Corso di Statistica
Esercitazione VII
Dott. Alfonso Piscitelli

Esercizio 1

Compro due cassette con dieci piantine di bocche di leone ciascuna che ancora devono fiorire. Il vivaista mi ha detto che nella prima cassetta ci sono 7 piantine rosse e 3 bianche, mentre nella seconda ci sono 5 piantine rosse e 5 bianche. Prendo una delle due cassette e da questa prendo due piantine. Qual è la probabilità che sboccino bocche di leone tutte rosse?

<u>Soluzione:</u> (Teorema delle probabilità totali)
Indichiamo con:
$1R_1$ = La prima piantina della prima cassetta è rossa
$1R_2$ = La seconda piantina della prima cassetta è rossa
$2R_1$ = La prima piantina della seconda cassetta è rossa
$2R_2$ = La seconda piantina della seconda cassetta è rossa

P(1)= probabilità di estrarre la prima cassetta = 0,5

La probabilità che la prima piantina estratta dalla prima cassetta sia rossa è:

$$P(R_1) = 7 / 10 = 0,7$$

La probabilità che anche la seconda pallina estratta dalla prima cassetta sia rossa è condizionata dal verificarsi dell'evento R_1

$$P(R_2 | R_1) = 6 / 9 = 0,66$$

$P(1R_1 \cap 1R_2)$ = P(1) * $P(R_1)$ * $P(R_2)$ =0,5 * 0,7 * 0,66 = 0,231

P(2)= probabilità di estrarre la seconda cassetta = 0,5

La probabilità che la prima piantina estratta dalla seconda cassetta sia rossa è:

$$P(R_1) = 5 / 10 = 0,5$$

La probabilità che anche la seconda pallina estratta dalla seconda cassetta sia rossa è condizionata dal verificarsi dell'evento R_1

$$P(R_2 | R_1) = 4 / 9 = 0,44$$

$P(2R_1 \cap 2R_2)$ = P(2) * $P(R_1)$ * $P(R_2)$ =0,5 * 0,5 * 0,44 = 0,11

$P(R) = P(1R_1 \cap 1R_2) \cup P(2R_1 \cap 2R_2)$ = 0,231 + 0,11 = 0,341

Esercizio 2

Un dirigente di una compagnia di assicurazioni ha sviluppato un test attitudinale per agenti assicurativi. Sa che dall'attuale gruppo di agenti il 65% ha ottenuto buoni risultati di vendita ed il restante 35% ha ottenuto risultati scarsi. Dà il suo test all'intero gruppo di agenti e trova che il 73% di coloro che hanno ottenuto buoni risultati passa il test e che il 78% di coloro che hanno ottenuto scarsi risultati sbaglia il test.
a) Scegliendo un agente a caso e sottoponendogli il test, qual è la probabilità che chi passa il test non abbia ottenuto buone vendite?
b) Scegliendo un agente a caso e sottoponendogli il test, qual è la probabilità che chi passa il test abbia ottenuto buone vendite?
c) Scegliendo un agente a caso e sottoponendogli il test, qual è la probabilità che chi non passa il test non abbia ottenuto buone vendite?
d) Scegliendo un agente a caso e sottoponendogli il test, qual è la probabilità che chi non passa il test abbia ottenuto buone vendite?

Soluzione: (Teorema di Bayes)

Indichiamo con:
V = chi ha ottenuto buoni risultati di vendita
NV = chi ha ottenuto scarsi risultati di vendita
T = chi ha superato il test
NT = chi non ha superato il test

P(V) =0,65 - **P(NV)** =0,35 -
P(T | V) = 0,73 - il cui complementare è **P(NT | V)** = 0,27
P(NT | NV) = 0,78 - il cui complementare è **P(T | NV)** = 0,22

Quesito a: P(NV | T) = ?

$$P(NV|\mathrm{T}) = \frac{P(\mathrm{NV} \cap T)}{P(T)}$$

Il calcolo di **P(T)** si ha tramite il teorema delle probabilità totali

$$P(T) = P(\mathrm{T} \cap \mathrm{V}) \cup P(\mathrm{T} \cap \mathrm{NV}) = P(T|\mathrm{V}) \cdot P(V) + P(T|\mathrm{NV}) \cdot P(NV) =$$

=0,73*0,65+0,22*0,35=0,5515

$$P(NV \cap \mathrm{T}) = P(\mathrm{T} \cap \mathrm{NV}) = P(T|\mathrm{NV}) \cdot P(NV) =$$

=0,22*0,35=0,077

$$P(NV|\mathrm{T}) = \frac{P(\mathrm{NV} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|\mathrm{NV}) \cdot P(NV)}{P(T|\mathrm{V}) \cdot P(V) + P(T|\mathrm{NV}) \cdot P(NV)} = \frac{0,077}{0,5515} = 0,1396$$

<u>Quesito b:</u> P(V | T) = ?

$$P(V|\mathrm{T}) = \frac{P(\mathrm{V} \cap T)}{P(T)}$$

Il calcolo di **P(T)** si ha tramite il teorema delle probabilità totali

$$P(T) = P(\mathrm{T} \cap \mathrm{V}) \cup P(\mathrm{T} \cap \mathrm{NV}) = P(T|\mathrm{V}) \cdot P(V) + P(T|\mathrm{NV}) \cdot P(NV) =$$

=0,73*0,65+0,22*0,35=0,5515

$$P(V \cap \mathrm{T}) = P(\mathrm{T} \cap \mathrm{V}) = P(T|\mathrm{V}) \cdot P(V) =$$

=0,73*0,65=0,4745

$$P(V|\mathrm{T}) = \frac{P(\mathrm{V} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|\mathrm{V}) \cdot P(V)}{P(T|\mathrm{V}) \cdot P(V) + P(T|\mathrm{NV}) \cdot P(NV)} = \frac{0,4745}{0,5515} = 0,8604$$

<u>Quesito c:</u> P(NV | NT) = ?

$$P(NV|\mathrm{NT}) = \frac{P(\mathrm{NV} \cap NT)}{P(NT)}$$

Il calcolo di **P(NT)** si ha tramite il teorema delle probabilità totali

$$P(NT) = P(N\mathrm{T} \cap \mathrm{V}) \cup P(N\mathrm{T} \cap \mathrm{NV}) = P(NT|\mathrm{V}) \cdot P(V) + P(NT|\mathrm{NV}) \cdot P(NV) =$$

=0,27*0,65+0,78*0,35=0,4485

$$P(NV \cap NT) = P(NT \cap NV) = P(NT|NV) \cdot P(NV) =$$

=0,78*0,35=0,273

$$P(NV|NT) = \frac{P(NV \cap NT)}{P(NT)} = \frac{P(NT|NV) \cdot P(NV)}{P(NT|V) \cdot P(V) + P(NT|NV) \cdot P(NV)} = \frac{0,273}{0,4485} = 0,6087$$

Quesito d: P(V | NT) = ?

$$P(V|NT) = \frac{P(V \cap NT)}{P(NT)}$$

Il calcolo di **P(NT)** si ha tramite il teorema delle probabilità totali

$$P(NT) = P(NT \cap V) \cup P(NT \cap NV) = P(NT|V) \cdot P(V) + P(NT|NV) \cdot P(NV) =$$

=0,27*0,65+0,78*0,35=0,4485

$$P(V \cap NT) = P(NT \cap V) = P(NT|V) \cdot P(V) =$$

=0,27*0,65=0,1755

$$P(V|NT) = \frac{P(V \cap NT)}{P(NT)} = \frac{P(NT|V) \cdot P(V)}{P(NT|V) \cdot P(V) + P(NT|NV) \cdot P(NV)} = \frac{0,1755}{0,4485} = 0,3913$$

ESERCIZIO 3

Tre macchine, A B, e C, producono rispettivamente il 60%, il 30%, e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 3% e 4%.
- Determinare la probabilità di estrarre un pezzo difettoso.

Viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso.
- Determinare la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina C.

Soluzione: **(Teorema delle probabilità totali e Teorema di Bayes)**

P(A) =0,6 - **P(B)** =0,3 - **P(C)** =0,1
P(D | A) = 0,02 - **P(D | B)** = 0,03 - **P(D | C)** = 0,04

Primo Quesito:

Il calcolo di **P(D)** si ha tramite il teorema delle probabilità totali

$$P(D)=P(\mathrm{D}\cap\mathrm{A})\cup P(\mathrm{D}\cap B)\cup P(\mathrm{D}\cap\mathrm{C})=P(D|\mathrm{A})\cdot P(A)+P(D|\mathrm{B})\cdot P(B)+P(D|\mathrm{C})\cdot P(C)=$$

=0,02*0,6+0,03*0,3+0,04*0,1=0,025

Secondo Quesito: P(C | D) = ?

$$P(C|\mathrm{D})=\frac{P(\mathrm{C}\cap D)}{P(D)}$$

$$P(C\cap D)=P(D\cap\mathrm{C})=P(D|\mathrm{C})\cdot P(C)=$$

=0,04*0,1=0,004

$$P(C|\mathrm{D})=\frac{P(\mathrm{C}\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D|\mathrm{C})\cdot P(C)}{P(D|\mathrm{A})\cdot P(A)+P(D|\mathrm{B})\cdot P(B)+P(D|\mathrm{C})\cdot P(C)}=\frac{0,004}{0,025}=0,16$$

ESERCIZIO 4

Viene lanciata una coppia di dadi. Si ottiene lo spazio equiprobabile finito *S* che consta delle 6^2=36 coppie ordinate di numeri compresi tra 1 e 6:

$$S=\{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),\ldots,(6,6)\}$$

Supponendo di assegnare a ciascun punto (a,b) di *S* il massimo tra i suoi valori, sia cioè **X(a,b)=max(a,b)**, calcolare la funzione di probabilità di ***f* di X**.

Svolgimento

X è una variabile casuale con insieme immagine X(*S*)={1,2,3,4,5,6}.

Calcoliamo la funzione di probabilità *f* di X:

$f(1) = P(X=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$f(2) = P(X=2) = P(\{(2,1),(2,2),(1,2)\}) = \frac{3}{36}$

$f(3) = P(X=3) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}) = \frac{5}{36}$

$f(4) = P(X=4) = P(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\}) = \frac{7}{36}$

$f(5) = P(X=5) = P(\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5)\}) = \frac{9}{36}$

$f(6) = P(X=6) = P(\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\}) = \frac{11}{36}$

quindi:

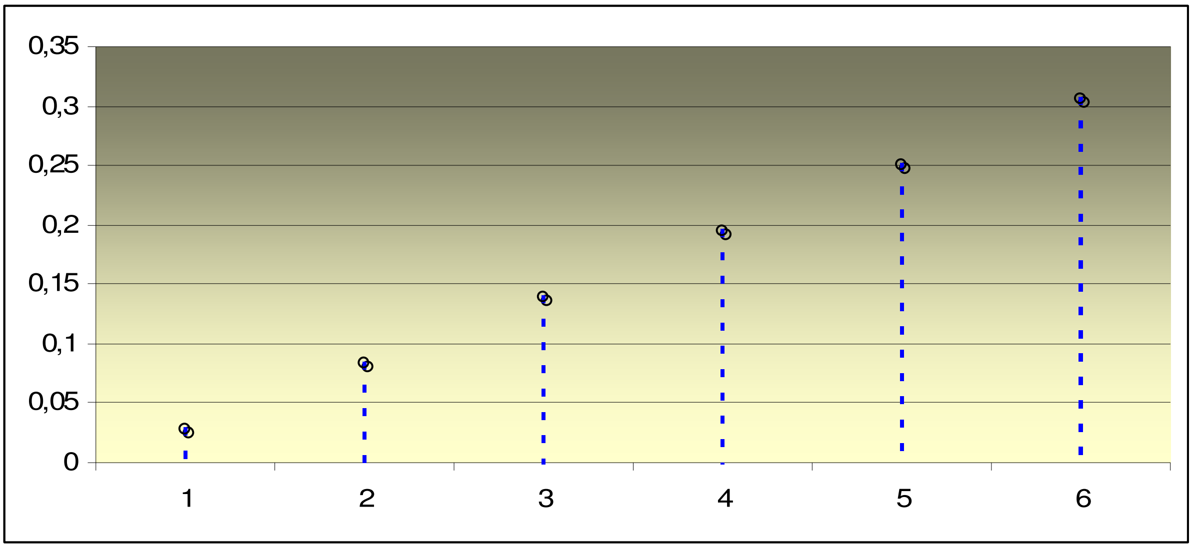
x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

E(X)= $\sum x_i f(x_i) = \frac{1}{36}+\frac{6}{36}+\frac{15}{36}+\frac{28}{36}+\frac{45}{36}+\frac{66}{36}=\frac{161}{36}=4,47$

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 f(x_i)-\mu^2$$

$$\sum x_i^2 f(x_i)=\left(\frac{1}{36}\right)+\left(4*\frac{3}{36}\right)+\left(9*\frac{5}{36}\right)+\left(16*\frac{7}{36}\right)+\left(25*\frac{9}{36}\right)+\left(36*\frac{11}{36}\right)=21,97$$

$$Var(X)=21,97-4,47^2=1,99$$



Funzione di probabilità della v.c. X