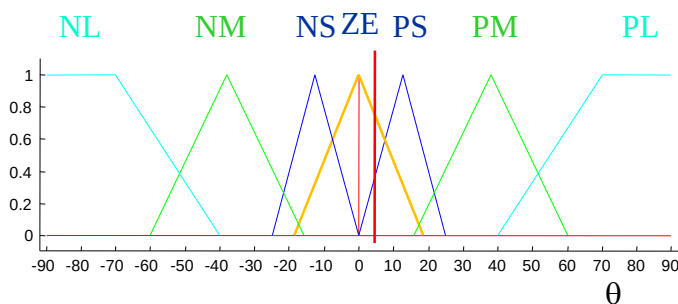


FAM per il cart-pole: palo più verticale

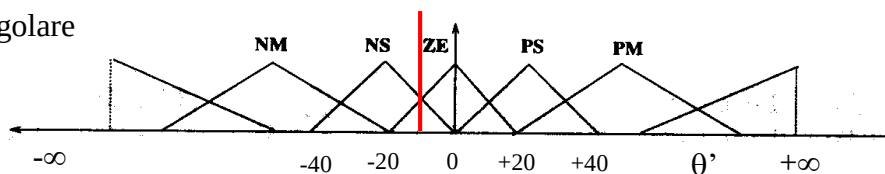


Orientamento

Input: ($\theta = 4$, $\theta' = -10$)



Velocità
angolare



A.A. 2024-2025

29/40

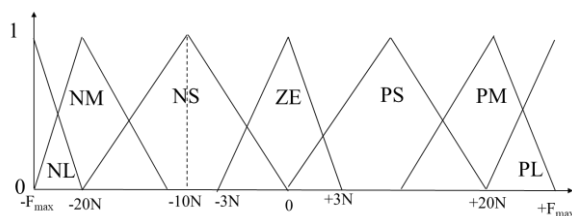
<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: output prodotto



θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			



Input: ($\theta = 4$, $\theta' = -10$)

Regole attivate:

- (PS, ZE; NS) (min(0.2, 0.5) -> fit 0.2)
- (ZE, ZE; ZE) (min(0.8, 0.5) -> fit 0.5)
- (PS, NS; NS) (min 0.2, 0.5) -> fit 0.2)
- (ZE, NS; PS) (min 0.8, 0.5) -> fit 0.5)

$F_{out} = NS$ grado di fit 0.2

$F_{out} = ZE$ grado di fit 0.5

$F_{out} = NS$ grado di fit 0.2

$F_{out} = PS$ grado di fit 0.5

$F_{NS} = -10$ N

$F_{ZE} = 0$ N

$F_{NS} = -10$ N

$F_{PS} = +10$ N

A.A. 2024-2025

30/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



FAM per il cart-pole: palo più verticale



θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Input: ($\theta = 4$, $\theta' = -10$)

Regole attivate:

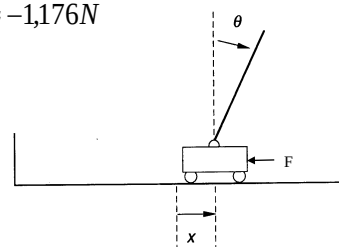
(PS, ZE; NS) (grado 0.2)

(ZE, ZE; ZE) (grado 0.5)

(PS, NS; NS) (grado 0.5)

(ZE, NS; PS) (grado 0.5)

$$F = \frac{(-10 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5)N}{0.2 + 0.5 + 0.5 + 0.5} = -\frac{2}{1.7}N \approx -1.176N$$



A.A. 2024-2025

31/40



FAM basate sull'analisi di più variabili



Più classi composte, attivate contemporaneamente.

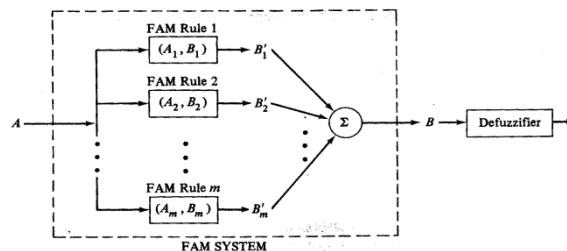
1. IF (... AND ... AND ... AND) THEN
2. IF (... AND ... OR ... AND) THEN
-

IF (ESPRESSIONE_LOGICA) THEN

1. Un dato di input, A, avrà una certa fit rispetto alle classi fuzzy in cui viene suddivisa la variabile associata a quell'input.

2. Le fit associate agli argomenti delle regole vengono combinate con AND (minimo) e OR (massimo) utilizzando le T-norm.

3. La combinazione avrà una sua fit: fit della regola.



Ogni combinazione attiva una proposizione della FAM.
Più combinazioni possono essere attive.

A.A. 2024-2025

32/40

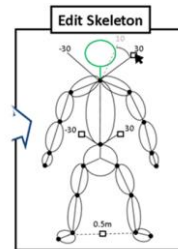
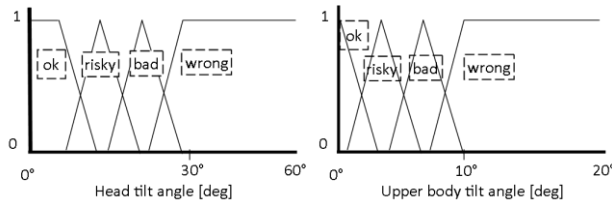
<http://borghese.di.unimi.it/>



Tele-rehabilitation



- Defining the level of risk inside the hospital for that patient:



- Implementation of a in-game feed-back
- through color coding:



A.A. 2024-2025

33/40



Banco di FAM



Generalizzazione naturale ai sistemi multi-output.
Ciascuna variabile di uscita è generata da una FAM diversa.

Esempio relativo al cart-pole.

Sia A l'input (stato del sistema, 4 variabili), e B l'output (la forza, ed il momento, 2 variabili), avremo 2 FAM del tipo: (A_i, B_i) , dove ciascuna FAM ha 4 variabili di ingresso e 1 di uscita. Ciascuna FAM implementa le sue regole indipendenti.

Queste FAM parziali sono dette ***elementari o minime***.

Il numero di FAM cresce velocemente con il numero di variabili in uscita (e così il numero di regole).

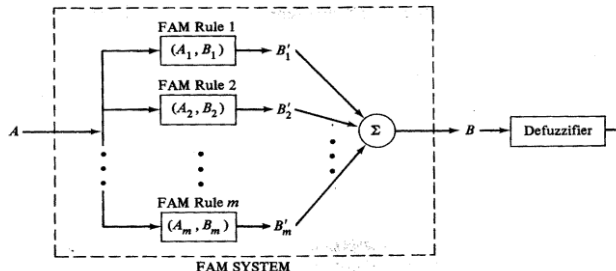
A.A. 2024-2025

34/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



Progettazione di un sistema fuzzy: struttura

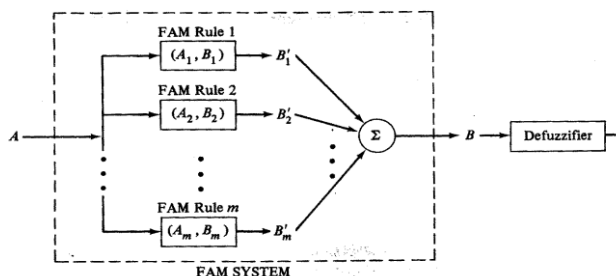


Per tutti i modelli

- 1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
- 2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
- 3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole logiche: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input attive è possibile definire una classe di output (FAM).
- 4) Modalità di de-fuzzyficazione.



Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).



Riflessioni



- Da dove viene la conoscenza?
- Come si può tradurre la conoscenza in regole?
- Come si possono tarare le membership function?
- Quale vantaggio c'è a defuzzificare utilizzando la media pesata invece della massima fit nel calcolo dell'uscita di un sistema fuzzy?
- Crescita esponenziale del numero di stati con il numero di variabili di input (7^N in questo caso).

		θ							
θ'	θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL	
	NL				PL				
	NM				PM				
	NS				PS	NS			
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL	
	PS			PS	NS				
	PM				NM				
	PL				NL				



Esempi



Si vuole realizzare un sistema di controllo fuzzy della frenata per un treno della metropolitana milanese. Il sistema deve essere in grado di erogare la forza frenante in modo tale che il treno si arresti al punto giusto, indipendentemente dal numero di passeggeri (indipendentemente dal carico). Si ha a disposizione la distanza rispetto al punto di frenata, in metri. Definire le variabili di ingresso e di uscita del sistema di controllo della frenata. Progettare il sistema di controllo fuzzy e definire almeno 4 regole di inferenza che agiscano sulle variabili di ingresso fuzzyficate.

Come si può tenere conto del confort dei passeggeri?

Implementazione di un controllore di temperatura che agisce su un fornello.



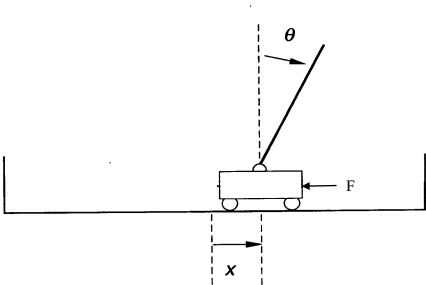
Fuzzy Logic and Games



- Space invaders
- Pong



Esercitazione sui sistemi fuzzy



		θ						
θ'	θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
	NL				PL			
	NM				PM			
	NS				PS	NS		
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
	PS			PS	NS			
	PM				NM			
	PL				NL			