

Sistemi Intelligenti I fuzzy system

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
 Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
 Dipartimento di Informatica
Alberto.borghese@unimi.it



Overview



I fuzzy set

I fuzzy system

| | | θ | | | | | | |
|-----------|----|----------|----|----|----|----|----|----|
| | | NL | NM | NS | ZE | PS | PM | PL |
| θ' | NL | | | | PL | | | |
| | NM | | | | PM | | | |
| | NS | | | | PS | NS | | |
| | ZE | PL | PM | PS | ZE | NS | NM | NL |
| | PS | | | PS | NS | | | |
| | PM | | | | NM | | | |
| | PL | | | | NL | | | |

B. Kosko, Neural Networks and Fuzzy Systems, Prentice Hall.



Incertezza



Le nostre misure, le nostre conoscenze sono affette da incertezza.

- Errore di misura
- Incertezza sulla classificazione
- Incertezza sul verificarsi degli eventi
-



La logica classica



Logica a 2 valori: $A = \{T, F\}$.

La funzione verità $T: \{\text{proposizione}\} \rightarrow \{0, 1\}$ definisce la logica classica e può essere implementata come tabella della verità: descrizione esaustiva del funzionamento della funzione per **tutti** i possibili (discreti) valori in ingresso.

$T(A, B, C, D) = \{\text{True}, \text{False}\}$ nel caso di una funzione a più valori.

Inoltre valgono le proprietà:

$$A \cap A^c = \emptyset$$

(non contraddizione)

$$A = T (\text{True}) \Leftrightarrow A^c = F (\text{False}).$$

(terzo escluso)



Esempio



Se c'è Michela
vado a sciare



© Can Stock Photo - csp41036595

Michela c'è'
Michela = True

Michela non c'è'
Michela = False

Definisco "bene" le situazioni (e.g. partite a scacchi)



Esempio "difficile"



Se è nuvoloso
vado al cinema



Nuvoloso =
Vero?



Nuvoloso =
Falso?

Quanto è nuvoloso?



I Fuzzy set



Nella logica fuzzy, tutto è questione di **gradazione** (più o meno nuvoloso)

Dal punto di vista matematico, fuzzy e' equivalente ad una proposizione logica che può assumere un **numero infinito di valori tra vero e falso**.



La funzione verità generalizzata $T: \{\text{proposizione}\} \rightarrow [0, 1]$ definisce la logica fuzzy.



La funzione verità fuzzy



La funzione verità generalizzata $T: \{\text{proposizione}\} \rightarrow [0, 1]$ definisce la logica fuzzy.

$$A \cap A^c \neq \emptyset$$

Viene violata la legge di non contraddizione (il cielo può essere contemporaneamente nuvoloso e non nuvoloso).

$$A \cup A^c \neq X$$

Viene violata la legge del terzo escluso (oltre a cielo nuvoloso e non nuvoloso esistono altri valori: tutte le gradazione intermedie).



Esempio di Fuzzy set

Costruiamo una montagnetta di granelli di sabbia.

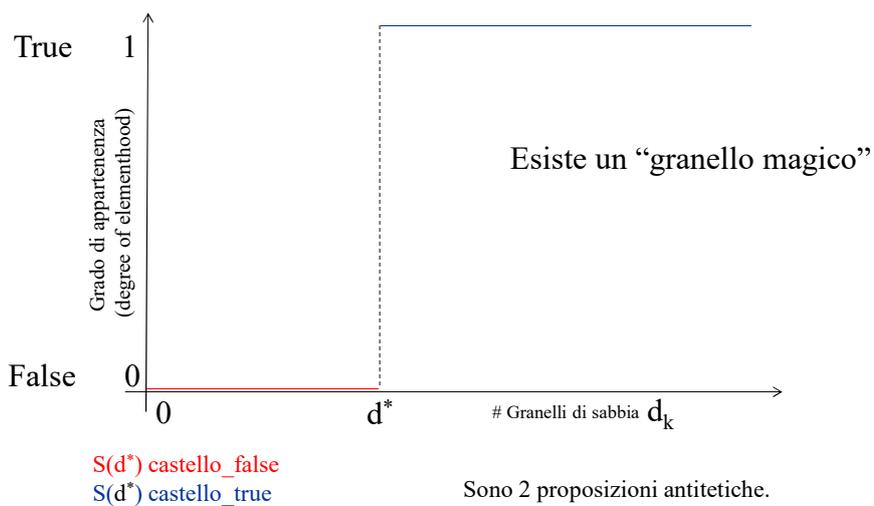
La proposizione $S(\cdot)$ è l'affermazione: "è una montagnetta di sabbia" ed è funzione del numero di granelli, d .



Non esiste un particolare numero di granelli, d^* , per cui $S_{d^*} = F$ diventi $S_{d^*+1} = T$.



Esempio di funzione di appartenenza (logica classica)





Montagnetta di sabbia e Fuzzy set

Supponendo di avere una montagnetta di n granelli di sabbia, se abbiamo 0 granelli di sabbia avremo: $T(0) = 0$.

Possiamo mettere in relazione le diverse situazioni:

$$T(0) = \text{false} - 0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n - T(d_n) = \text{true}$$

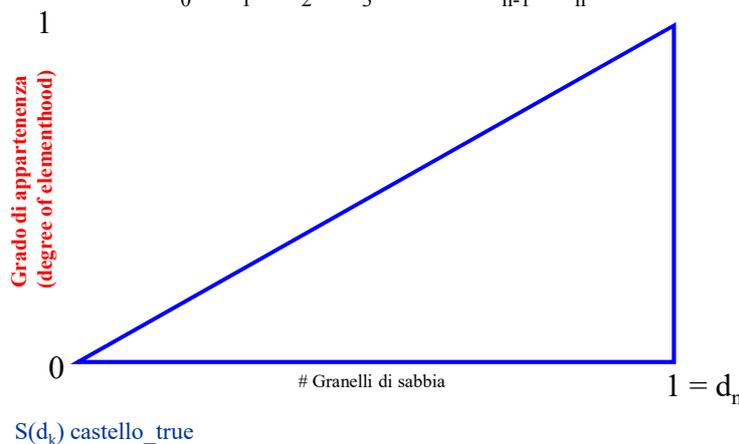
d esprime un margine di dubbio associato al numero di granelli. (cf. l'esperimento di Moravec: the prosthetic brain).

Nulla e' detto ancora sulla forma della funzione che passa da 0 ad 1 nel caso fuzzy.



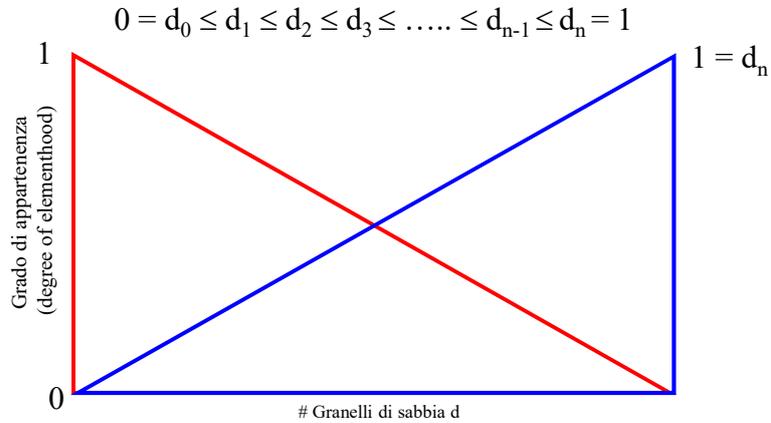
Esempio di funzione di appartenenza (logica fuzzy)

$$0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n = 1$$





Esempio di funzione di appartenenza (logica fuzzy)



$S(d_k)$ castello_false

$S(d_k)$ castello_true

$m_A(d) = \text{Degree}(d \in A)$ è membership (elementhood) value o fit

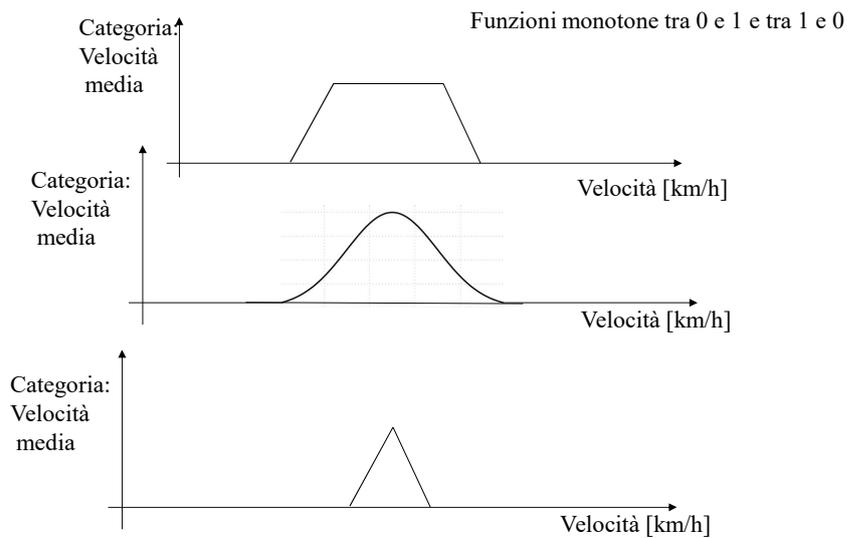
A.A. 2021-2022

13/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Altre forme di misura (membership function, $m_A(x)$)



Le funzioni di membership si possono sovrapporre?

A.A. 2021-2022

14/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Una variabile per più classi - logica classica



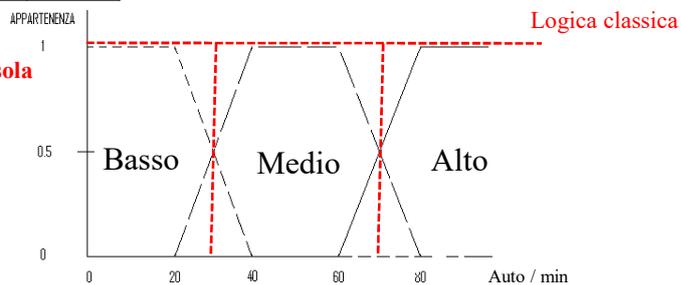
| Auto / min traffico | Grado di appartenenza a :(membership) | | |
|---------------------|---------------------------------------|-------|------|
| | BASSO | MEDIO | ALTO |
| 10 | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 |
| 29 | 1 | 0 | 0 |
| 30 | 0 | 1 | 0 |
| 40 | 0 | 1 | 0 |
| 50 | 0 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 0 |
| 70 | 0 | 0 | 1 |
| 80 | 0 | 0 | 1 |

Differenti idee su cosa sia traffico basso, medio o alto.

Classi disgiunte.

Esiste un traffico “magico” (e.g. 29 auto / min) per cui si passa da una classe all'altra.

Classificazione su una classe sola



A.A. 2021-2022



Una variabile per più classi - logica fuzzy



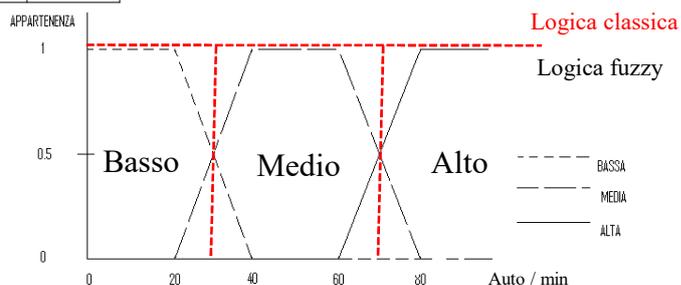
| Auto / min traffico | Grado di appartenenza a :(membership) | | |
|---------------------|---------------------------------------|-------|------|
| | BASSO | MEDIO | ALTO |
| 10 | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 |
| 29 | 0.55 | 0.45 | 0 |
| 30 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 40 | 0 | 1 | 0 |
| 50 | 0 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 0 |
| 70 | 0 | 0 | 1 |
| 80 | 0 | 0 | 1 |

Differenti idee su cosa sia velocità bassa, media o alta.

In generale le funzioni di membership hanno forma trapezoidale o triangolari.

Sovrapposizione tra le funzioni circa 25%

Classificazione su più classi



A.A. 2021-2022



Esempio

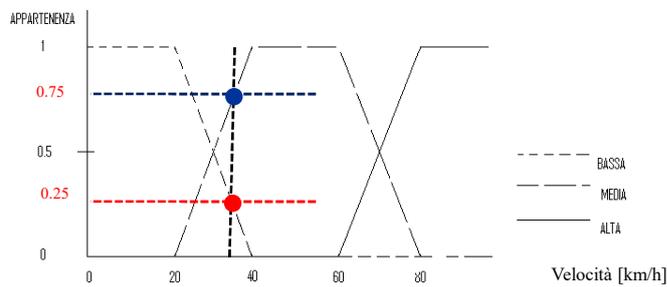
| Auto / min traffico | Grado di appartenenza a (membership) | | |
|---------------------|--------------------------------------|-------|------|
| | BASSA | MEDIA | ALTA |
| 10 | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 |
| 30 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 40 | 0 | 1 | 0 |
| 50 | 0 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 0 |
| 70 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 80 | 0 | 0 | 1 |

Un traffico di 35 auto / min come può essere classificato?

Medio con grado di membership 0.75.

Basso con grado di membership 0.25.

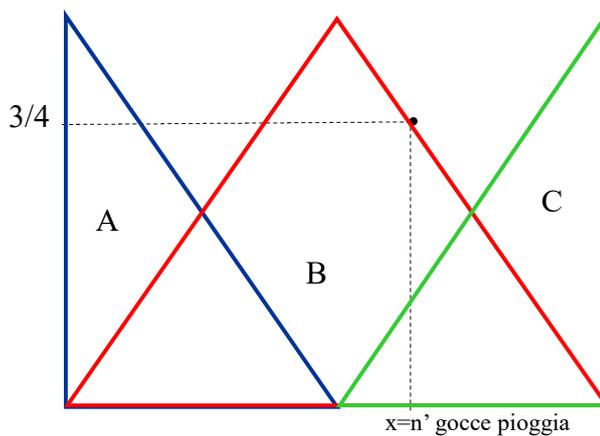
Classificazione su più classi



A.A. 2021-2022



Una variabile, più classi - esempio



Tre insiemi fuzzy
(e.g. pioggia):

- A) Qualche goccia.
- B) Pioggia leggera.
- C) Pioggia intensa.

Esempio:

$$m_B(x=n') = \frac{3}{4}$$

$$m_C(x=n') = \frac{1}{4}$$

Sta piovendo in modo leggero?

A.A. 2021-2022

18/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Fuzzyness versus probability



La **fuzzyness** descrive l'**ambiguità** insita in un evento.

La **probabilità** descrive l'**incertezza** che l'evento avvenga.

Che un evento accada o meno è una questione di probabilità, in quale misura accada è un questione di fuzzyness.

La fuzzyness ha a che fare con la dimensione strutturale la probabilità con la dimensione temporale.

Esempio: “C'è il 20% di probabilità che domani ci sia pioggia leggera”.

Ma anche: “Errori piccoli”, “Clienti soddisfatti”, “paesi in via di sviluppo”, “segnali affetti da rumore”, paesaggio (tante sfumature nella classificazione)

....



Fuzzyness versus Probabilità (esempi)



• Propongo un libro ad un editore (che può rispedirlo al mittente ma può chiedere una revisione più o meno pesante (è accettato il manoscritto?))



• Parcheggio la mia automobile (non è previsto che venga parcheggiata a cavallo delle strisce: si rischia la contravvenzione).

Dopo che un evento è avvenuto, la sua probabilità svanisce.



Paradossi associati al centro



Il bugiardo di Creta che diceva che tutti a Creta erano bugiardi.

Il barbiere di Bertrand Russell. Fuori dal suo negozio era appeso un cartello che diceva: “il barbiere taglia la barba solamente a tutti quelli che non se la tagliano da soli”. Chi taglia la barba al barbiere?

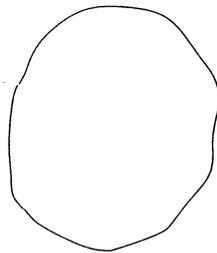
Prendiamo una carta che dice su un lato: “Quello che è riportato sull’altro lato è vero” e sull’altro: “Quello che è riportato sull’altro lato è falso”.

Apro il frigorifero in cui trovo una mezza mela (bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto) – c’è una mela in frigorifero?

Al centro: $A \cup A_c = A \cap A_c$
Esempio A: barbiere, A_c : non_barbiere



Fuzzy versus probabilità (formalmente)



Ha più senso dire che questo è un ellisse fuzzy o che è probabilmente un ellisse?

Pur essendoci tutti gli elementi dell’evento, l’incertezza rimane. A cosa è dovuta?

Ha senso scrivere che: $m_A(x) = \text{Prob}\{x \in A\}$ true?

La fuzzyness è un’incertezza deterministica.



Gli operatori logici nella logica fuzzy



Introduzione di una **norma**, detta T-norm (Lukasiewics, 1970) che induce una metrica. La norma è il grado di membership.

$$T(A \text{ AND } B) = \min(T(A), T(B)) \quad 0 \leq T(A) \leq 1$$

$$T(A \text{ OR } B) = \max(T(A), T(B))$$

$$T(\text{NOT-}A) = 1 - T(A) \quad \text{Zadeh, 1969.}$$

Si noti che gli operatori min e max valgono anche per la logica classica.

Segue che: $T(A \text{ AND } A^c) + T(A \text{ OR } A^c) = 1$ (dimostrare!).



Esempio di AND, OR e NOT



Eventi. Membership function associata a 4 classi che costituiscono A e B:

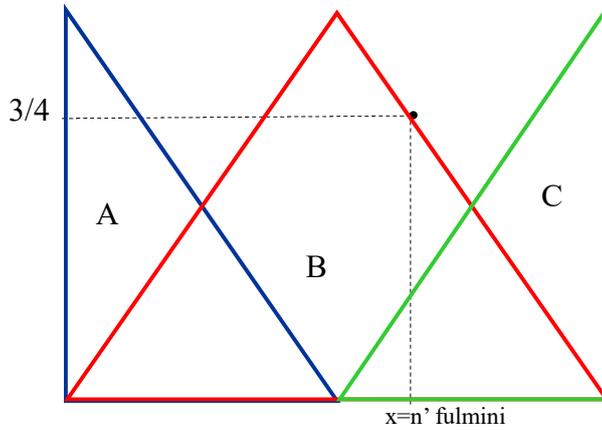
| | a, | b, | c, | d | |
|-----|-------------------------------|----|----|---|-------------------------------|
| | | | | | |
| | A = (1 . 8 0 . 5) | | | | A = (1 0 0 1) |
| | B = (.4 .4 .7 .7) | | | | B = (0 0 1 1) |
| OR | $A \cup B = (1 . 8 . 7 . 7)$ | | | | $A \cup B = (1 0 1 1)$ |
| AND | $A \cap B = (.4 .4 0 . 5)$ | | | | $A \cap B = (0 0 0 1)$ |
| | $A^c = (0 . 2 1 . 5)$ | | | | $A^c = (0 1 1 0)$ |
| | $A \cap A^c = (0 . 2 0 . 5)$ | | | | $A \cap A^c = (0 0 0 0)$ |
| | $A \cup A^c = (1 . 8 1 . 5)$ | | | | $A \cup A^c = (1 1 1 1)$ |
| | $A \cap A^c + A \cup A^c = 1$ | | | | $A \cap A^c + A \cup A^c = 1$ |

$A \cup B$ Caratteristica presente al minimo grado in entrambi gli insiemi.

$A \cap B$ Caratteristica presente al massimo grado in entrambi gli insiemi.



Una variabile, più classi - esempio



Tre insiemi fuzzy
(e.g. fulmini):

- A) Assenza fulmini.
- B) Fulmini.
- C) Molti fulmini

Ci sono fulmini?

Sono una componente del temporale, aggiungiamo anche il vento

A.A. 2021-2022

25/62

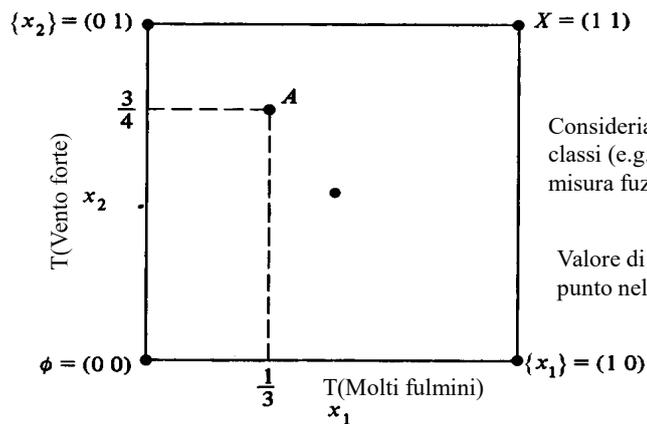
<http://borghese.di.unimi.it/>



Rappresentazione geometrica di un evento fuzzy



Consideriamo un insieme temporale caratterizzato da 2 classi fuzzy: vento forte e molti fulmini



Su ogni asse il grado di appartenenza ad una classe.

Consideriamo un evento A associate alle due classi (e.g. temporale forte) e associamo una misura fuzzy.

Valore di **fit** dell'evento A = (1/3, 3/4). E' un punto nello spazio fuzzy a 2 dimensioni.

Un certo evento fuzzy caratterizzato dall'insieme fulmini e vento forte è rappresentabile come un punto in un ipercubo di 2 dimensioni (quadrato) $I_2 = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$ (in generale, $I_n = [0,1]^n$).

A.A. 2021-2022

26/62

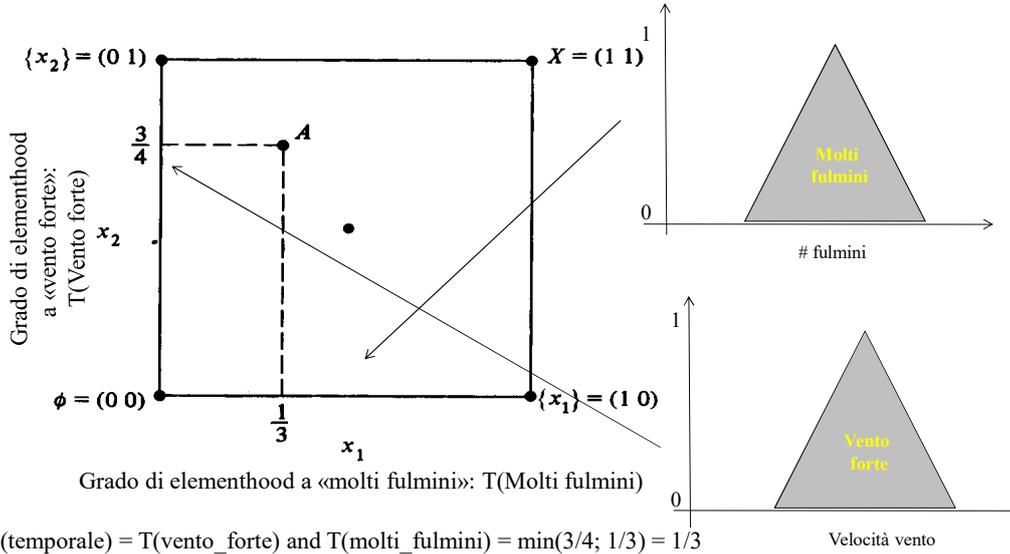
<http://borghese.di.unimi.it/>



Misura di verità di un evento fuzzy



C'è un temporale?



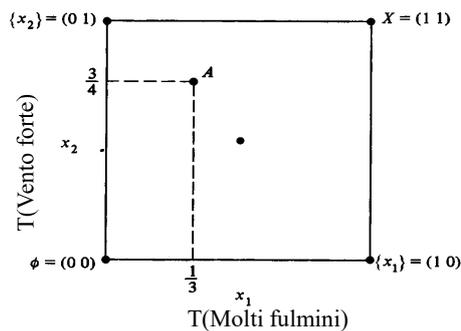
A.A. 2021-2022

27/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Proprietà dello spazio fuzzy (I)



I vertici dell'ipercubo cosa rappresentano?

$$NF = \{\emptyset, X, \{x_1\}, \{x_2\}\}.$$

I 4 vertici rappresentano i 4 insiemi non fuzzy dello spazio fuzzy definito dalle 2 classi: vento forte e molti fulmini.

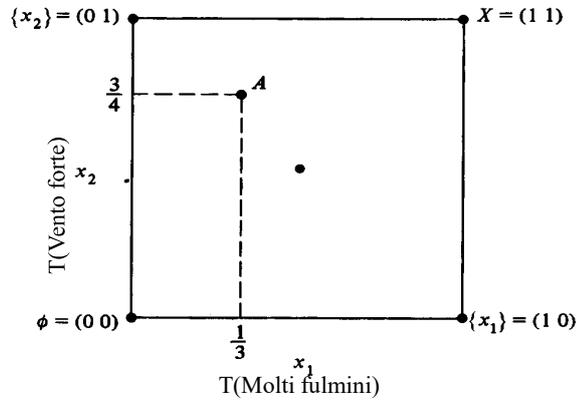
A.A. 2021-2022

28/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Proprietà dello spazio fuzzy (II)

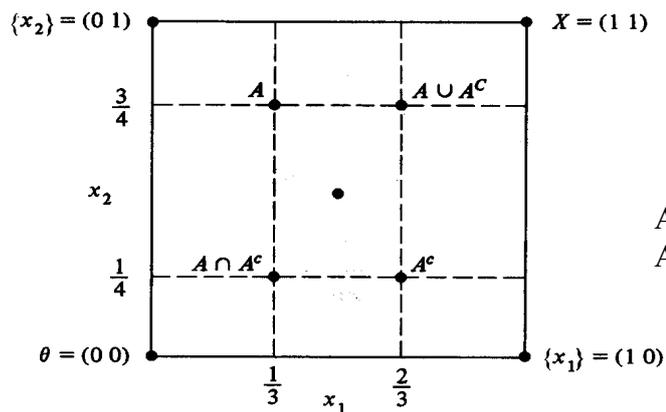


Dove troviamo la massima indecisione?

Al centro: $A \cup A_c = A \cap A_c$



Proprietà dello spazio fuzzy (III)



$$A = (1/3 \ 3/4)$$

$$A^c = (2/3 \ 1/4)$$

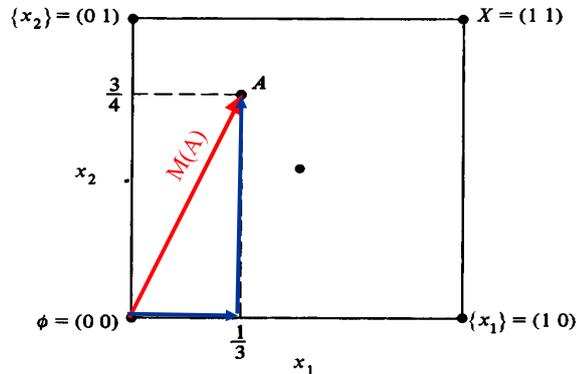
$$A \cup A^c = (2/3 \ 3/4) \text{ Max}$$

$$A \cap A^c = (1/3 \ 1/4) \text{ min}$$

- Può diventare crisp se un evento assume un valore estremo della classe.
- Se sono massimamente fuzzy sia x_1 che x_2 : $A \cup A^c = A \cap A^c = (1/2 \ 1/2)$.



Misure geometriche in un insieme fuzzy



Norma di un vettore:

$$M(A) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |m_A(x_i)|^p}$$

n: numero di classi fuzzy

Per $p = 2$ misuriamo la lunghezza del vettore $A - O$.
 Per $p = 1$ misuriamo la somma delle coordinate (in valore assoluto)

Distanza fuzzy - city block $\rightarrow l_1$
Distanza euclidea $\rightarrow l_2$

$$0 \leq M(A) = 1/3 + 3/4 = 13/12 \leq n$$

$$0 \leq M(A) = \sqrt[3]{97/144} \leq n$$

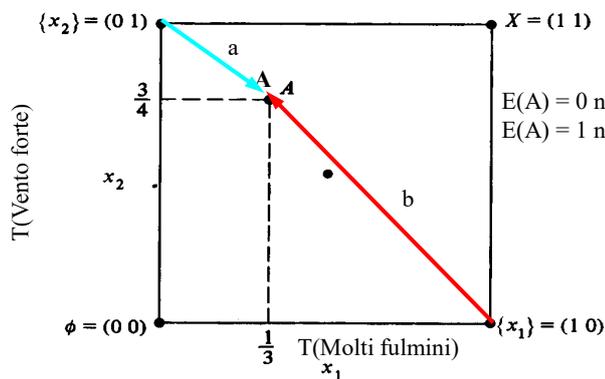
La distanza in norma l_1 è più facile da calcolare



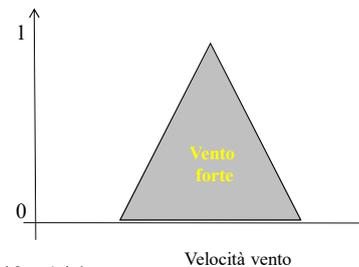
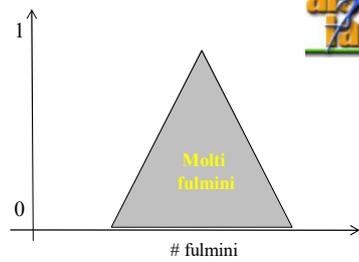
Entropia fuzzy



How (much) fuzzy is a fuzzy set? Esempio del temporale.



$E(A) = 0$ nei vertici
 $E(A) = 1$ nel centro



$$E(A) = \frac{a}{b} = \frac{l^1(A, A_{vicino})}{l^1(A, A_{lontan})}$$

$$0 \leq E(A) = \frac{1/3 + 1/4}{2/3 + 3/4} = 7/17 \leq 1$$



Riassunto

- Fuzzyness descrive l'ambiguità di un evento.
- La funzione di appartenenza descrive il grado di appartenenza di un evento ad una o più classi (non mutuamente esclusive, le funzioni di membership sono parzialmente sovrapposte).
- La fuzzyness si distingue dalla probabilità che misura la probabilità che un evento, nella sua interezza si verifichi o meno.
- Si possono definire attraverso la T-norm, le operazioni logiche tra insiemi fuzzy: AND, OR e NOT.
- Un oggetto fuzzy si può rappresentare come un punto all'interno di un ipercubo di dimensionalità pari al numero di elementi che caratterizzano l'oggetto.
- E' possibile associare ad un insieme fuzzy una misura di entropia che rappresenta il rapporto tra la misura della violazione della legge di non contraddizione e del terzo escluso.



Overview

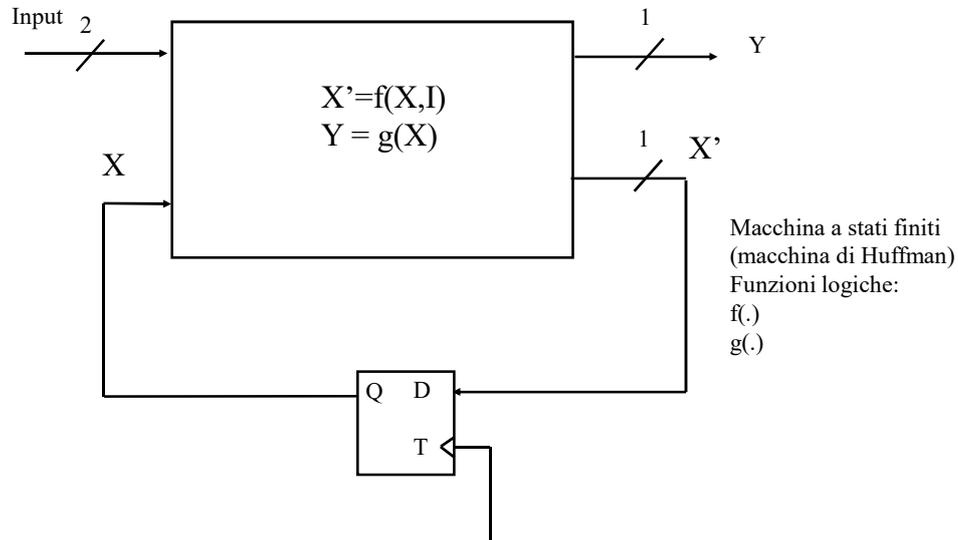
I fuzzy set

I fuzzy system

| | | θ | | | | | | |
|-----------|----|----------|----|----|----|----|----|----|
| | | NL | NM | NS | ZE | PS | PM | PL |
| θ' | NL | | | | PL | | | |
| | NM | | | | PM | | | |
| | NS | | | | PS | NS | | |
| | ZE | PL | PM | PS | ZE | NS | NM | NL |
| | PS | | | PS | NS | | | |
| | PM | | | | NM | | | |
| | PL | | | | NL | | | |



Macchine che implementano la logica classica



A.A. 2021-2022

35/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Breve storia



Max Black (1937). Applico' i principi della logica fuzzy a liste di elementi o simboli. Sviluppo' la prima funzione di appartenenza fuzzy e chiamo' l'incertezza dell'appartenenza **vaghezza** (vagueness).

Lofti Zadeh (1965). "Fuzzy sets" sviluppo' una teoria sugli insiemi fuzzy ed una logica (fuzzy) in grado di lavorare su questi insiemi.

Ebrahim Mamdani (1974) dimostrò come utilizzare la logica fuzzy per risolvere problemi applicativi (inferenza fuzzy).

Dal 1985 ad oggi applicazioni tecnologiche con successo crescente in campi più diversi, dal controllo, alla ricerca nei data base, all'elaborazione delle immagini alla classificazione. Vediamo di capirne i fondamenti del successo.

A.A. 2021-2022

36/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Applications to real world (helicopter control)



Lodz University of Technology
Thesis No. 938

Fuzzy Control for an Unmanned Helicopter

by

Bourhane Kadmiry

Michal Lower
Institute of Engineering Cybernetics
Wroclaw University of Technology
Wyb. Wyspianskiego 27, 50-370 Wroclaw, Poland
Michal.Lower@pwr.wroc.pl

Boguslaw Szlachetko
Institute of Telecommunication and Acoustics
Wroclaw University of Technology
Boguslaw.Szlachetko@pwr.wroc.pl

Dariusz Krol
Institute of Applied Informatics
Wroclaw University of Technology
Dariusz.Krol@pwr.wroc.pl

Abstract

This paper relates to a fuzzy flight control system in spot hovering for a single-rotor helicopter PZL Kania¹. The model of the fuzzy control system was developed on the basis of computer simulation experiments done by the expert's analysis (pilot's knowledge). The helicopter's mathematical model and its fuzzy flight control system were simulated in

all the axis oriented to the fuselage was considered, assuming that fuzzy regulator works during and after the blow.

Although limited amount of expert's knowledge was available, the results proved the stability of the system. Hover parameters after the blow disturbances stabilize in all considered axes.

Submitted to the School of Engineering at Lodz University in partial fulfillment of the requirements for degree of Licentiate of Engineering.

Department of Computer and Information Science
Lodz University of Technology
52-001 Lodz, Poland

Lodz, 2022

In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 805-810, Oct 2003, Las Vegas, USA

A Tale of Two Helicopters

Siddharth Saripalli¹, Jonathan M. Roberts², Peter J. Corke², Gregg Beylke^{1,2}

¹Georgia Tech, Atlanta, GA, USA
²Robotic Research Lab, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA
³CSIRO Manufacturing & Infrastructure Technology, PO Box 883, Kensington, QLD 4060, Australia
⁴University of Queensland, St. Lucia, QLD 4066, Australia

Abstract

This paper discusses similarities and differences in autonomous helicopter development at USC and USCIS. The most significant differences are in the accuracy and precision of the sensor systems used for control. The USCIS vehicle, like a number of others, makes use of a sensor suite that can measure the position and orientation of the vehicle. The USCIS system, by contrast, utilizes low-cost inertial, magnetic, vision and GPS to achieve the same ends.

We discuss the architecture of both autonomous helicopters, discuss the design issues and present comparative results.



A.A. 2021-2022

37/62

<http://borgnese.di.unimi.it/>



Sistemi esperti



- E' basato su regole in parallelo (legate da AND e OR) che rappresentano la conoscenza (ipotesi debole sull'AI).
- Funziona mediante un motore inferenziale che lavora sulle regole. Il motore è del tipo: IF THEN ELSE (*reasoning engine*). Si parla anche di intelligenza artificiale.
- La risposta T / F (modalità del tipo winner-take-all, e.g. classificazione).
- Sistemi di analisi di guasti, sistemi di diagnosi automatica (Computer-Aided Diagnosis), ragionamento automatico, tutto (noi stessi pretendiamo di essere dei sistemi esperti!), controllo....

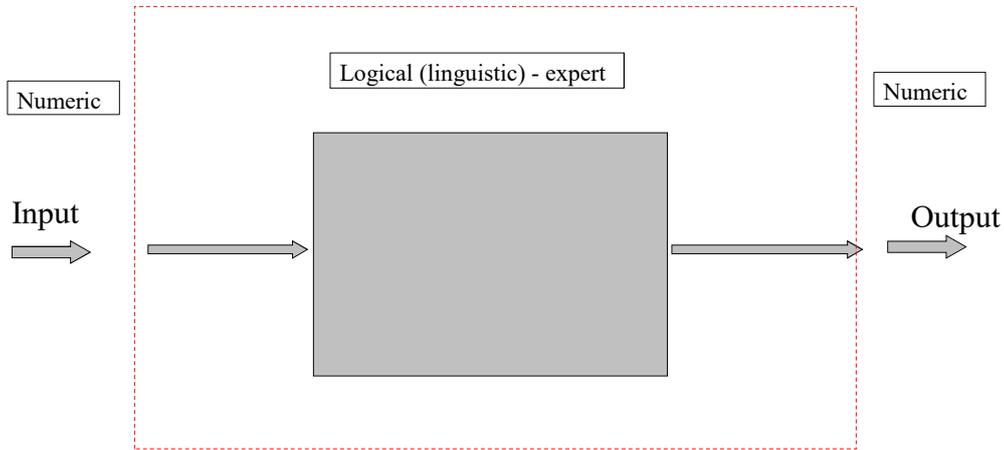
A.A. 2021-2022

38/62

<http://borgnese.di.unimi.it/>



Struttura di un sistema fuzzy



Cosa ci mettiamo dentro?



Tablelle della verità

$$F = f(A,B,C)$$

$$F_1 = \bar{A}\bar{B}C + AB$$

| A | B | C | F ₁ | F ₂ |
|----|---|---|----------------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| →0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$F_1 = \text{True}$$

iif

A = False AND B = True AND C = False

OR

A = True AND B = True AND C = False

OR

A = True AND B = True AND C = True

Insieme di regole. Si possono enunciare tutte le situazioni (regole possibili)

Viene attivata 1 sola regola alla volta nella logica classica (1 mintermine, qui m₂).

Si possono memorizzare in una ROM/FPGA

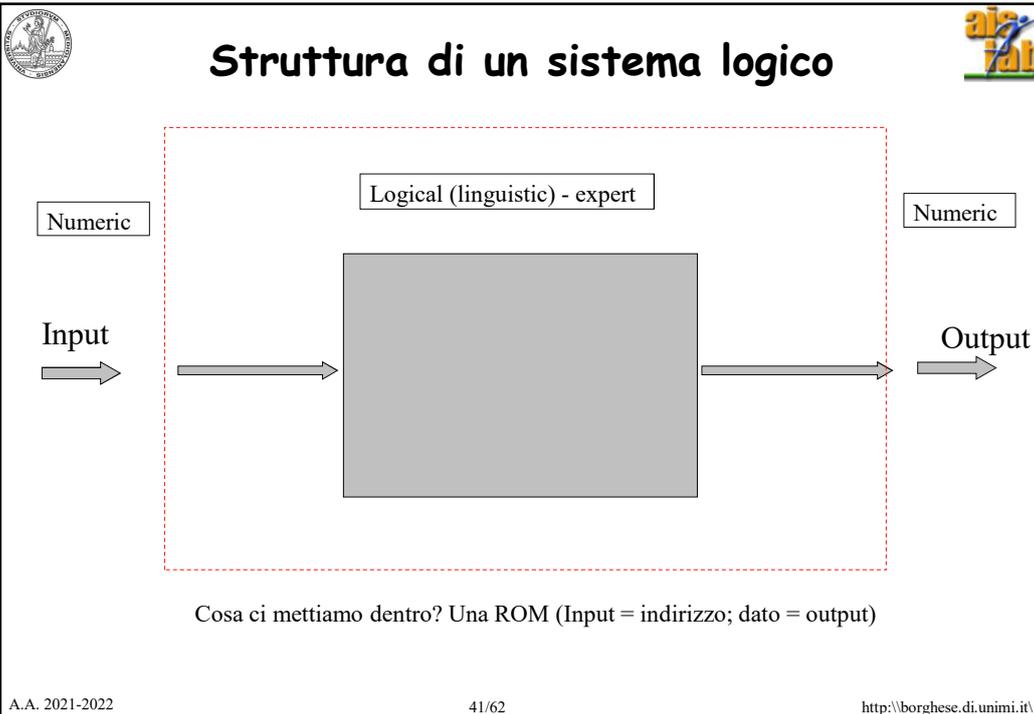


Tabelle della verità e Sistemi Fuzzy

$F = f(A,B,C)$

$F = \bar{A}\bar{B}C + AB$

| | A | B | C | F |
|-------|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| M_1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| m_2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 |

$F = \text{True}$

iif

$A = \text{False AND } B = \text{True AND } C = \text{False}$

OR

$A = \text{True AND } B = \text{True AND } C = \text{False}$

OR

$A = \text{True AND } B = \text{True AND } C = \text{True}$

$F = \text{False}$ negli altri casi (per i maxtermini)

La variabile, C, può assumere contemporaneamente il valore T e F e quindi attivo la regola (mintermine) che prescrive l'uscita = T (m_2) e la regola (maxtermine) che prescrive l'uscita = F (M_1).

L'uscita della funzione $F(\cdot)$ può essere T e F.

Cosa faccio?

A.A. 2021-2022 42/62 http://borghese.di.unimi.it/



Tabelle della verità e Sistemi Fuzzy



$$F = f(A, B, C)$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$$

| | A | B | C | F |
|-------|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| M_1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| m_2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 |

F = True

iif

A = False AND B = True AND C = False

OR

A = True AND B = True AND C = False

OR

A = True AND B = True AND C = True

F = False negli altri casi (per i maxtermini)

Modifiche strutturali:

Le regole si possono sempre memorizzare in una ROM ma:

si deve potere accedere a più di una parola di memoria per ogni dato in ingresso -> Regole attivate -> Input -> Output.

Occorre memorizzare l'informazione sul grado di fit dell'input.

A.A. 2021-2022

43/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Funzionamento di un sistema fuzzy



- L'uscita di ogni regola (funzione) viene considerata con un certo **grado di verosimiglianza** o membership.
- Vengono utilizzate più regole in parallelo (legate da **AND** e **OR**) che rappresentano la conoscenza.
- L'uscita è ottenuta combinando le regole (che possono prescrivere valori di uscita diversi).
- Nella combinazione si tiene conto del grado di membership associato a ciascuna regola.

Dal punto di vista geometrico, mappa un ipercubo n-dimensionale d'ingresso in un ipercubo p-dimensionale di uscita:

→ **FAM** (*Fuzzy Associative Memories*).

$$S : I^n \rightarrow I^p$$

definendo la mappatura (attraverso le funzioni logiche) dei vertici.

A.A. 2021-2022

44/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Fuzzy Associative Memory (FAM)



Una FAM **trasforma** uno spazio di input in uno spazio di output (è un'evoluzione della tabella della verità).

- 1) Spazi continui.
- 2) Spazi fuzzy.

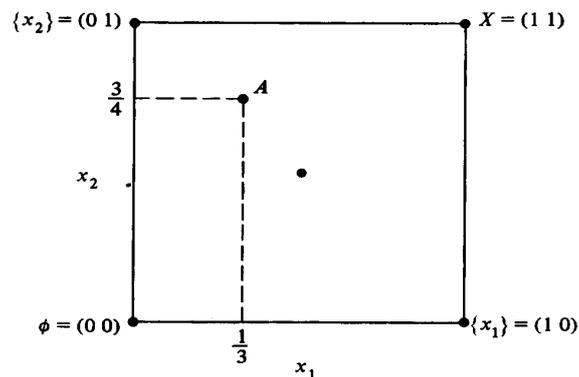
Dal punto di vista logico, una FAM implementa un insieme di **funzioni logiche** su delle variabili fuzzy in ingresso (un tabella della verità rappresenta un insieme di funzioni logiche su variabili booleane – logiche).

Le funzioni logiche sono quelle della logica classica, le variabili sono fuzzy.

Matematicamente una FAM opera la seguente trasformazione:

dove n è il numero di classi dell'insieme fuzzy di ingresso e p è il numero di classi dell'insieme fuzzy di uscita. $I^n \rightarrow I^p$

La trasformazione viene definita specificando la trasformazione sui vertici dell'iper-cubo (regole logiche)



Definisco la mappatura dei vertici, la mappatura dei punti interni avviene tramite il grado di fit



Esempio di costruzione di una FAM



Controllore di un semaforo. Misuriamo la portata del traffico e vogliamo un controllore che generi una lunghezza in secondi.

Ingresso: misura del traffico. 3 classi fuzzy: SCARSO, MEDIO, PESANTE.

Uscita: durata verde: 2 classi fuzzy: BREVE, LUNGO.

Abbiamo 3 regole in tutto ($I^3 \rightarrow I^2$):

- (regola 1) IF (SCARSO) THEN (BREVE)
- (regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
- (regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)

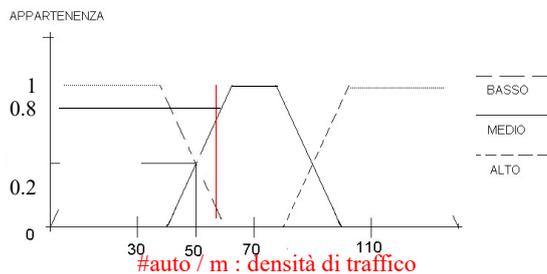
← FAM



Fuzzyficazione: dall'input numerico alle classi fuzzy



Necessità di tradurre l'approccio linguistico in numeri.



Fuzzyficazione viene risolta con le funzioni di membership:

- E.g. 55 auto/10min è un traffico:
- Scarso con grado di fit 0.2
 - Medio con grado di fit 0.8

$$\begin{aligned}
 m(A=\text{BASSO}) &= 0.2 \\
 m(A=\text{MEDIO}) &= 0.8 \\
 m(A=\text{ALTO}) &= 0
 \end{aligned}$$

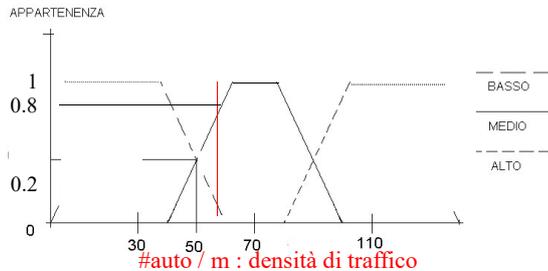
Il traffico è sia scarso che medio



Utilizzo della FAM



- (regola 1) IF (BASSO) THEN (BREVE)
- (regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
- (regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)



La fitness della classe diventa la fitness della regola

Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.

- If (A_1) then B_1 Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2
- If (A_2) then B_2 Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.5

→ Durata?



Dalle classi fuzzy in output alla generazione dell'output numerico

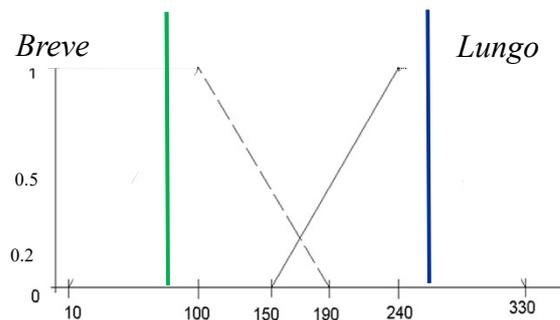


L'output viene deve essere convertito in un valore numerico.

Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?



Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.

- If (A_1) then B_1 Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2
- If (A_2) then B_2 Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.5



Defuzzyficazione mediante media pesata



$$Uscita = y = \frac{\sum F_i * y_i}{\sum F_i}$$

F_i peso della regola i attivata, fit della regola
 y_i azione associata alla regola i : (A_i, B_i)

L'uscita di ciascuna regola viene pesata con il grado di fit della classe in ingresso alla regola.

Tanto maggiore è il grado di fit, di verosimiglianza, della variabile in ingresso, tanto maggiore sarà il peso dell'azione intrapresa in funzione di quella variabile.

Non interessa qui la forma degli insiemi fuzzy di output.



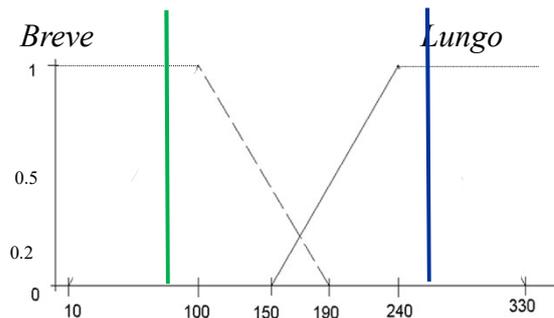
Metodo della media pesata



Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?



Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.

If (A_1) then B_1 Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2

If (A_2) then B_2 Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.5

$$Durata = \frac{\sum F_i * y_i}{\sum F_i} = (0.2 * 80 + 0.5 * 260) / (0.2 + 0.5) = 208.57$$



Defuzzyficazione mediante massimo



$$y = \max_{1 \leq j \leq k} m_B(y_j)$$

Viene scelta l'uscita proveniente da una delle proposizioni linguistiche attivate

Viene utilizzata un'unica regola.

La scelta della regola dipende dal valore di fit della classe in ingresso.



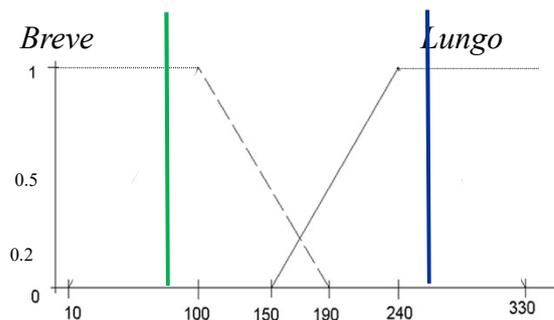
Metodo del massimo



Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?



Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.

If (A_1) then B_1 Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2

If (A_2) then B_2 Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.5

“Vince” la seconda regola e la durata del semaforo sarà “lunga” (260 s).



Defuzzyficazione mediante media pesata con le aree



La tecnica della media pesata non tiene conto della forma delle classi associate alle variabili di uscita: una classe molto ampia ha lo stesso peso di una classe molto stretta.

Si preferisce perciò utilizzare il criterio di fitness della variabile in ingresso per individuare un'area nella classe di uscita.

$$Y = \frac{\int y m_B(y) dy}{\int m_B(y) dy} \quad \text{L'integrale dà il peso della regola.}$$

Gli integrali diventano una sommatoria per membership function semplici.

A.A. 2021-2022

57/62

<http://borghese.di.unimi.it/>



Metodo delle aree

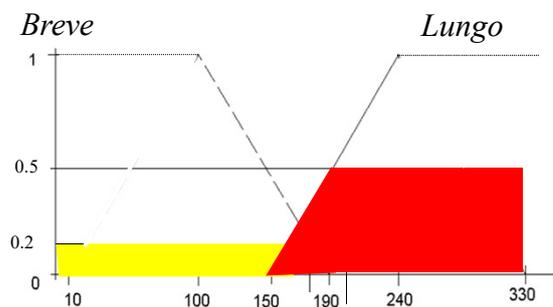


L'output viene mappato in classi fuzzy analogamente all'input.

Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?

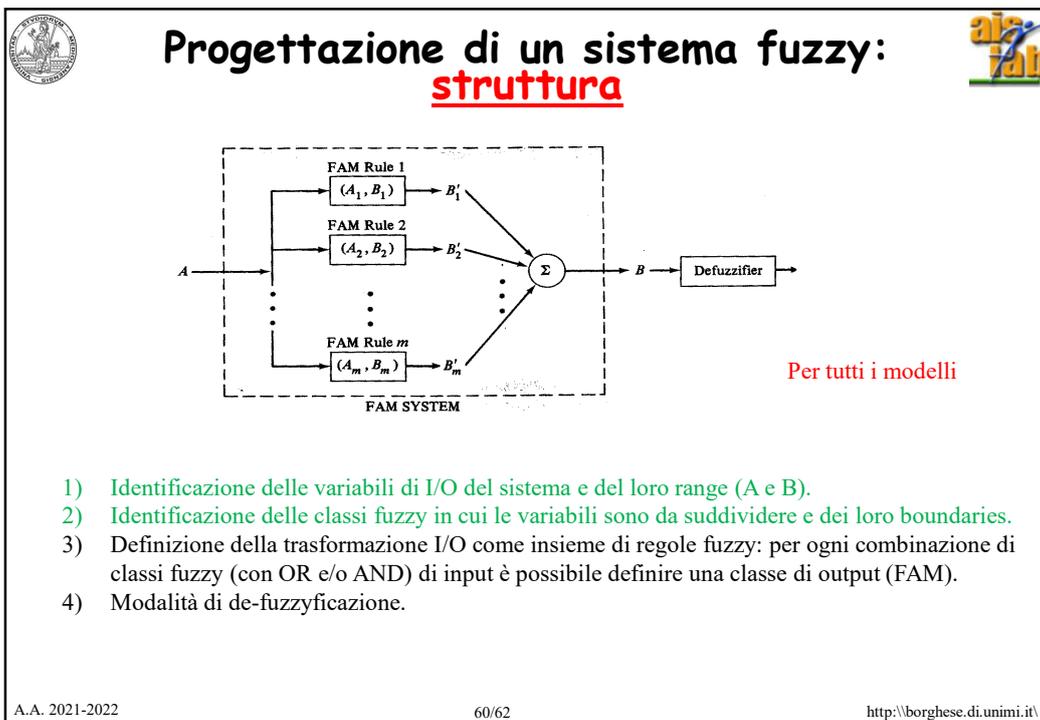
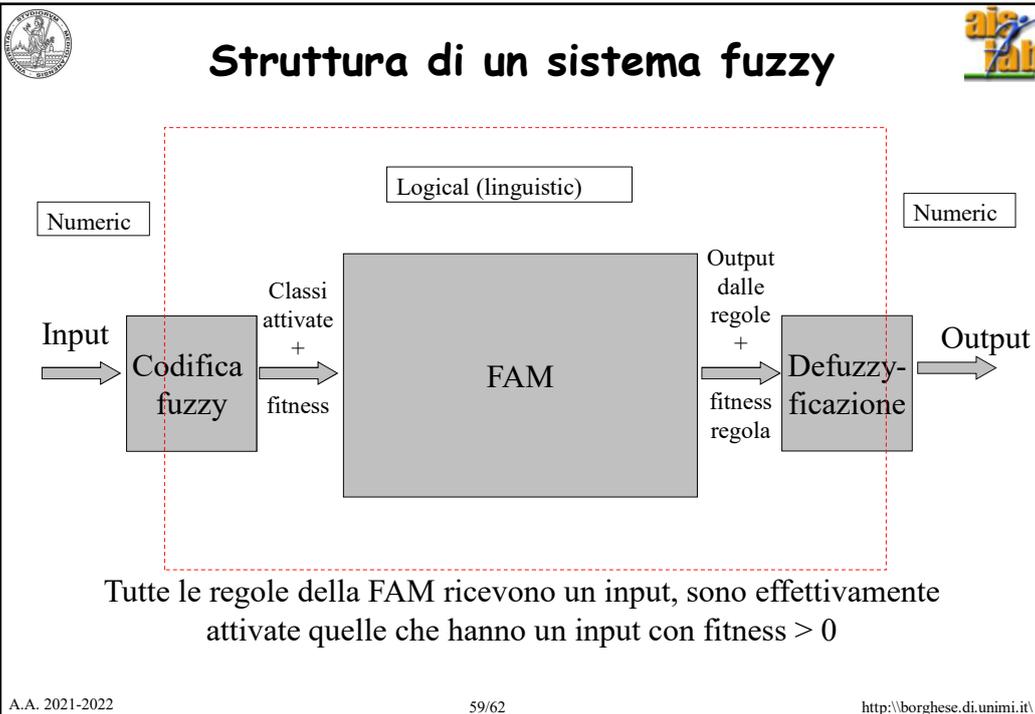


Confrontare con il valore ottenuto con la media pesata.

A.A. 2021-2022

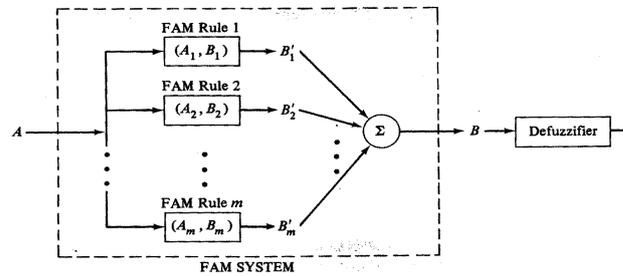
58/62

<http://borghese.di.unimi.it/>





Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).



Overview



I fuzzy set

I fuzzy system

| | | θ | | | | | | |
|-----------|----|----------|----|----|----|----|----|----|
| | | NL | NM | NS | ZE | PS | PM | PL |
| θ' | NL | | | | PL | | | |
| | NM | | | | PM | | | |
| | NS | | | | PS | NS | | |
| | ZE | PL | PM | PS | ZE | NS | NM | NL |
| | PS | | | PS | NS | | | |
| | PM | | | | NM | | | |
| | PL | | | | NL | | | |