

Sistemi Intelligenti Clustering

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it



A.A. 2020-2021

1/57

<http://borghese.di.unimi.it>



Riassunto

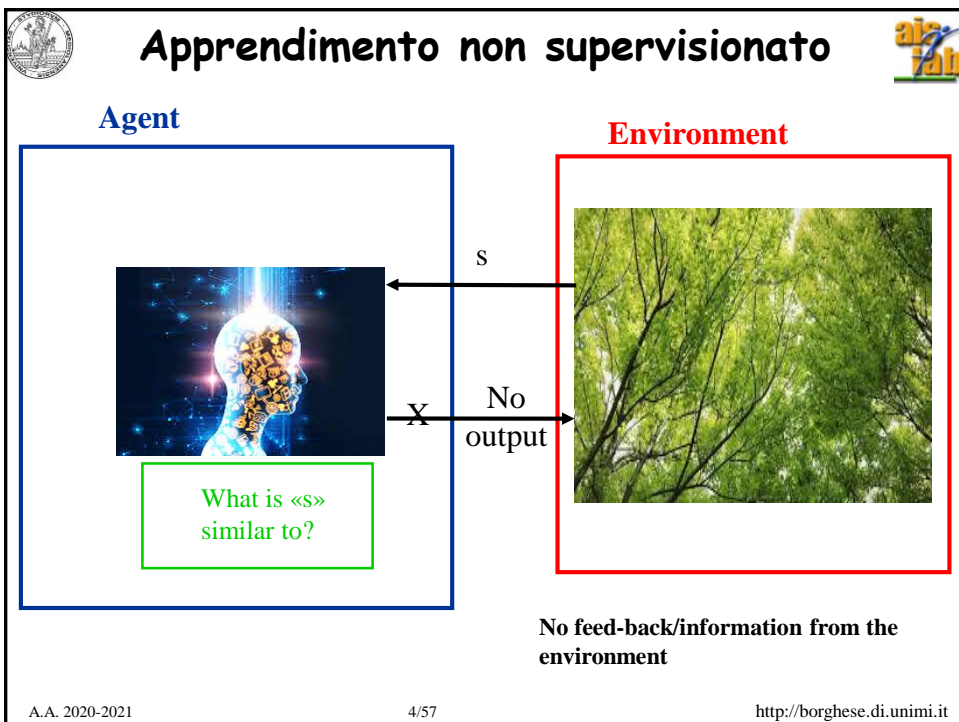
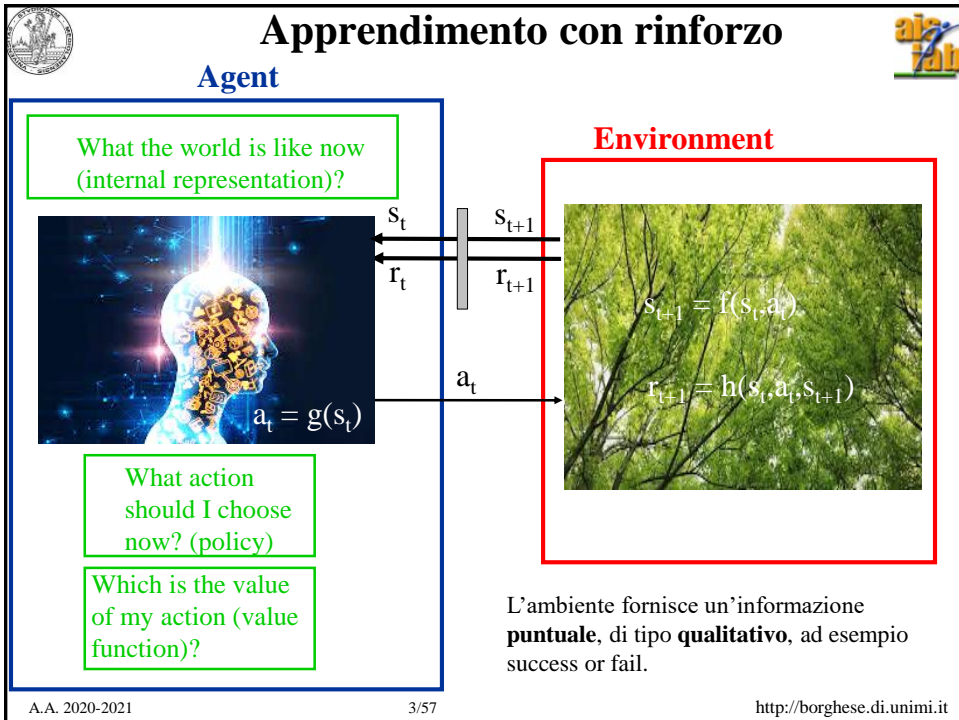


- **Il clustering e le feature**
- Clustering gerarchico
- Clustering partitivo

A.A. 2020-2021

2/57

<http://borghese.di.unimi.it>





Il clustering per...

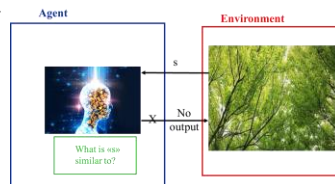
... Confermare ipotesi sui dati (es. “E’ possibile identificare tre diversi tipi di clima in Italia: mediterraneo, continentale, alpino...”);

... Esplorare lo spazio dei dati (es. “Quanti tipi diversi di clima sono presenti in Italia? Quante sfere sono presenti in un’immagine?”);

... Semplificare l’interpretazione dei dati (“Il clima di ogni città d’Italia è approssimativamente mediterraneo, continentale o alpino.”).

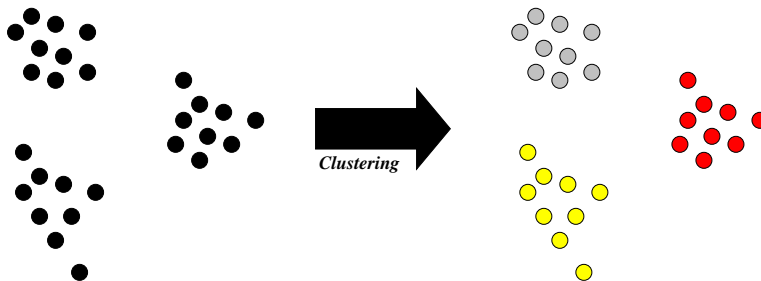
... “Ragionare” sui dati mediante tecniche di Intelligenza Artificiale classica.

Il clustering è la funzionalità concettualmente più “semplice” di un agente, non richiede feed-back dall’ambiente, ma è in realtà molto “difficile”...



Clustering

- Clustering: raggruppamento degli “oggetti” in raggruppamenti omogenei tra loro: **cluster**. Gli oggetti di un cluster sono più “simili” tra loro che a quelli degli altri cluster.
 - ◆ Raggruppamento per colore
 - ◆ Raggruppamento per forme
 - ◆ Raggruppamento per tipi
 - ◆ Raggruppamento per posizione
 - ◆

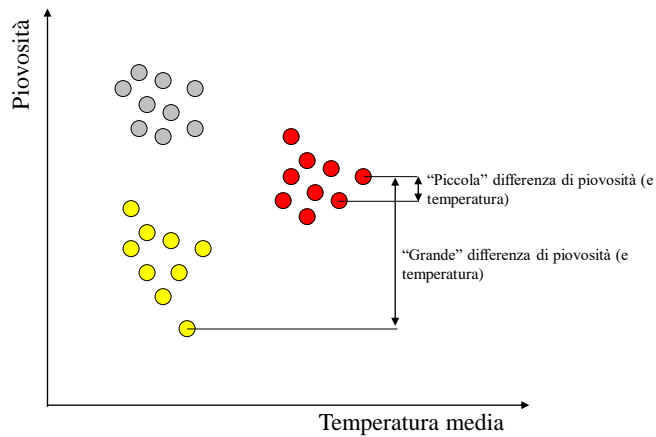


Novel name: **data mining**



Prototipi e cluster

Ciascun cluster può essere rappresentato da un **prototipo** o dagli **elementi stessi** del cluster.
L'elaborazione verrà poi effettuata sui **prototipi** che rappresentano ciascun cluster.



I pattern appartenenti a un cluster valido sono più simili l'uno con l'altro rispetto ai pattern appartenenti ad un cluster differente.



Esempio di clustering



Ricerca immagini su WEB.



Clustering -> Indicizzazione

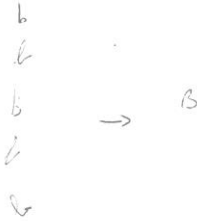
E.g. immagini della regione di Bosa in Sardegna.

Sono immagini simili?



Clustering: features

- **Pattern:** un singolo dato $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_D\}$. Il dato appartiene quindi ad uno spazio multi-dimensionale (D dimensionale), solitamente eterogeneo (e.g. il livello di grigio dei pixel di un'immagine).



Feature: le caratteristiche dei dati significative per il clustering, possono costituire anch'esso un vettore multi-dimensionale (M-dimensionale), il vettore delle feature: $F = \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$. Questo vettore costituisce l'input agli algoritmi di clustering.



E.g. Inclinazione, occhielli, lunghezza, linee orizzontali, archi di cerchio ... => Sistemi di riconoscimento della scrittura. **Feature eterogenee tra loro.**



Features

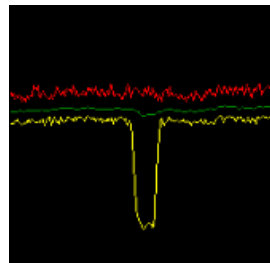
- Globali: livello di luminosità medio, varianza, contenuto in frequenza.....
- **Feature locali**



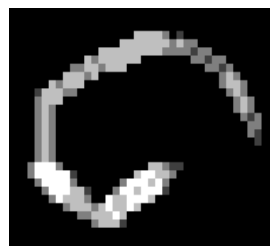
Feature locali

- *Località.*
- *Significatività.*
- *Rinoscibilità.*

Macchie
dense



Fili



Total quality control
assessment through
boosting (Fomasi,
Borghese 2015)



Clustering: definizioni

- **Pattern:** D - dimensione dello spazio dei pattern $\{x_i\}$ presentati dall'ambiente;
- **Feature:** M - dimensione dello spazio delle feature $\{f_j\}$;
- **Cluster:** in generale, insieme che raggruppa dati simili tra loro, valutati in base alle feature;
- **Funzione di similarità o distanza:** una metrica (o quasi metrica) nello spazio delle feature, usata per quantificare la similarità tra due pattern.
- **Algoritmo:** scelta di come effettuare il clustering (motore di clustering).

Tante possibilità di scelta → risultati diversi...



Feature selection

- La similarità tra dati viene valutata attraverso le feature.
- Feature selection: identificazione delle feature più significative per la descrizione dei pattern.

Esempio: descrizione del **clima** della città di Roma mediante feature. Roma è caratterizzata da: [17°; 500mm; 1.500.000 ab., 300 chiese]

- Quali feature scegliere?
- Come valutare le feature?
 - ◆ Analisi statistica del potere discriminante: correlazione tra feature e loro significatività per il clustering.



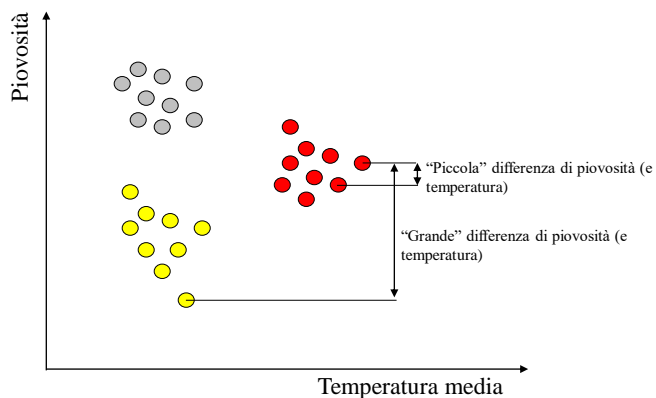
Similarità tra feature

- Definizione di una **misura di dissimilarità (distanza) tra due features**;

Esempio: distanza euclidea:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\text{Roma}, \text{Milano}) &= \text{dist}([17^\circ; 500\text{mm}], [13^\circ; 900\text{mm}]) = \dots \\ &= \dots \text{Distanza euclidea?} = ((17-13)^2 + (500-900)^2)^{1/2} = 400.02 \sim 400 \end{aligned}$$

Ha senso?





Normalizzazione feature



E' necessario trovare una metrica corretta per la rappresentazione dei dati. Ad esempio, normalizzare le feature!

$$T_{\text{Max}} = 20^\circ \quad T_{\text{Min}} = 5^\circ \rightarrow T_{\text{Norm}} = (T - T_{\text{Min}}) / (T_{\text{Max}} - T_{\text{Min}})$$

$$P_{\text{Max}} = 1000\text{mm} \quad P_{\text{Min}} = 0\text{mm} \rightarrow P_{\text{Norm}} = (P - P_{\text{Min}}) / (P_{\text{Max}} - P_{\text{Min}})$$

Feature normalizzate: Roma_{Norm} = [0.8 0.5]

Feature normalizzate: Milano_{Norm} = [0.53 0.9]

$$\text{dist}(\text{Roma}_{\text{Norm}}, \text{Milano}_{\text{Norm}}) = ((0.8-0.53)^2 + (0.5-0.9)^2)^{1/2} = 0.4826$$

E' una distanza compresa tra 0 (valore minimo) e 1 (valore massimo)

E' una buona scelta?



Altre funzioni di distanza



- Distanza di Mahalanobis:
 $\text{dist}(x,y) = (x_k - y_k) S^{-1} (x_k - y_k)$, con S matrice di covarianza.
(Normalizzazione mediante covarianza)

Altre metriche:

- Distanza euclidea:
 $\text{dist}(x,y) = [\sum_{k=1..d} (x_k - y_k)^2]^{1/2}$
- Distanza di Minkowski:
 $\text{dist}(x,y) = [\sum_{k=1..d} (x_k - y_k)^p]^{1/p}$

All'aumentare di p aumenta il peso degli outliers,

per $p \rightarrow \infty$ $\text{dist}(x,y) = \max(x,y)$

per $p=1$ Manhattan or city-block distance

per $p=2$ Distance Euclidea

- Context dependent e funzioni di dissimilarità:
 $\text{diss}(x,y) = f(x, y, \text{context})$



Apprendimento non supervisionato



Agent

Environment



s

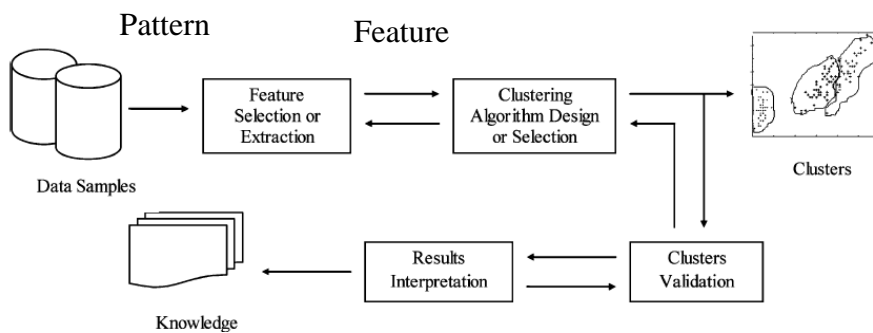
No output

What is «s» similar to?

No feed-back/information from the environment in learning, **but evaluation is on the environment**



Clustering valutazione



Da Xu and Wunsch, 2006

I cluster ottenuti sono significativi?
Il clustering ha operato con successo?

NB i cammini all'indietro consentono di fare la sintonizzazione dei diversi passi



Il clustering - riferimenti



Per una buona review: Xu and Wunsch, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 16, no. 3, 2005, Wiley Publisher 2008.

Il clustering non è di per sé un problema ben posto. Ci sono diversi gradi di libertà da fissare su come effettuare un clustering.

- Rappresentazione dei pattern;
- Calcolo delle feature;
- Definizione di una misura di prossimità dei pattern attraverso le feature;
- Tipo di algoritmo di clustering (gerarchico o partizionale)
- Validazione dell'output (se necessario) -> Testing.

Problema a cui non risponderemo: **quanti cluster?** Soluzione teorica (criterio di Akaike, 1974 and followers, e.g. Vrieze 2012), soluzione empirica (growing networks di Fritzke 1996, Marsland 2002).



Tassonomia (sintetica) degli algoritmi di clustering



- Algoritmi **gerarchici** (agglomerativi, divisivi), e.g. **Hierarchical clustering**. Vengono partizionati (suddivisi in cluster) i dati forniti dall'ambiente.
- Algoritmi **partizionali**, viene indotta una partizione nello spazio dei dati, ogni partizione può essere rappresentata da un **prototipo**.
 - ◆ **hard-clustering: K-means, quad-tree decomposition.**
 - ◆ **soft-clustering:** competitive clustering, fuzzy c-mean, neural-gas, enhanced vector quantization, **mappe di Kohonen**.
 - ◆ Algoritmi statistici: **mixture models** (misure statistiche: combinazione lineare di densità di probabilità).



Riassunto



- Il clustering e le feature
- **Clustering gerarchico**
- Clustering partitivo



Hierarchical Clustering



- In brief, HC algorithms build a whole **hierarchy** of clustering solutions
 - ◆ Solution at level k is a *refinement* of solution at level $k-1$
 - ◆ Recursive subdivision / merging of cluster
- Two main classes of HC approaches:
 - ◆ Agglomerative: solution at level k is obtained from solution at level $k-1$ by merging two clusters
 - ◆ Divisive: solution at level k is obtained from solution at level $k-1$ by splitting a cluster into two parts
 - Less used because of computational load



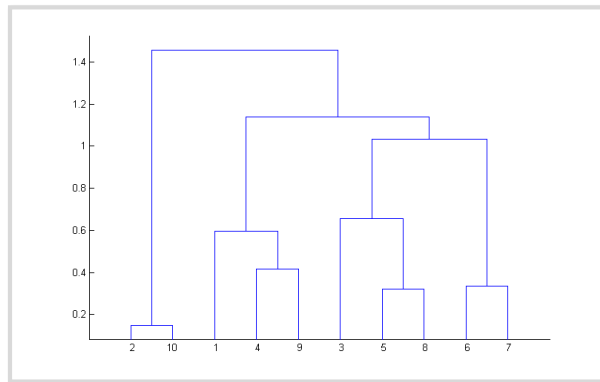
The 3 steps of agglomerative clustering



1. At start, each input pattern is assigned to a singleton cluster
2. At each step, the two *closest* clusters are merged into one
 - ◆ So the number of clusters is decreased by one at each step
3. At the last step, only one cluster is obtained

The clustering process is represented by a *dendrogram*

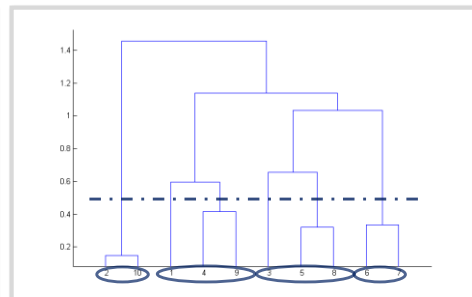
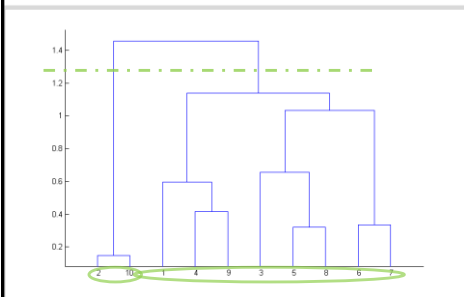
From as many cluster as the data to 1 cluster



How to obtain the final solution



- The resulting dendrogram has to be cut at some level to get the final clustering:
 - ◆ Cut criteria: number of desired clusters, or threshold on some features of resulting clusters





Merging clusters

- ◆ Each cluster is characterized by its elements
- ◆ Computation of the intra-class and inter-cluster dissimilarity
- ◆ Choose **2 clusters** to be merged that have minimal inter-cluster dissimilarity.



Criterion to choose clusters to be merged

- Different indexes of **dissimilarity**, $d(x,y)$ (*point wise*) ...
 - ◆ E.g. Euclidean, city-block, correlation, Mahalanobis,...
- ... and agglomeration criteria: Merge clusters C_i and C_j such that $diss(i, j)$ is minimum (*cluster wise*)
 - ◆ Single linkage:
 - $diss(i,j) = \min d(x, y)$, where x is in cluster C_i , y in cluster C_j
 - ◆ Complete linkage:
 - $diss(i,j) = \max d(x, y)$, where x is in cluster C_i , y in cluster C_j
 - ◆ Group Average (GA) and Weighted Average (WA) Linkage:
 - $diss(i,j) = \frac{\sum_{x \in C_i} \sum_{y \in C_j} w_i w_j d(x, y)}{\sum_{x \in C_i} w_i \sum_{y \in C_j} w_j}$

GA: $w_i = w_j = 1$

WA: $w_i = n_i, w_j = n_j$



Other criteria



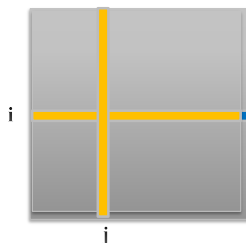
- Other agglomeration criteria: Merge clusters C_i and C_j such that $diss(i, j)$ is minimum
 - ◆ Centroid Linkage:
 - ☞ $diss(i, j) = d(\mu_i, \mu_j)$ where μ_i is the centroid of cluster C_i , μ_j of cluster C_j
 - ◆ Median Linkage:
 - ☞ $diss(i, j) = d(\text{center}_i, \text{center}_j)$, where center_i is the median of the elements of C_i ,
 - ◆ Ward's Method:
 - ☞ $diss(i, j) =$ increase in the **total error sum of squares** (ESS) due to the merging of C_i and C_j (minimum increase in variance)
- Single, complete, and average linkage: *graph methods*
 - ◆ All points in clusters are considered
- Centroid, median, and Ward's linkage: *geometric methods*
 - ◆ Clusters are summed up by their centers



How HC operates



- HC algorithms operate on a dissimilarity matrix:
 - ◆ For each pair of existent clusters, their dissimilarity value is stored (e.g. minimum, maximum, increase in ESS...)
- When clusters C_i and C_j are merged, only dissimilarities for the new resulting cluster have to be computed
 - ◆ The rest of the matrix is left untouched





The Lance-William recursive formulation



Used for iterative implementation. The dissimilarity value between newly formed cluster $\{C_i, C_j\}$ and every other cluster C_k is computed as:

$$diss(k, (i, j)) = \alpha_i diss(k, i) + \alpha_j diss(k, j) + \beta diss(i, j) + \gamma |diss(k, i) - diss(k, j)|$$

Only values already stored in the dissimilarity matrix are used. Different sets of coefficients correspond to different criteria.

Criterion	α_i	α_j	β	γ
Single Link.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Complete Link.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Group Avg.	$\frac{n_i}{(n_i+n_j)}$	$\frac{n_j}{(n_i+n_j)}$	0	0
Weighted Avg.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
Centroid	$\frac{n_i}{(n_i+n_j)}$	$\frac{n_j}{(n_i+n_j)}$	$-\frac{n_i n_j}{(n_i+n_j)^2}$	0
Median	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
Ward	$\frac{(n_i+n_k)}{(n_i+n_j+n_k)}$	$\frac{(n_j+n_k)}{(n_i+n_j+n_k)}$	$-\frac{n_k}{(n_i+n_j+n_k)}$	0



Characteristics of HC



- Pros:
 - ◆ Independence from initialization
 - ◆ No need to specify a desired number of clusters from the beginning
- Cons:
 - ◆ Computational complexity at least $O(N^2)$
 - ◆ Sensitivity to outliers
 - ◆ No reconsideration of possibly misclassified points
 - ◆ Possibility of inversion phenomena and multiple solutions
 - ◆ Ties can induce different clustering



Riassunto



- Il clustering e le feature
- Clustering gerarchico
- **Clustering partitivo**



Clustering



- Dati, $\{X_1 \dots X_N\} \in \mathbb{R}^D$
- Cluster $\{C_1 \dots C_M\} \rightarrow \{P_1 \dots P_M\} \in \mathbb{R}^D$

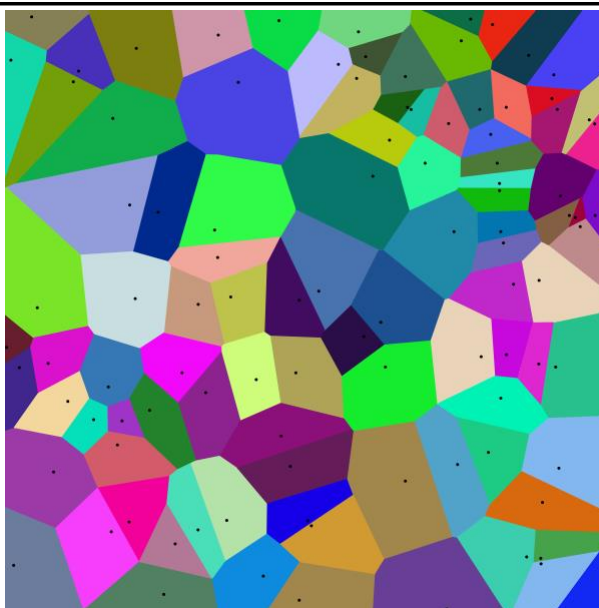
P_j is the **prototype** of cluster j , it belongs to the same D -dimensional space of the data and it represents the set of data inside its cluster.

To cluster the data:

- The set of data inside each cluster has to be determined as the data that are most similar among them (the boundary of a cluster is implicitly defined)
- Data can be analysed through their features.



Risultato del clustering è un diagramma di Voronoj



I poligoni azzurri rappresentano i diversi cluster ottenuti. Ogni punto marcato all'interno del cluster (cluster center) è rappresentativo di tutti i punti del cluster

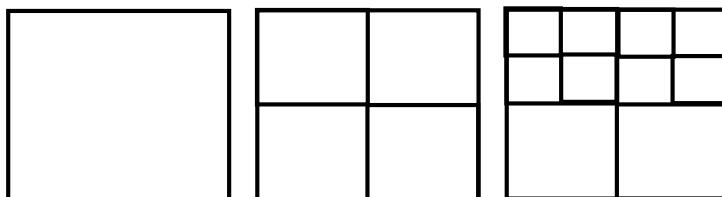


Algoritmi gerarchici divisivi: QTD (Quad Tree Decomposition)



Quad è una struttura regolare (quadrato) che contiene i dati che vengono analizzati. Si parte da un quad che contiene tutti i dati e che funge da unico cluster.

- Suddivisione gerarchica dello spazio delle feature, mediante suddivisione regolare (**splitting**) dei cluster;
- Criterio di splitting (**criterio di similarità** intra e inter cluster).
- Si crea un albero di quad.



Per spazi tridimensionali si ha octree decomposition, e decomposizione in iper-cubi.



Esempio di algoritmi gerarchici: QTD



- Clusterizzazione immagini RGB, 512x512;
- Pattern: pixel (x,y);
- Feature: canali [R, G, B] per ogni pixel.
- Definizione della distanza tra due pattern (massima sui tre canali):

$\text{dist}(p1, p2) =$

$\text{dist} ([R1 \ G1 \ B1], [R2 \ G2 \ B2]) =$

$\max (|R1-R2|, |G1-G2|, |B1-B2|).$



Splitting



In un quad, i pixel assumono 3 valori RGB pari a:

$p1 = [0 \ 100 \ 250]$

$p2 = [50 \ 100 \ 200]$

$p3 = [255 \ 150 \ 50]$

dobbiamo suddividere il quad?

$\text{dist} (p1, p2) = \text{dist} ([R1 \ G1 \ B1], [R2 \ G2 \ B2]) =$

$\max (|R1-R2|, |G1-G2|, |B1-B2|) = \max([50 \ 0 \ 50]) = 50.$

$\text{dist} (p2, p3) = 205.$

$\text{dist} (p3, p1) = 255.$

Criterio di splitting: se due pixel all'interno dello stesso cluster distano più di una determinata soglia, il cluster viene diviso in 4 cluster.

Esempio applicazione: segmentazione immagini, compressione immagini, analisi locale frequenze immagini...



QTD: Risultati

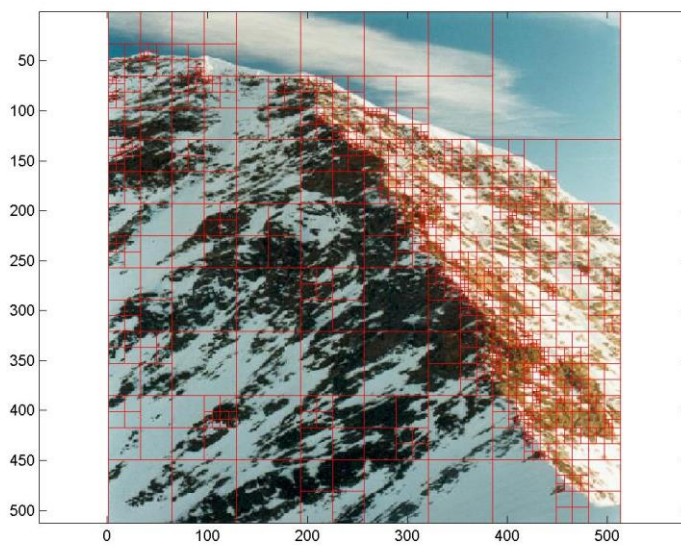


Original

Clusterized



QTD: Risultati





QTD: Risultati



Original

Clusterized



K-means (partitional): framework



- Siano $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_D$ i dati di addestramento oppure le feature estratte (per semplicità, definiti in \mathbb{R}^2);
- Siano $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_K$ i *prototipi* di K cluster, definiti anch'essi in \mathbb{R}^2 ; ogni *prototipo* identifica il cluster corrispondente;
- Lo schema di assegnamento adottato sia il seguente: “ \mathbf{X}_i appartiene a \mathbf{C}_j se e solo se \mathbf{C}_j è il *prototipo* più vicino a \mathbf{X}_i (distanza euclidea)”;
- L'algoritmo di addestramento permette di determinare le posizioni dei *prototipi* \mathbf{C}_j mediante successive approssimazioni (iterazioni)



Algoritmo K-means



L'obiettivo che l'algoritmo si prepone è di **minimizzare la varianza totale intra-cluster**.

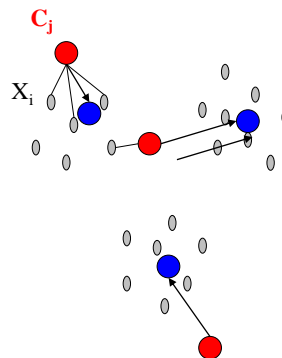
Ogni cluster viene identificato mediante un centroide o punto medio.

L'algoritmo segue una procedura iterativa.

- Inizialmente crea K partizioni e assegna ad ogni partizione i punti d'ingresso. Quindi calcola il centroide di ogni partizione.
-
- Costruisce quindi una nuova partizione dove i punti all'interno di ogni partizione sono più vicini al prototipo di quella partizione che a quelli delle altre.
- Quindi vengono ricalcolati i centroidi a partire dai dati nelle nuove partizioni.
- Finché i prototipi non subiscono più spostamenti (convergenza)



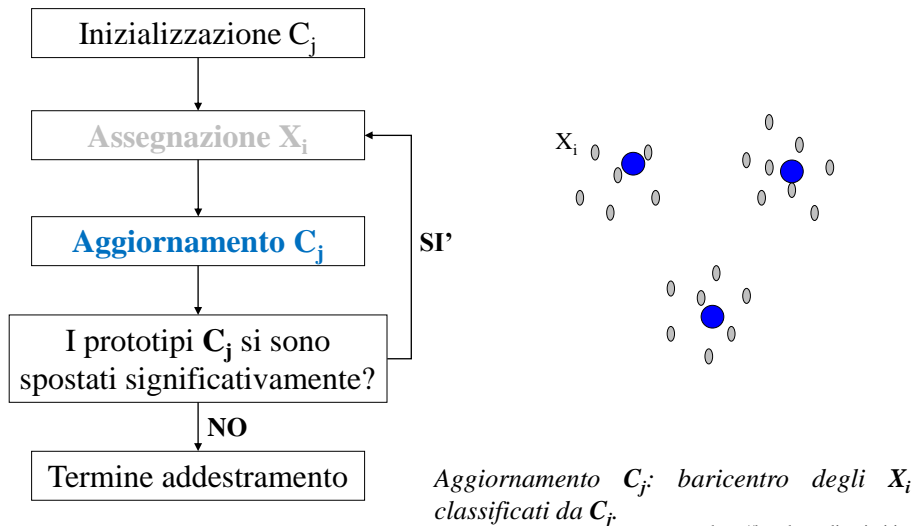
K-means: addestramento



Aggiornamento C_j : baricentro degli X_i classificati da C_j .



K-means: addestramento



Algoritmo K-means::formalizzazione



- Dati N pattern in ingresso $\{x_j\}$ e C_k prototipi che vogliamo diventino i centri dei cluster, x_j e $C_k \in \mathbb{R}^N$. Ciascun cluster identifica una regione nello spazio, P_k .
- Valgono le seguenti proprietà:

$$\bigcup_{k=1}^K P_k = Q \subseteq \mathbb{R}^D \quad \text{I cluster coprono lo spazio delle feature o dei dati}$$

$$\bigcap_{k=1}^K P_k = \emptyset \quad \text{I cluster sono disgiunti.}$$

- $x_j \in C_k$ Se: $\left(\|x_j - C_k\| \right)^2 \leq \left(\|x_j - C_l\| \right)^2 \quad l \neq k$

- La funzione obiettivo soddisfa le proprietà degli spazi normati e metrici. Viene definita in generale come:

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N \left(\|x_{j^{(k)}} - C_k\| \right)^2$$



Algoritmo K-means: dettaglio dei passi



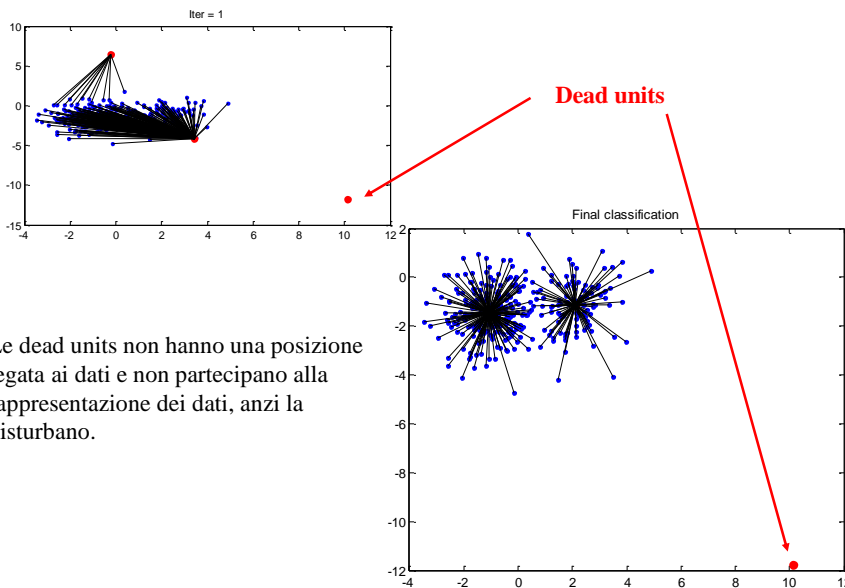
- Inizializzazione.
 - ◆ Posiziono in modo arbitrario o guidato i K centri dei cluster.

- Iterazioni
 - ◆ Assegno ciascun pattern al cluster il cui centro è più vicino, formando così un certo numero di cluster ($\leq K$).
 - ◆ Calcolo la posizione dei cluster, C_k , come baricentro dei pattern assegnati ad ogni cluster, spostando quindi la posizione dei centri dei cluster.

- Condizione di uscita
 - I centri dei cluster non si spostano più.

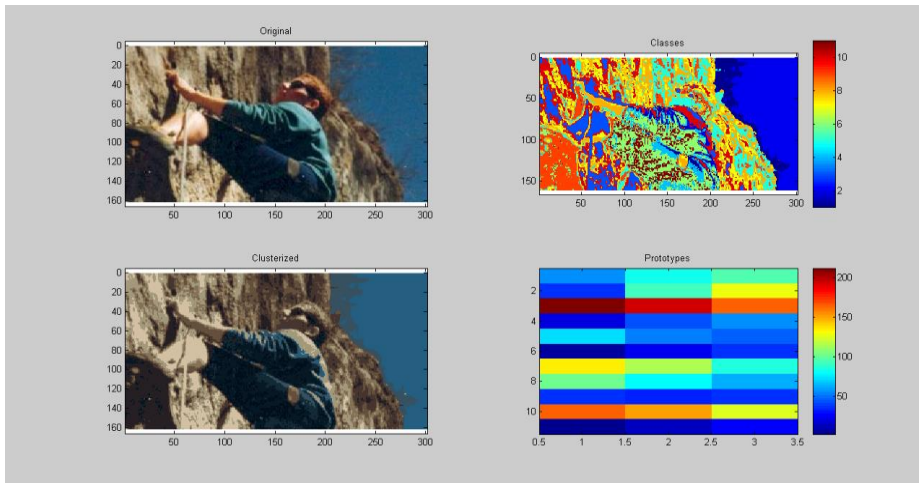


Bad initialization





K-Means per immagine (clustering delle feature: RGB)



Da 255 colori a 33 colori



Principles of soft-clustering



- I centroidi vengono **spostati** e non posizionati
- Lo spostamento dei centroidi avviene analizzando iterativamente tutti i dati
- Per ogni dato vengono spostati tutti i centroidi (un dato appartiene a tutte le partizioni con un grado di appartenenza diverso).
- Lo spostamento viene ridotto via via che l'apprendimento procede



Competitive learning



Definisco per ogni cluster un prototipo (cf. K means)

1) All'interazione k- esima, si presenta al sistema un (1) dato, \mathbf{X}_i ;

2) Aggiornamento di tutti i prototipi $\Delta \mathbf{W}_j$ ("neuroni")

▪ Generalized competitive Learning Rule:

$$\diamond \Delta \mathbf{W}_j = \eta_k \Lambda_k(i,j) (\mathbf{X}_i - \mathbf{W}_j)$$

← AGGIORNAMENTO
PESI (POSIZIONE)
DEI NEURONI

$\Lambda_k(i,j)$ è una funzione "campo recettivo" (regione di influenza del dato \mathbf{X}_i sui prototipi \mathbf{C}_j)

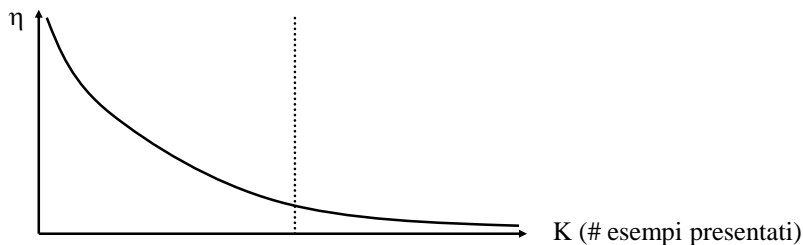
◆ $\Lambda_k(i,j) = \exp(-\|\mathbf{X}_i - \mathbf{W}_j\|^2 / 2\sigma_k^2)$ σ_k determina l'ampiezza del campo recettivo.
= (spazio dei dati)

◆ $\Lambda_k(i,j) = \exp(-|f(\mathbf{X}_i) - f(\mathbf{W}_j)|^2 / 2\sigma_k^2)$
= (spazio delle feature)

ESEMPIO DI
FUNZIONI DI
VICINATO



Learning rate nel tempo

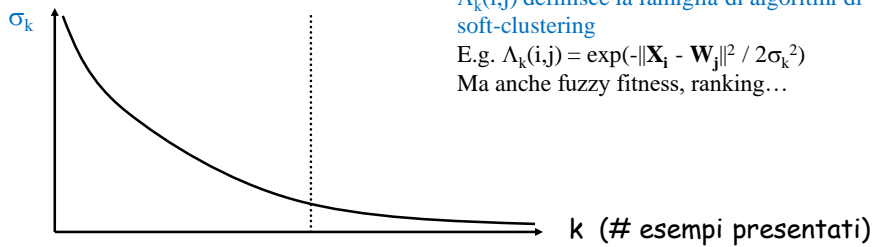


$$\Delta \mathbf{W}_j = \eta_k \Lambda_k(i,j) (\mathbf{X}_i - \mathbf{W}_j)$$

Procedendo nell'addestramento della rete, i pesi dei neuroni perdono la possibilità di muoversi => rete più stabile.



Funzione di vicinato nel tempo



$\Lambda_k(i,j)$ definisce la famiglia di algoritmi di soft-clustering

E.g. $\Lambda_k(i,j) = \exp(-\|X_i - W_j\|^2 / 2\sigma_k^2)$
Ma anche fuzzy fitness, ranking...

$$\Delta W_j = \eta_k \Lambda_k(i,j) (X_i - W_j)$$

Procedendo nell'addestramento della rete, un neurone perde la capacità di spostare i suoi vicini.



Soft-clustering



$$\Delta W_j = \eta_k \Lambda_k(i,j) (X_i - W_j)$$

$\Lambda_k(i,j)$ è l'elemento chiave. I "Campi recettivi" dei diversi neuroni sono parzialmente sovrapposti.

In "Competitive clustering" $\Lambda_k(i,j)$ è una Gaussiana nello spazio dei dati o dei prototipi (mappe di Kohonen).

In "Neural-gas" $\Lambda_k(i,j)$ è una ranking function nello spazio dei dati e dei prototipi.

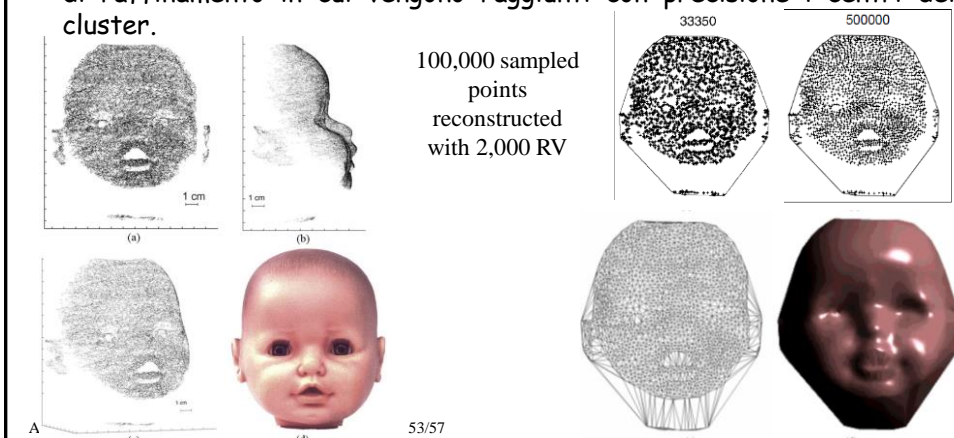
In "Fuzzy c-means" $\Lambda_k(i,j)$ è realizzata mediante membership function nello spazio dei dati.



Competitive learning ("First search then converge")



- 1) **ORDERING PHASE:** η , σ **grandi**; ogni neurone può spostarsi molto verso l'ingresso X_i ; il neurone trascina con sé i vicini; in tale fase la rete si dispiega nello spazio R^N "spargendo" i suoi neuroni.
- 2) **TUNING PHASE:** η , σ **piccoli**; ogni neurone si muove da solo; è una fase di raffinamento in cui vengono raggiunti con precisione i centri dei cluster.



Competitive learning



- Al termine dell'apprendimento, **un (1) dato X_i** viene assegnato al cluster il cui prototipo si trova più vicino.
- Cluster vincente (associazione):

$$j^* \text{ t.c. } \|W_{j^*} - X_i\| = \min_j \|W_j - X_i\|$$



Anche qui viene indotta una tessellazione di Voronoj dallo spazio da tutte le unità vincenti.



I problemi del soft-clustering



Dead-units: sono centroidi che non vengono aggiornati da un certo passo, k , in poi.

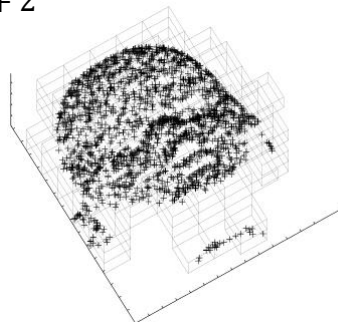
Inizializzazione guidata dai dati.

$$\rho_{\text{Centroid}} \propto \rho_{\text{Data}}^\gamma \quad \gamma = \frac{D}{D+2}$$

Partition of the input space and distribution of the number of centroids inside each box through a partitioning function:

$$M_k = M \frac{N_k^\gamma}{\sum_k N_k^\gamma}$$

Minimi locali.



Caratteristiche del soft-clustering



COMPETITIVE LEARNING. *Apprendimento competitivo. Dato un certo input, le unità **competono** tra loro per “aggiudicarsi” l’input.*

*Questo meccanismo può essere hard. Nel caso estremo: “**winner-take-all**”, “spara” un solo neurone per volta (grandmother cell). Questo è l’approccio del K-means. Oppure può essere soft, le unità raggiungono un grado diverso di “vincita”.*

Winner-take-all → hard approach

More than one winner → soft approach



Riassunto



- Il clustering e le feature
- Clustering gerarchico
- Clustering partitivo