

# Sistemi Intelligenti I fuzzy system: :esercitazione

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano  
 Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)  
 Dipartimento di Scienze dell'Informazione  
[borgnese@di.unimi.it](mailto:borgnese@di.unimi.it)



## Overview



Esercitazione sui  
fuzzy system

$\theta' \backslash \theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

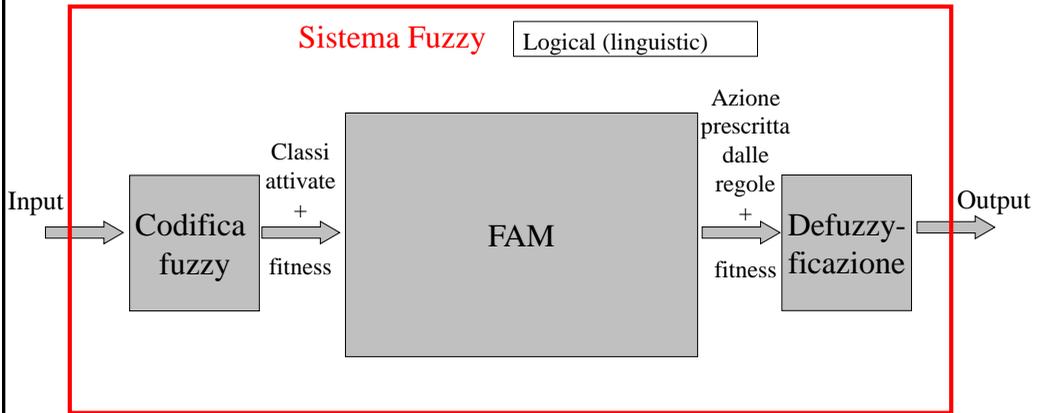


# Struttura di un sistema fuzzy



Numeric

Numeric



Classi attive + fitness delle classi → Regole + fitness delle regole

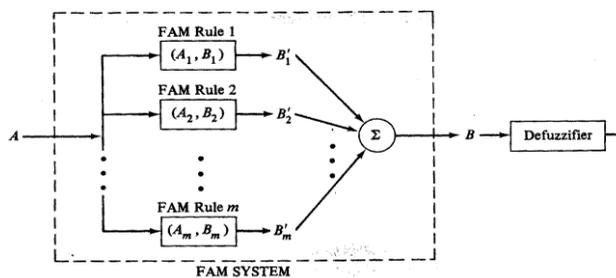
A.A. 2019-2020

3/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



# Progettazione di un sistema fuzzy: struttura



Per tutti i modelli

- 1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
- 2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
- 3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input è possibile definire una classe di output (FAM).
- 4) Modalità di de-fuzzyficazione.

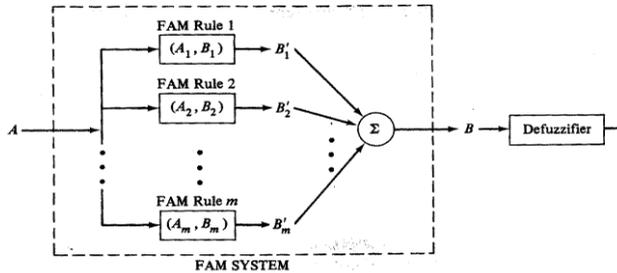
A.A. 2019-2020

4/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).



## FAM basate sull'analisi di più variabili



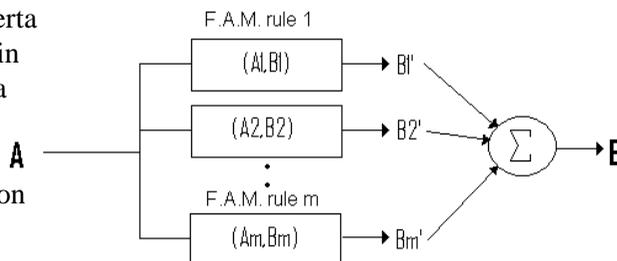
Più classi composte, attivate contemporaneamente.

1. IF ... AND ... AND ... AND .... THEN
2. IF ... AND ... OR ... AND .... THEN

.....

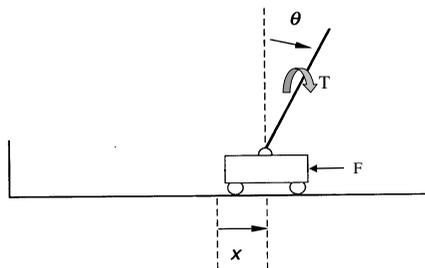
Un dato di input avrà una certa fit rispetto alle classi fuzzy in cui viene suddivisa ciascuna variabile.

Le fit vengono combinate con AND (minimo) e OR (massimo) utilizzando le T-norm, la combinazione attiva una proposizione della FAM.





# Cart-pole



Input:  $A\{\theta(t), \dot{\theta}(t), x(t), \dot{x}(t)\}$

Output:  $B\{F(t), T(t)\}$

Scopo del sistema di controllo è non fare cadere il bastone e mantenere il carrello sulla rotaia.

Il sistema è altamente non lineare, non si può applicare la teoria del controllo lineare.



# Parametri del sistema Cart-pole completo (Mathematica!)

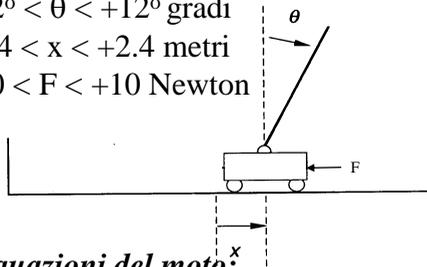
**Vincoli possibili:**

$$-12^\circ < \theta < +12^\circ \text{ gradi}$$

$$-2.4 < x < +2.4 \text{ metri}$$

$$-10 < F < +10 \text{ Newton}$$

**Condizioni iniziali:**  $\theta(0) = \dot{\theta}(0), x(0), \dot{x}(0) = 0$



**Parametri:**

**g** 9.8m/s

**m** 1.1kg (massa carrello + palo)

**m<sub>p</sub>** 0.1kg (massa del palo)

**l** 0.5m distanza della cerniera dal centro di massa del palo.

**Δt** 0.02s (intervallo di campionamento e di controllo).

**Equazioni del moto:**

$$\theta(t+1) = \theta(t) + \dot{\theta}(t) \Delta t$$

$$x(t+1) = x(t) + \dot{x}(t) \Delta t$$

$$\mathcal{G}'(t+1) = \mathcal{G}(t) + \frac{mg \sin(\mathcal{G}(t)) - \cos(\mathcal{G}(t)) (f(t) + m_p l (\mathcal{G}'(t) \pi / 180)^2 \sin(\mathcal{G}(t)))}{(4/3)ml - m_p l \cos^2(\mathcal{G}(t))} \Delta t$$

$$\dot{x}'(t+1) = \dot{x}(t) + \frac{f(t) + m_p l ((\mathcal{G}'(t) \pi / 180)^2 \sin(\mathcal{G}(t)) - \mathcal{G}''(t) \pi / 180 \cos(\mathcal{G}(t)))}{m} \Delta t$$



# FAM per il cart-pole semplificato

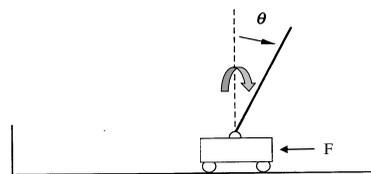
Consideriamo solamente il pendolo inverso semplificato:

1a) **Identificazione delle variabili del sistema:**

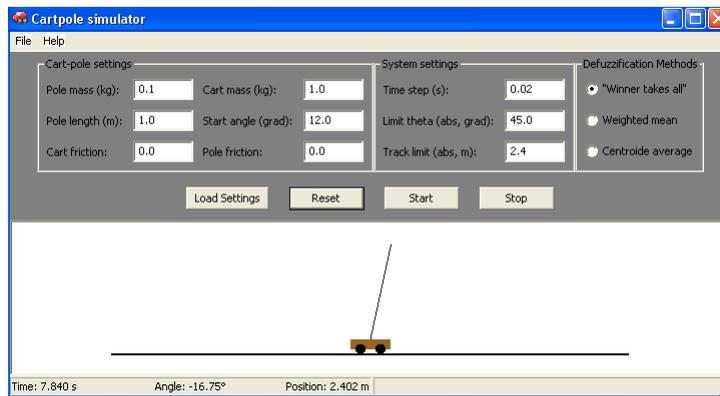
Input: A:  $\{\theta(t), \theta'(t)\}$     Output: B:  $\{F(t)\}$

1b) **Definizione dei range delle 3 variabili:**

$\theta(t)$             range  $[-90 \ +90]$  gradi  
 $\theta'(t)$             range  $(-\infty \ +\infty)$  gradi/s  
 $F(t)$               range  $[-25 \ +25]$  N



# SW available



By Alberti e Rappazzo, 2009



## FAM per il cart-pole: classi fuzzy



2) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy:

- a) Definizione delle classi fuzzy.
- b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza.

*Esempio di classi fuzzy:*

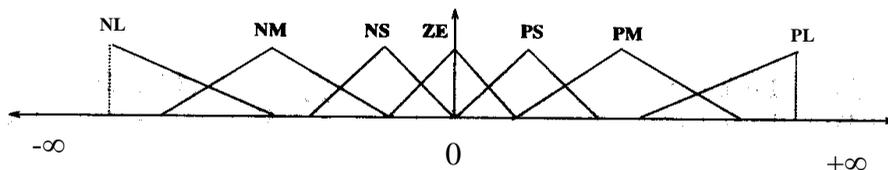
NL: Molto negativo (“negative large”)  
NM: Mediamente negativo  
NS: Poco negativo (“negative small”)  
ZE: Zero  
PS: Poco positivo  
PM: Mediamente positivo  
PB: Molto positivo



## FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza



2b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza per ciascuna variabile fuzzy (di input e di output).



Le regioni sono solitamente triangolari o trapezoidali.  
Sovrapposizione, empiricamente 25%.

**NB Le regioni sono più strette intorno allo 0, per avere una maggiore risoluzione e precisione.**

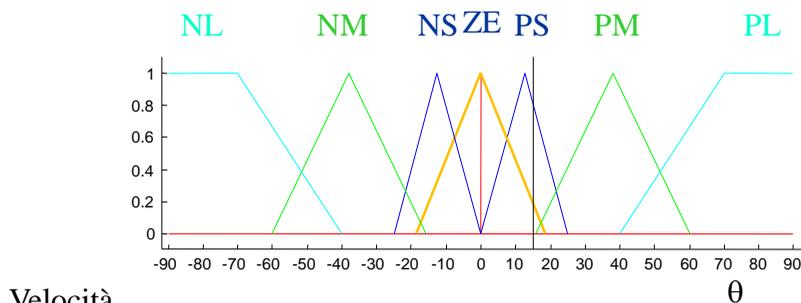


# FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per posizione e velocità

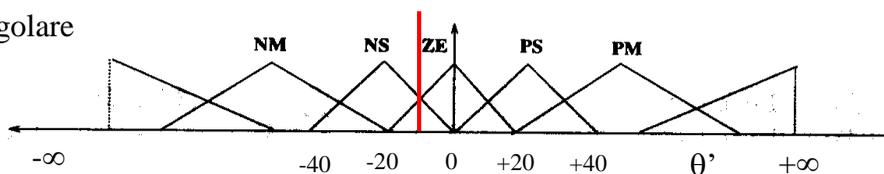


Orientamento

Input: ( $\theta = 15$ ,  $\theta' = -10$ )



Velocità  
angolare



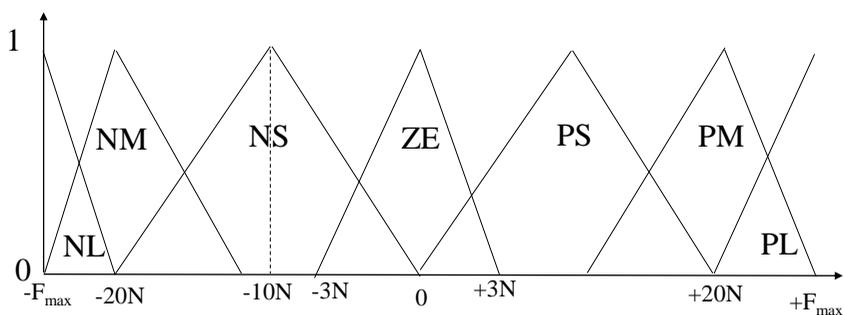
A.A. 2019-2020

Bilanciamento tra crisp e ridondanza

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Fuzzyficazione dell'output



Considero 7 classi anche per questa variabile.

A.A. 2019-2020

14/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## FAM per il cart-pole: costruzione della relazione I/O



La trasformazione della FAM è costituita da 3 variabili:  $(A_1^{\theta}, A_2^{\theta}; B^F)$ .

Una delle possibili *regole* della FAM può essere: (NM, ZE; PM).

*if* <l'orientamento del pendolo è negativa media> *and*

<la velocità di rotazione è circa nulla>

*allora*

<il motore dovrà fornire una coppia positiva media>

Possiamo anche scrivere la trasformazione della FAM come:

$$(\theta, \theta'; F = \text{funz}(\theta, \theta')). I^2 \rightarrow I.$$

La funzione di controllo è una superficie in  $R^3$ .

Le singole variabili non possono essere analizzate singolarmente, ma deve essere analizzata una loro combinazione.



## FAM per il cart-pole: costruzione grafica della relazione I/O



		$\theta$						
		NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
$\theta'$	NL				PL			
	NM				PM			
	NS				PS	NS		
	ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
	PS			PS	NS			
	PM				NM			
	PL				NL			

Vengono codificate solamente 15 regole.

La tabella rappresenta una superficie in  $R^3$ .

Riduciamo la matematica ad un **discorso linguistico intuitivo**. Questo è particolarmente interessante quando si vuole trasferire della **conoscenza**, che di per sé viene espressa in **termini linguistici** (e non matematici)!



## FAM per il cart-pole: le regole fuzzy attivate



$\theta'$ \ $\theta$	NL	NM	NS	Z	PS	PM	PL
NL							
NM							
NS							
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS							
PM							
PL							

Posizione

Velocità

Input: ( $\theta = 15$ ,  $\theta' = -10$ )

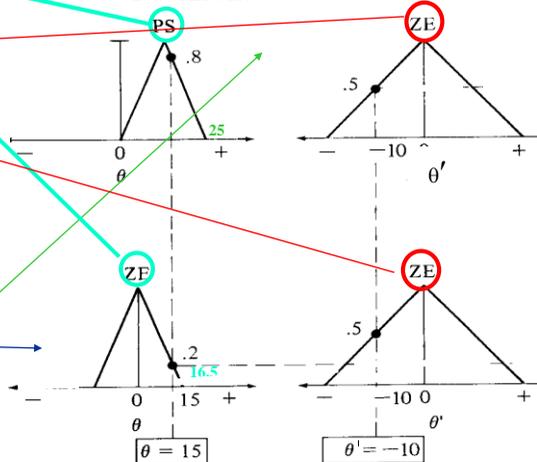
Regole attivate:

(PS,ZE; NS) (grado 0.5)

(ZE,ZE; ZE) (grado 0.2)

(PS,NS; NS) (grado 0.5)

(ZE,NS; PS) (grado 0.2)



A.A. 2019-2020

17/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## FAM per il cart-pole: output prodotto dalle prime due regole



$\theta'$ \ $\theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL							
NM							
NS							
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS							
PM							
PL							

Input: ( $\theta = 15$ ,  $\theta' = -10$ )

Insiemi attivati:

(PS,ZE)

(ZE,ZE)

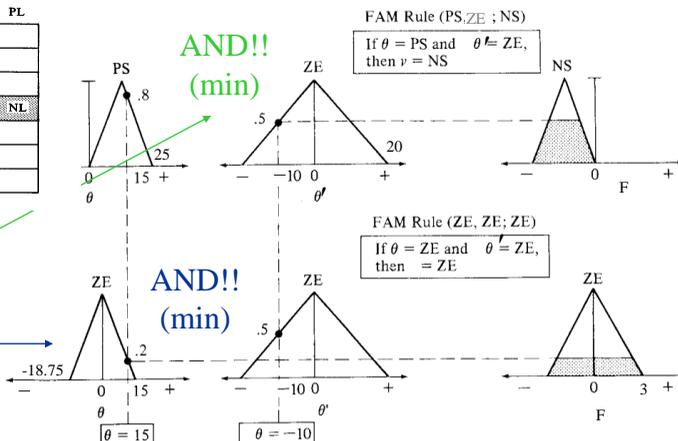
(PS,NS)

(ZE,NS)

Regole FAM attivate:

(ZE,ZE;ZE) (PS,NS;NS)

(PS,ZE;NS) (ZE,NS;PS)



A.A. 2019-2020

18/37

<http://borghese.di.unimi.it/>

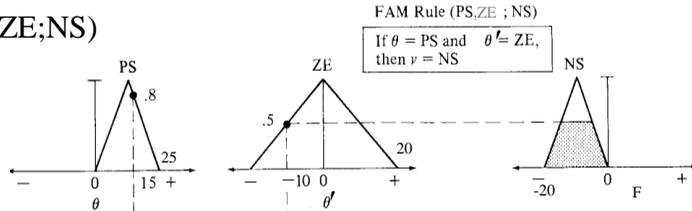


## Pesatura delle regole (prime due)



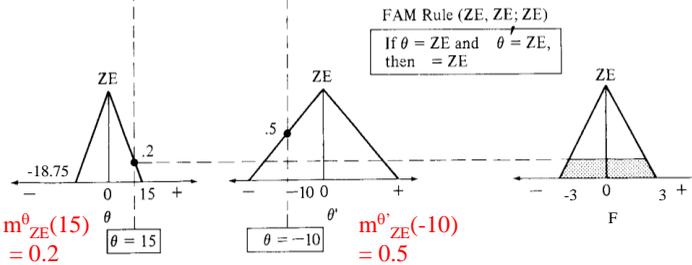
$(\theta, \theta') = (-15, 10) \rightarrow (PS, ZE; NS)$

Grado di appartenenza di F a NS: 0.5



$(-15, 10) \rightarrow (ZE, ZE; ZE)$

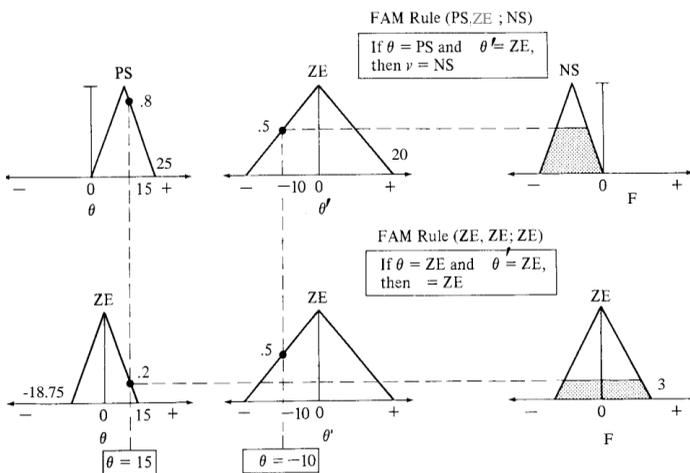
Grado di appartenenza di F a ZE: 0.2



Ciascuna regola dà un contributo secondo la logica fuzzy (AND fuzzy = min)

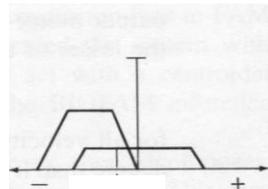


## Insiemi attivi di uscita (prime due regole)



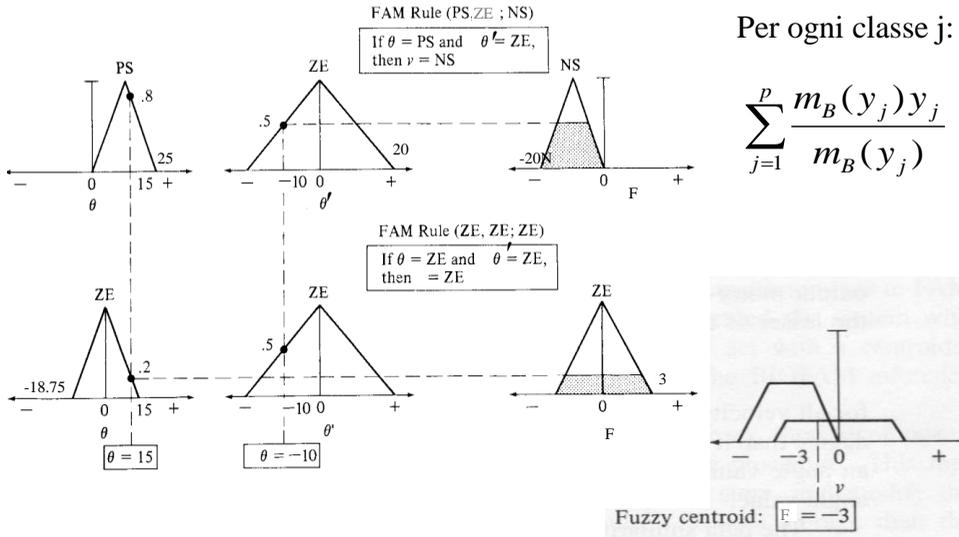
Devo combinare i due insiemi fuzzy di uscita.

Media pesata con l'area nell'insieme di uscita).





## Defuzzyficazione (prime due regole)



A.A. 2019-2020

21/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Defuzzyficazione delle 4 regole attivate: metodo del massimo



(ZE, ZE; ZE)	fitness 0.2
(PS, ZE; NS)	fitness 0.5
(PS, NS; NS)	fitness 0.5
(ZE, NS; PS)	fitness 0.2

Scelgo come output la classe NS, se avessi attive due classi con lo stesso grado di fitness devo operare una scelta. Ad esempio se fosse:

(ZE, ZE; ZE)	fitness 0.2
(PS, ZE; NS)	fitness 0.5
(PS, NS; NS)	fitness 0.5
(ZE, NS; PS)	fitness 0.2

$Y = -10N$

A.A. 2019-2020

22/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Defuzzificazione delle 4 regole attivate: metodo del baricentro



(ZE, ZE; ZE)	fitness 0.2
(PS, ZE; NS)	fitness 0.5
(PS, NS; NS)	fitness 0.5
(ZE, NS; PS)	fitness 0.2

Scelgo come output il baricentro, o media pesata con le fitness, delle azioni.

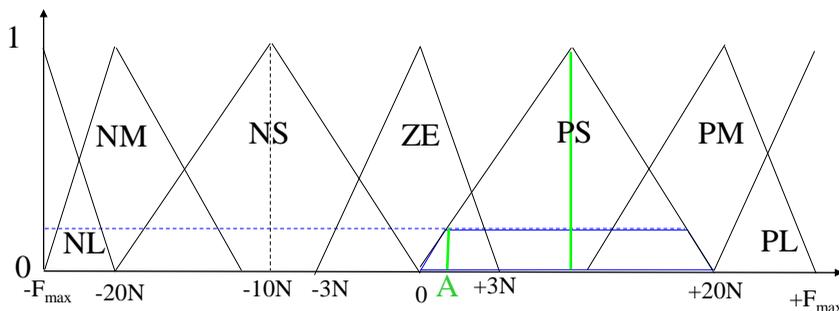
$$Y = \frac{(0 \cdot 0.2 - 10 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.2)N}{0.2 + 0.5 + 0.5 + 0.2} = -\frac{8}{1.4}N \approx -5,714N$$



## Defuzzificazione: metodo delle aree



(ZE, ZE; ZE)	fitness 0.2
(PS, ZE; NS)	fitness 0.5
(PS, NS; NS)	fitness 0.5
(ZE, NS; <b>PS</b> )	<b>fitness 0.2</b>



Calcolo il peso associato all'azione PS come area del trapezio delimitato dalla spezzata blu:

- Calcolo il punto **A** mediante similitudine di triangoli (in verde):  $10 : 1 = x : 0.2 \rightarrow x = 2$
- Il punto **A** si trova in posizione  $A = 2$  dal vertice basso sx dell'insieme.

Considerando che le membership function sono simmetriche rispetto all'asse centrale, l'area sarà:

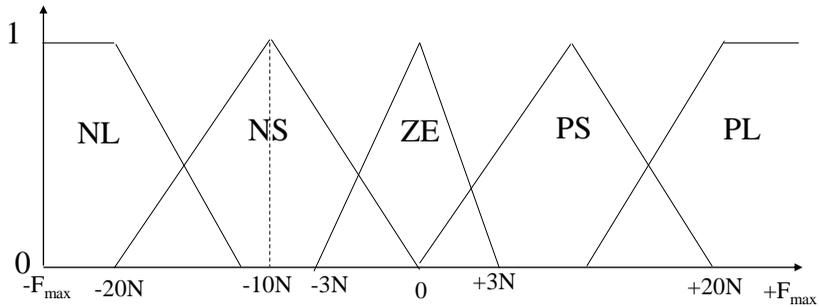
$$(8 + 10 \cdot 0.2) / 2 = 3.6$$



## Defuzzificazione delle 4 regole attivate: metodo delle aree



(ZE, ZE; ZE)	fitness 0.2	=> peso dell'output: 1.08
(PS, ZE; NS)	fitness 0.5	=> peso dell'output: 7.5
(PS, NS; NS)	fitness 0.5	=> peso dell'output: 7.5
(ZE, NS; PS)	fitness 0.2	=> peso dell'output: 3.6



$$\frac{(0 \cdot 1.08 - 10 \cdot 7.5 - 10 \cdot 7.5 + 10 \cdot 3.6)N}{1.08 + 7.5 + 7.5 + 3.6} = -\frac{114}{19.4}N \approx -5,876N$$

A.A. 2019-2020

25/37

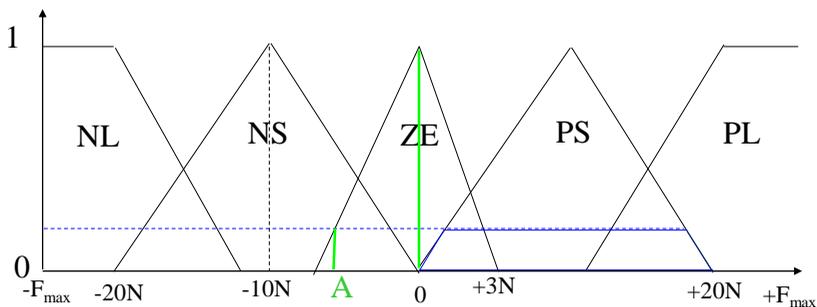
<http://borghese.di.unimi.it/>



## Defuzzificazione: metodo delle aree



(ZE, ZE; ZE)	fitness 0.2
(PS, ZE; NS)	fitness 0.5
(PS, NS; NS)	fitness 0.5
(ZE, NS; <b>PS</b> )	<b>fitness 0.2</b>



- Calcolo il peso associato all'azione PS come area del trapezoido delimitato dalla spezzata blu:
- Calcolo il punto A mediante similitudine di triangoli (in verde):  $1 : 3 = 0.2 : x \rightarrow x = 0.6$
  - Il punto A si trova in posizione  $A = 2.4N$ .

A.A. 2019-2020

26/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



# Osservazioni



Metodo del massimo:  $Y = -10$

Metodo del baricentro:  $Y \approx -5.714$

Metodo del baricentro pesato con le aree:  $Y \approx -5.876$

Con il metodo del massimo viene presa una decisione “crisp”, in stile “winner-takes-all”. La regola più forte vince. Variazioni anche piccole degli input possono provocare discontinuità nel momento in cui diventa più forte una regola diversa.

I metodi del baricentro sono più gradualisti. Al variare dell’input, varia gradualmente anche la forza generata.

Quando il baricentro viene pesato con l’area, la variazione di output viene pesata con l’ampiezza della regione racchiusa in ciascuna classe di output.

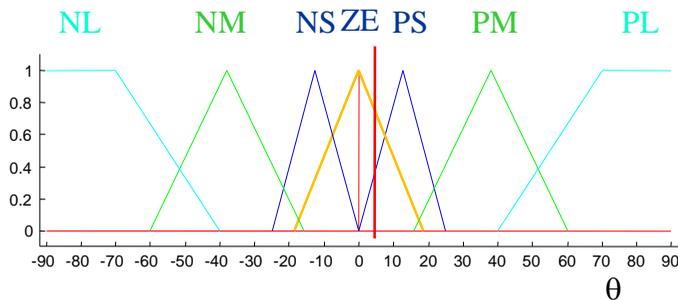


# FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per posizione e velocità

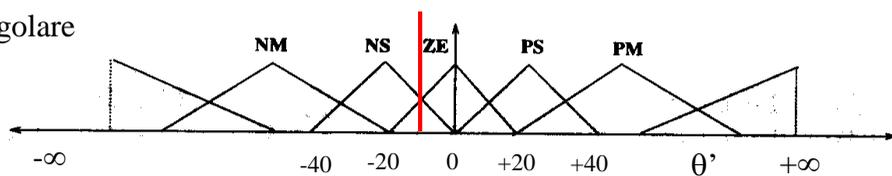


Orientamento

Input: ( $\theta = 4$ ,  $\theta' = -10$ )



Velocità angolare





## FAM per il cart-pole: palo più verticale



$\theta$	$\theta$						
$\theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Scelgo come output il baricentro, o media pesata con le fitness, delle azioni.

**Input:** ( $\theta = 15, \theta' = -10$ )

$$F = \frac{(-10 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5)N}{0.2 + 0.5 + 0.5 + 0.5} = -$$

**Regole attivate:**

**(PS, ZE; NS) (grado 0.2)**

(ZE, ZE; ZE) (grado 0.5)

(PS, NS; NS) (grado 0.5)

**(ZE, NS; PS) (grado 0.5)**



## Banco di FAM



Generalizzazione naturale ai sistemi multi-output.  
Ciascuna variabile di uscita è generata da una FAM diversa.

**Esempio relativo al cart-pole.**

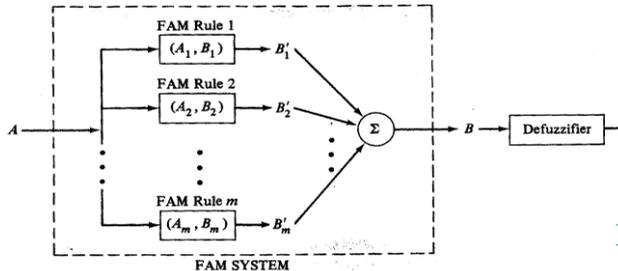
Sia A l'input (stato del sistema, 4 variabili), e B l'output (la forza, ed il momento, 2 variabili), avremo 2 FAM del tipo:  $(A_i, B_i)$ , dove ciascuna FAM ha 4 variabili di ingresso e 1 di uscita. Ciascuna FAM implementa le sue regole indipendenti.

Queste FAM parziali sono dette *elementari o minime*.

**Il numero di FAM cresce velocemente con il numero di variabili in uscita (e così il numero di regole).**



## Progettazione di un sistema fuzzy: struttura



Per tutti i modelli

- 1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
- 2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
- 3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input è possibile definire una classe di output (FAM).
- 4) Modalità di de-fuzzyficazione.

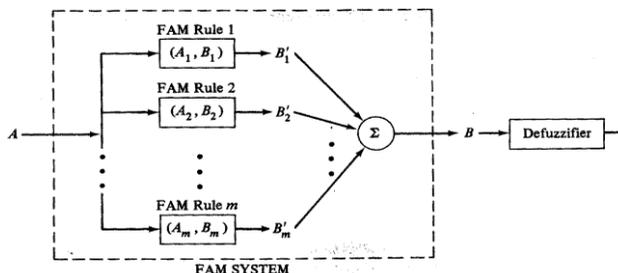
A.A. 2019-2020

31/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento



- 1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
- 2) Valutazione del grado di fit delle classi.
- 3) Identificazione delle regole attivate.
- 4) Valutazione del grado di fit della regola.
- 5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).

A.A. 2019-2020

32/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Riflessioni



- Da dove viene la conoscenza?
- Come si può tradurre la conoscenza in regole?
- Come si possono tarare le membership function?
- Implementazione di un controllore di temperatura che agisce su un fornello.
- Quale vantaggio c'è a defuzzyficare utilizzando la media pesata con l'integrale invece che la massima fit nel calcolo dell'uscita di un sistema fuzzy?



## Dalla misura dell'output alle classi fuzzy

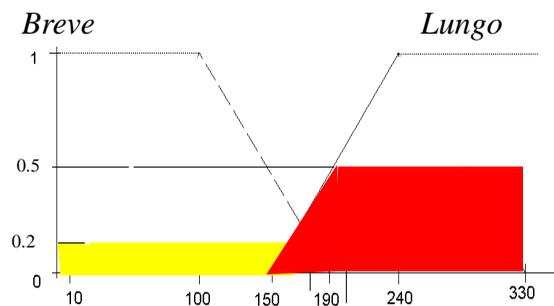


L'output viene mappata in classi fuzzy analogamente all'input.

Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare  
il semaforo?





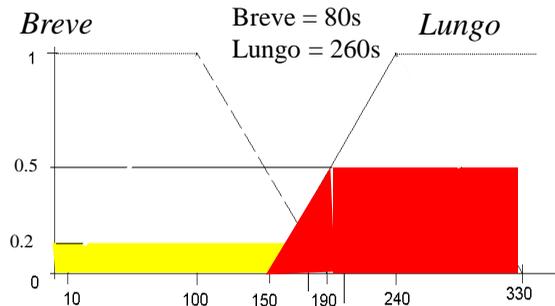
## Defuzzyficazione mediante il metodo del centroide



Ogni regola viene troncata in base al suo grado di attivazione.  
L'uscita troncata di ogni regola viene sommata.

$$Uscita = \frac{\sum F_i * c_i}{\sum F_i}$$

Il peso  $F_i$  può essere associato all'area.



Per l'appartenenza alla classe BREVE:  $172 * 0,2 + 18 * 0,2 / 2 = 36,2$

Per l'appartenenza alla classe LUNGA:  $(330 - 195) * 0,5 + 45 * 0,5 / 2 = 78,75$

Il verde del semaforo rimarrà acceso per  $(36,2 * 80 + 78,75 * 260) / (36,2 + 78,75) s = 203,3s$ .



## Esercizio



Si vuole realizzare un sistema di controllo fuzzy della frenata per un treno della metropolitana milanese. Il sistema deve essere in grado di erogare la forza frenante in modo tale che il treno si arresti al punto giusto, indipendentemente dal numero di passeggeri (indipendentemente dal carico). Si ha a disposizione la distanza rispetto al punto di frenata, in metri. Definire le variabili di ingresso e di uscita del sistema di controllo della frenata. Progettare il sistema di controllo fuzzy e definire almeno 4 regole di inferenza che agiscano sulle variabili di ingresso fuzzyficate. Come si può tenere conto del confort dei passeggeri?



# Overview



I fuzzy set

I fuzzy system

$\theta' \backslash \theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			