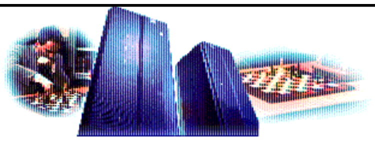
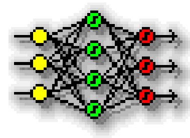




Sistemi Intelligenti
Stimatori e sistemi lineari - III

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@di.unimi.it

Overview

Modelli e problemi inversi

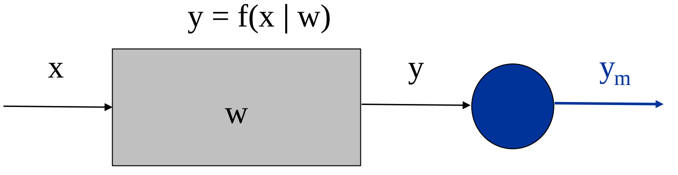
Sistemi lineari

Stima della causa

Stima dei parametri di un modello

Relazione tra soluzione ai minimi quadrati e stima a massima verosimiglianza

Modello



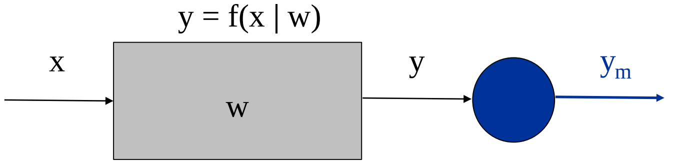
x – causa => y_m – effetto (misurato)

Control / Prediction: determine {y} from {x},{w}

Inverse problem I: determine cause {x} from {y_m},{w}

Inverse problem II: Identification: determine {w} from {x},{y_m} - ***Supervised learning***

I due problemi inversi con i modelli



x – causa => y – effetto (misurato)

Inverse problem I: determine cause {x} from {y} {w}

Inverse problem II: Identification: determine {w} from {x};{y} - ***Supervised learning***

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot \ldots p(y_N) = L(y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

$$\downarrow$$

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid x, w) = p(y_1 \mid x_1, w) \cdot p(y_2 \mid x_2, w) \cdot \ldots p(y_N \mid x_N, w) = L(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid x, w)$$

Overview

Modelli e problemi inversi

Sistemi lineari

Stima della causa

Stima dei parametri di un modello

Relazione tra soluzione ai minimi quadrati e stima a massima verosimiglianza

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ a_{1N}\, x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ a_{2N}\, x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots\ a_{MN}\, x_N = b_M$

{aij} – coefficienti in numero N x M
{xj} – incognite, N
{bj} – termini noti, M

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

NB le x qui sono i parametri w del modello.

Esempio:
$3x_1 + 2\, x_2 + \ldots\ldots\ 4x_N = 5$
$4x_1 - 2\, x_2 + \ldots\ldots\ 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + \ldots\ldots\ -3\, x_N = -1$

Matrici

$$A = \left[a_{i,j}\right] \qquad A^T = \left[a_{j,i}\right]$$

$$\alpha A = \left[\alpha a_{i,j}\right] \qquad C = A + B = \left[a_{i,j} + b_{i,j}\right]$$

$$C = AB = \left[c_{i,j}\right] \text{ dove } \left[c_{i,j}\right] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Prodotto degli elementi di una riga per gli elementi di una colonna.

Se A (n x m) ➔ B (m x p) ➔ C (n x p)

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ==> \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$$

Se il numero di righe = numero di colonne, matrice quadrata

Matrici (Proprietà)

La somma è associativa e commutativa (A + B) + C = A + (B + C).

Il prodotto è associativo rispetto alla somma ma non gode della proprietà commutativa:

(A+B)C = AC + BC.

AB $\neq$ BA

$$\mathrm{I} = \left[\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}\right] = \begin{cases} 1 & \text{per i = j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{matrice identità}$$

$$\mathrm{AI} = \mathrm{A} = \mathrm{IA}$$

$$\text{vettore come matrice colonna}: \overline{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_x \\ \mathrm{u}_y \\ \mathrm{u}_z \end{bmatrix}$$

$$\text{prodotto vettore matrice}: \overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}} \mathrm{M}$$

Minore complementare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A_{ij}* minore complementare di a_{ij} = determinante della matrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j di A.

$$A^*_{21} = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3*2 - (-2*1) = +8$$

Determinante di una matrice Quadrata

$$\boxed{\det(A) = \sum_i (-1)^{(i+j)} a_{ij} A^*_{ij} = \sum_j (-1)^{(i+j)} a_{ij} A^*_{ij}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ Elementi sulla riga

$\det(A) = (-1)^{(2+1)}$ (2) $[(3 * 2) - (-2 * 1)] + (-1)^{(2+2)}$ (0) $[(1*2) - (-2*1$
$(-1)^{(2+3)}$ (1) $[(1*1)-(3*1)] = -16 + 2 = -14$

Calcolo della matrice inversa

Matrice dei complementi algebrici

$A^{-1} = [1/\det(A)]\, A+$

$$A^{+}_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j} \det (A^{*}_{ji})}$$

Minore complementare della matrice A trasposta

Esempio di matrice Inversa

A = [$a_{i,j}$], **matrice quadrata.**

$A+_{ij}$ matrice dei complementi algebrici = minori complementari moltiplicati $(-1)^{i+j}$

$$A^{-1} = 1/\det(A) \begin{bmatrix} A^{+}_{11} & A^{+}_{21} & A^{+}_{n1} \\ A^{+}_{12} & A^{+}_{22} & A^{+}_{32} \\ A^{+}_{13} & A^{+}_{23} & A^{+}_{33} \end{bmatrix}$$

$A^{-1} A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{-1}{14} \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 & -[3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1] & 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \\ -[2 \cdot 2 - 1 \cdot 1] & 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 & -[1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2] \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 & -[1 \cdot 1 - 3 \cdot 1] & 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = (-1/14) \begin{bmatrix} -1 & -8 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -14 \qquad AA^{-1} = -1/14 \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3(-3) - 2 \cdot 2 & 1(-8) + 3 \cdot 4 - 2(2) & 1 \cdot 3 + 3(-5) - 2(-6) \\ 2(-1) + 0(-3) + 1(2) & 2(-8) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 0(-5) + 1(-6) \\ 1(-1) + 1(-3) + 2 \cdot 2 & 1(-8) + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2] & 1 \cdot 3 + 1(-5) + 2(-6) \end{bmatrix} = I$$

Se esiste, la matrice inversa è unica.

Rango di una matrice

Data una matrice A di ordine n (n x n),

una matrice A n x n ha rango m < n se e solo se esiste un suo minore di ordine m non nullo mentre sono nulli tutti i minori di ordine m + 1.

Una matrice A n x n ha rango n (rango pieno) se e solo se il suo determinante è diverso da 0

Rango di una matrice M x N è la dimensione massima di tutte le matrici quadrate estraibili da A e con determinante non nullo. Il rango è massimo quando non è inferiore alla dimensione minima della matrice.

Matrice inversa

$$A^{-1}A = I$$

La matrice inversa è definita per una matrice quadrata

Esiste ed è unica se $\det(A) \neq 0$

Numero di condizionamento di una matrice (quadrata): rapporto tra il valore singolare maggiore e minore (cf. Funzione cond in Matlab).
E' una misura di sensibilità della soluzione di un sistema lineare a variazioni nei dati.

Rango di una matrice

Data una matrice A di ordine n (n x n),

una matrice A n x n ha rango m < n se e solo se esiste un suo minore di ordine m non nullo mentre sono nulli tutti i minori di ordine m + 1.

Una matrice A n x n ha rango n (rango pieno) se e solo se il suo determinante è diverso da 0

Rango di una matrice M x N è la dimensione massima di tutte le matrici quadrate estraibili da A e con determinante non nullo. Il rango è massimo quando non è inferiore alla dimensione minima della matrice.

Altre proprietà delle matrici

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\det(\mathrm{diag}(W)) = \prod_k w_{k,k}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A\,B\,C)^T = C^T B^T A^T$

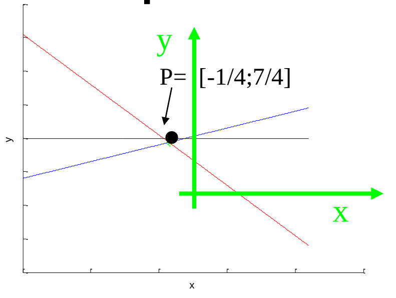
Una matrice U, si dice ortogonale se $U^T U = \mathrm{diag}(W)$.
Una matrice U, si dice ortonormale se $U^T U = I \Rightarrow U^{-1} = U^T$

Condizione di ortonormalità:
Il determinante è = 1.
La somma dei prodotti di due righe o di due colonne è = 0.
La somma dei quadrati degli elementi su righe e colonne = 1
Esempio notevole: **matrice di rotazione (cambio di sistema di riferimento)**.

Esempio

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$



$1\ x_1 - 1\ x_2 = -2$

$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

$y = x_2$

$x = x_1$

Risolvo per sostituzione: $x_1 = -2 + x_2$.

$-3(-2 + x_2) - x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 7/4$

$x_1 - 1/4 = 2 \Rightarrow x_1 = -1/4$

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{1N}\ x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{2N}\ x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\ x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{MN}\ x_N = b_M$

A x = b

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Esempio:

$3x_1 + 2\ x_2 + \ldots\ldots\ \ 4x_N = 5$

$4x_1 -2\ x_2 + \ldots\ldots\ \ 0.5\ x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\ x_2 + \ldots\ldots\ \ -3\ x_N = -1$

Sistema quadrato (N x N)

$a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\ a_{1N} x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots\ a_{2N} x_N = b_2$

....

$a_{N1}x_1 + a_{N2} x_2 + \ldots\ldots\ a_{NN} x_N = b_N$

Esempio:
$3x_1 + 2 x_2 + \ldots\ldots\ 4x_N = 5$
$4x_1 -2 x_2 + \ldots\ldots\ 0.5 x_N = 3$

....

$2x_1 + 3 x_2 + \ldots\ldots\ -3 x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A è N x N quadrata

$\mathbf{A\, x = b}$
$\mathbf{A^{-1}Ax = A^{-1}b}$
$\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}\, b}$ se $\mathbf{A^{-1}}$ esiste, 1 soluzione.

altrimenti, nessuna (rette parallele)
o
∞ soluzioni (rette coincidenti).

Soluzione dei sistemi lineari

Scrivo il sistema lineare: Ax = b

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$

$1\, x_1 - 1\, x_2 = -2$
$-3\, x_1 - 1\, x_2 = -1$

X è una soluzione se soddisfa tutte le equazioni del sistema stesso.

Soluzioni:
- ! ∃ Soluzione (sistema impossibile)
- ∃ Soluzione (sistema possibile)
  - 1 soluzione (sistema determinato)
  - > 1 soluzione (∞^k soluzioni – sistema indeterminato).

Soluzione di sistemi lineari quadrati

$x = A^{-1} b$

Condizione di esistenza dell'inversa è $\det(A) \neq 0$

Il sistema ammette 1 ed 1 sola soluzione se $\det(A) \neq 0$

Altrimenti: nessuna o infinite soluzioni

Risoluzione di un sistema 2x2

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$

$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$

Overview

Modelli e problemi inversi

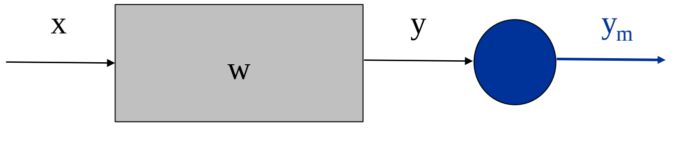
Sistemi lineari

Stima della causa

Stima dei parametri di un modello

Relazione tra soluzione ai minimi quadrati e stima a massima verosimiglianza

Problema inverso I: identificazione della causa



x – causa => y – effetto (misurato con errore/rumore)

Inverse problem I: determine cause {x} from measure {y} and model {w}

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot \ldots p(y_N) = L(y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

$$\downarrow$$

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid x, w) = p(y_1 \mid x_1, w) \cdot p(y_2 \mid x_2, w) \cdot \ldots p(y_N \mid x_N, w) = L(y_1, y_2, \ldots, y_N \mid x, w)$$

Esempio

$y = x + 2$

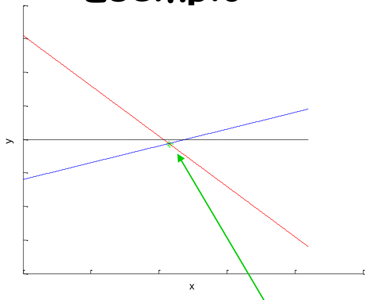
$y = -3x + 1$

$1\ x_1\ - 1\ x_2 = -2$

$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

$x_1 = x$

$x_2 = y$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Rango di A è pieno

det(A) = 1(-1)-(-1)(-3)=-1-3=-4

$A^{-1} =$

P = [-1/4 7/4]

$x_1 = -1/4$

$x_2 = 7/4$

$$P = A^{-1}\, b = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +3 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esempio di soluzione non univoca

$y = x + 2$

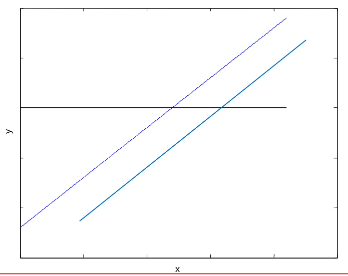
$2y = 2x + 3$

$1\ x_1\ - 1\ x_2 = -2$

$2\ x_1 - 2\ x_2 = -3$

$x_1 = x$

$x_2 = y$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Non esistono soluzioni

det(A) = 1(-2)-(-1)(2)=-2+2=0   La soluzione non esiste o ∞ soluzioni.

$y = x + 2$

$2y = 2x + 4$

La soluzione, se esiste non è unica: tutti i punti della retta soddisfano contemporaneamente le 2 equazioni. In questo caso ∞ soluzioni: rette sovrapposte.

Sistema M x N, M > N

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ a_{1N}\,x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ a_{2N}\,x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\ a_{MN}\,x_N = b_M$

Esempio:

$3x_1 + 2\,x_2 + \ldots\ldots\ 4x_N = 5$

$4x_1 - 2\,x_2 + \ldots\ldots\ 0.5\,x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\,x_2 + \ldots\ldots\ -3\,x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A x = b

A è M x N, M > N, non è una matrice quadrata.

1, nessuna, ∞ soluzioni.

Ho delle equazioni di troppo, devono essere correlate (combinate linearmente), perché il sistema ammetta soluzione.

Posso sempre calcolare la soluzione in forma matriciale.

Sistemi lineari con m > n

J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

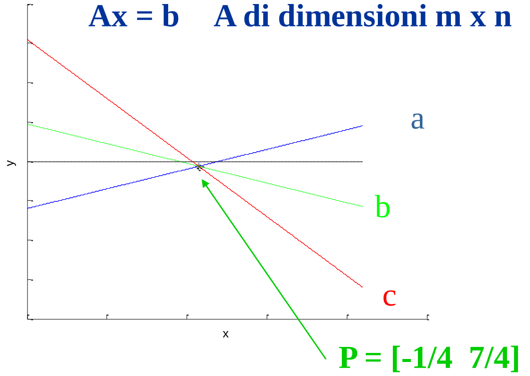
$y = x + 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 3/2$

Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.

Ax = b A di dimensioni m x n



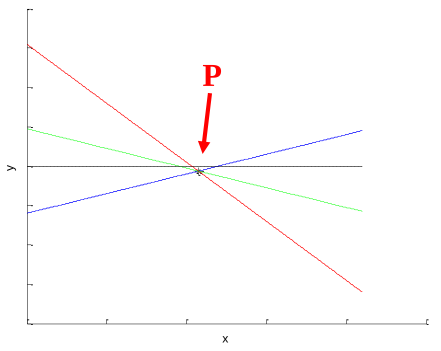
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

Relazione tra le equazioni (combinazione lineare)



α_1 (y - x - 2) +
α_2 (y +3x – 1) =
(y + x - 3/2)

In questo caso:
$\alpha_1 = -1/2$
$\alpha_2 = -1/2$

Tutte le rette per la soluzione P possono essere descritte come un fascio (di rette).
Un fascio di rette è univocamente identificato da due rette (che si incontrino in un punto).
La terza equazione è combinazione lineare delle prime due.

Sistema lineare: soluzione algebrica

Caso generale:

$$\mathbf{A\,x = b} \Longrightarrow \mathbf{A'\,A\,x = A'\,b} \Longrightarrow \mathbf{(A'\,A\,)^{-1}A'\,A\,x = (A'\,A\,)^{-1}A'\,b}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x = (A'A)^{-1}A'b}$$

(A’A) gioca il ruolo di A quadrata.

Quale criterio viene soddisfatto da **x**?

$C = (A^T * A)^{-1}$ è la matrice di covarianza (matrice quadrata n x n)

Sistemi lineari con m > n

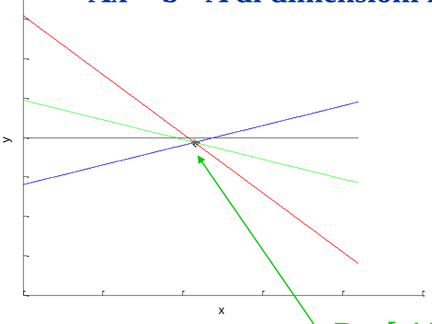
$y = x - 2$ $\qquad x_1 - x_2 = 2$

$y = -3x + 1$ $\qquad -3x_1 - x_2 = -1$

$y = -x + 3/2$ $\qquad -x_1 - x_2 = -3/2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Ax = b A di dimensioni m x n



P = [-1/4 7/4]

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$$P = C * A^T * b$$

P = [-0.25 +1.75]

intersezione

Riformulazione del problema con rumore

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ a_{1N}x_N = b_1 + \nu_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ a_{2N}x_N = b_2 + \nu_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots\ldots\ a_{MN}x_N = b_M + \nu_M$

Modello **Misure**

Errore di modello (sistematico, randomico). M x 1 => **Residuo.**

A x = b + N

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N
(Matrice di disegno)

N x 1
Vettore delle incognite

Quale criterio è soddisfatto da **x=(**x_1,x_2**)**? Qual'è la causa **x**, data la misura b?
b + ν rappresenta traslare la retta parallelamente a sé stessa.

Soluzione come problema di ottimizzazione

Funzione costo: $(Ax – b)^2 = \sum_k \nu_k^2 = \|Ax - b\|^2$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x, non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza (verticale) minima da tutte le rette.

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_k \nu_k^2 = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2$$

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{A}^{\mathbf{T}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

$\mathbf{A^TAx = A^Tb}$

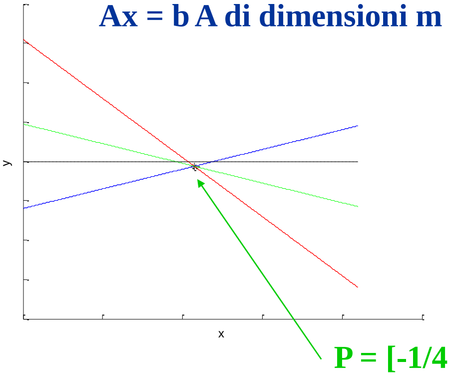
$\mathbf{x = (A^TA)^{-1}A^Tb}$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convessi) perchè il costo cresce sia che il modello sovrastimi che sottostimi le misure.
Inoltre, le derivate calcolate per imporre le condizioni di stazionarietà (minimo), sono relativamente semplici.

Sistemi lineari con m > n

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 3/2

Ax = b A di dimensioni m x n



P = [-1/4 7/4]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} +2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{det} = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P = C * A^T * b$ **P = [-0.25 +1.75]**

intersezione

$||Ax- b|| = 0$

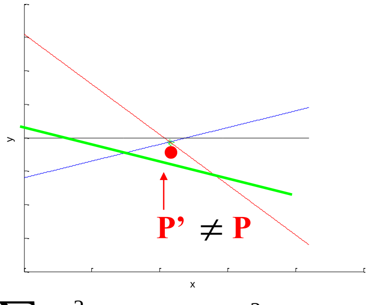
Sistemi lineari con m > n - non esiste soluzione (matematica)

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 1/2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$\sum_k v_k^{\;2} = \|Ax - b\|^2 = 0.333333$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P = C * A^T * b$ **P' = [-0.5 +1.4167]**

No intersezione

Commenti

$$\sum_k v_k^{\;2} = \|Ax - b\|^2 = \sum_k \| A_{k,*}x - b_k \|^2 =$$

$$\left[\left(A_{11}x_1 + A_{12}x_2\right) - b_1\right]^2 + \left[\left(A_{21}x_1 + A_{22}x_2\right) - b_2\right]^2 +$$

$$\left[\left(A_{31}x_1 + A_{32}x_2\right) - b_3\right]^2$$

Lo scarto misura la distanza (verticale) dalla retta

Overview

Modelli e problemi inversi

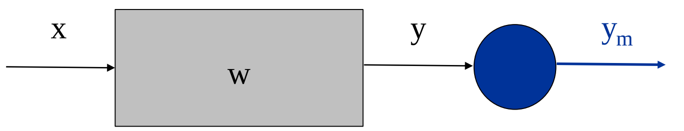
Sistemi lineari

Stima della causa

Stima dei parametri di un modello

Relazione tra soluzione ai minimi quadrati e stima a massima verosimiglianza

Problema inverso II: identificazione del modello



x – causa => y – effetto (misurato con errore/rumore)

Inverse problem II: determine model {w} from cause {x} and measure {y}

$$p(y_1, y_2, ..., y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot ... p(y_N) = L(y_1, y_2, ..., y_N)$$

$$\downarrow$$

$$p(y_1, y_2, ..., y_N \mid x, w) = p(y_1 \mid x_1, w) \cdot p(y_2 \mid x_2, w) \cdot ... p(y_N \mid x_N, w) = L(y_1, y_2, ..., y_N \mid x, w)$$

Estensione della stima a massima verosimiglianza ai modelli

$y = f(y \mid x, w)$ misuro $\{y_i\}$ in corrispondenza di $\{x_i\}$

Avrò che: $f(x_i, w) = y_i = y_{i,m} + \nu_i \Rightarrow f(x_i, w) - y_{im} = \nu_i$ the noise

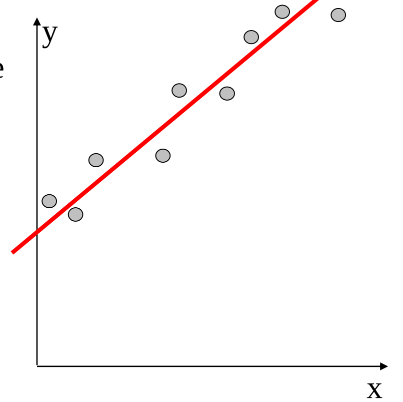
$$L(y \mid x,w) = \prod_i p(\nu_i) = \prod_i p(y_i - f(x_i; w)) =$$

$$\prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i|w)}{\sigma}\right)^2\right)} \right)$$

σ is equal for all samples
$(x_i;y_i)$ are the different samples

Fitting di una retta

Vogliamo stimare i parametri di una retta: $y = mx + q$, con m e q incogniti: $X = \{m, q\}$



Abbiamo a disposizione N misure rumorose effettuate: $Y = \{y_{im}; x_i\}$, con rumore su y_i

Sappiamo che le y_{im} sono affette da rumore Gaussiano a media nulla. In pratica:
$y_{im} = y_i + \nu_i$ dove ν_i è l'errore di misura.

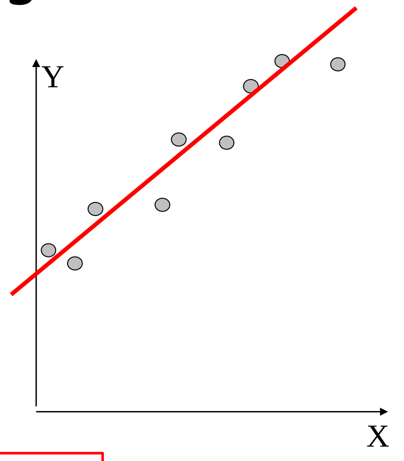
Possiamo anche scrivere che:
$y_{im} = y_i + G(\mu, \sigma^2)$ indica una distribuzione monodimensionale gaussiana a media μ e varianza σ^2. Errore di misura: $G(0, \sigma^2)$

Stima ai minimi quadrati e verosimiglianza

Per ogni punto, dovrebbe valere $y_i = mx_i + q$.

Ma c'è l'errore di misura, misuriamo in realtà $y_i + \nu_i$.

Cerchiamo i parametri m e q che sono più verosimili.



Cosa vuol dire che sono più verosimili?
Quanto sono più verosimili?

Overview

Modelli e problemi inversi

Sistemi lineari

Stima della causa

Stima dei parametri di un modello

Relazione tra soluzione ai minimi quadrati e stima a massima verosimiglianza

Relazione con la soluzione dei sistemi lineari

- Nel caso precedente le incognite erano (x,y) coordinate del punto
- In questo caso le incognite sono (m,q) i parametri della retta.

- Nel caso precedente i dati erano i parametri di ogni retta (m_i,q_i)
- In questo caso i dati sono i punti misurati sulla retta (x_i,y_i)

Funzione di verosimiglianza

- Siano date **N variabili casuali <u>indipendenti</u>**… Quale è la **probabilità di misurare il vettore $[y_1, \ldots, y_N]$**?

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot \ldots p(y_N) = L(y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

- E' il prodotto delle probabilità semplici.

- Questa è la **Funzione di verosimiglianza** o **funzione di Likelihood**, L(.)

- In questo caso le y sono legate alle x da f(x).

Stima alla massima verosimiglianza

- Se **massimizziamo** L=L(**y** | x, w) rispetto a w
- troviamo i parametri w tali per cui è massima la probabilità di misurare il vettore di dati **y = {**y_i, i=1…N}.
- **Stima alla massima verosimiglianza**.
- Più in generale, le variabili possono avere densità di probabilità diverse, ciascuna descritta da un set di parametri. I parametri delle diverse densità di probabilità possono essere calcolati utilizzando l'approccio alla massima verosimigianza…
- La funzione di verosimiglianza dipende dai parametri che definiscono le densità di probabilità delle variabili casuali che entrano nella verosimiglianza…
- Massimizzando la funzione di verosimiglianza rispetto a tali parametri se ne effettua la stima in modo tale che il vettore osservato y = {y_i } i =1…N sia massimamente probabile (massima verosimiglianza).

Stima ai minimi quadrati e verosimiglianza per modello lineare

- Impostiamo il problema scrivendo la funzione di verosimiglianza e massimizzando tale funzione rispetto a m e q…
- Scriviamo prima di tutto la densità di probabilità di ottenere y_i per ciascun dato:

$$p(x_i, y_i \mid m, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - (mx_i + q)}{\sigma}\right)^2\right]$$

Dove m e q non sono note.

Stima a massima verosimiglianza

Sapendo che le misure sono indipendenti, possiamo scrivere la probabilità di ottenere le N misure $\{y_i\}$: funzione di verosimiglianza.

Scriviamo il logaritmo negativo della verosimiglianza:

$$f(y_1, y_2 .... y_N; m, b; x_1, x_2 ..... x_N) = -\sum_{i=1}^{N} \ln\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - mx_i - b}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) - \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - mx_i - b}{\sigma} \right)^2 \right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - b)^2$$

Stima a massima verosimiglianza

- E massimizziamo L(.) ponendo a zero le derivate prime rispetto a m:

$$\frac{\partial f(y_1, y_2 ..... y_N; m, b; x_1, x_2 ..... x_N)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left[-\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q)^2 \right] =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q) \cdot 2 \cdot (-x_i) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q) \cdot x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q) \cdot x_i = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) \right] - m \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i^2) \right] - q \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$m \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i^2) \right] + q \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i) \right] = \left[\sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) \right]$$

1ª equazione

Stima a massima verosimiglianza

... e a q:

$$= 0 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q) \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} (y_i - m \cdot x_i - q) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\sum_{i=1}^{N} (y_i) \right] - m \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i) \right] - q \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (1) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$m \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i) \right] + q \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} (1) \right] = \left[\sum_{i=1}^{N} (y_i) \right]$$

2a equazione

Stima a massima verosimiglianza

$$\left[\sum_{i=1}^{N} (x_i^2) \right] \cdot m + \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i) \right] \cdot q = \left[\sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) \right]$$ 1° equazione

$$\left[\sum_{i=1}^{N} (x_i) \right] \cdot m + \left[\sum_{i=1}^{N} (1) \right] \cdot q = \left[\sum_{i=1}^{N} (y_i) \right]$$ 2° equazione

Le incognite, m e b, compaiono con esponente 1 => equazioni lineari in m e q
Potrei risolvere per sostituzione

Esempio

y = 2 x + 1   m = 2; q = 1

Misuro e ottengo:

- $x_1 = 1$; $y_1 = 2{,}8$
- $x_2 = 0$; $y_2 = 1{,}2$

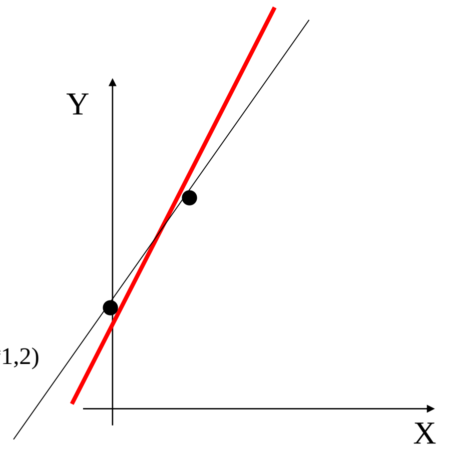
Quanto varranno le stime di m e q?

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{\,2}\right)\right]\cdot m+\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\right)\right]\cdot q=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i\cdot x_i\right)\right]$$

=> (1*1 + 0*0)m + (1 + 0) q = (1 * 2,8 + 0 *1,2)

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\right)\right]\cdot m+\left[\sum_{i=1}^{N}\left(1\right)\right]\cdot q=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i\right)\right]$$

=> (1 + 0) m_e + 2 q_e = (2,8+1,2)



$m_e + q_e = 2{,}8$ $m_e+2q_e = 4$ => per sottrazione $q_e = 1{,}2$; $m_e = 1{,}6$ NB 2,8 = 1,6*1 + 1,2

Dalle equazioni delle rette al sistema

$\{y_i = m\, x_i + q\}$

$A_i = [x_i\ 1]$

b = Au

$$A_{Mx2} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ . & . \\ x_M & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{2x1} = \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix}$$

$$b_{Mx1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ y_M \end{bmatrix}$$

Dal Sistema alla soluzione ai minimi quadrati

$$A^TA = \begin{bmatrix} x_1 & . & x_M \\ 1 & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ . & . \\ x_M & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(x_i^{\,2}\right)\right] & \left[\sum_{i=1}^{N} \left(x_i\right)\right] \\ \left[\sum_{i=1}^{N} \left(x_i\right)\right] & N \end{bmatrix}$$

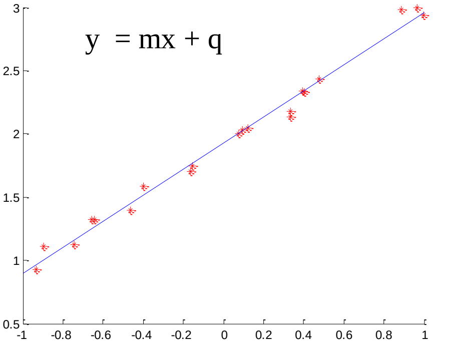
$$A^Tb = \begin{bmatrix} x_1 & . & x_M \\ 1 & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i \cdot x_i\right) \\ \sum_{i=1}^{N} \left(y_i\right) \end{bmatrix}$$

Equazioni normali: $\mathbf{A^TAx = A^Tb}$

Esempio - Caso 2D (2 parametri)

N = 20 punti
$\sigma_o^2 = 0.01$
m reale = 1
q reale = 2

m stimato = 0.9931
q stimato = 2.0106



Cosa vuol dire che {m,q} sono i più verosimili?
Quanto sono più verosimili?

Stima a massima verosimiglianza e minimi quadrati

$\mathbf{A^T A x = A^T b}$

$\mathbf{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$

La soluzione a massima verosimiglianza, quando il rumore è Gaussiano a media nulla, coincide con la soluzione ai minimi quadrati del sistema lineare associato (la soluzione ai minimi quadrati è un caso particolare della stima alla massima verosimiglianza).

La soluzione è quella che minimizza lo scarto quadratico medio dei residui, ovverosia è a minima varianza.

La stima a massima verosimiglianza è un approccio generale, e si presta a p(x) di qualsiasi forma. La Gaussiana consente di ottenere una formulazione lineare del problema.

Stima ai minimi quadrati e verosimiglianza

- Nella soluzione ai minimi quadrati del sistema lineare Ax=b si definisce un vettore errore v = Ax - b;
- Nel caso di soluzione “perfetta” v = 0;
- Dal momento che abbiamo un numero di equazioni maggiore rispetto al numero di incognite, cerchiamo il vettore e a norma minima;
- In pratica cerchiamo x t.c. $v^T v = \Sigma_i v_i^2$ è minimo.

Giustificazione statistica

- **C'è un solo insieme vero dei parametri**, mentre ci **possono essere infiniti universi di dati per effetto dell'errore di misura**.

- La domanda quindi più corretta sarebbe: "Dato un certo insieme di parametri, qual'è la probabilità che questo insieme di dati sia estratto?" (più correttamente si parla di densità di probabilità?)

- Cioè, **per ogni insieme di parametri, calcoliamo la probabilità che i dati siano estratti. Ovverosia la likelihood (verosimiglianza) dei dati, dato un certo insieme di parametri.**

La stima ai minimi quadrati dei parametri è equivalente a determinare i parametri che massimizzano la funzione di **verosimiglianza** sotto l'ipotesi di errore **Gaussiano a media nulla**.

Overview

Modelli e problemi inversi

Sistemi lineari

Stima della causa

Stima dei parametri di un modello

Relazione tra soluzione ai minimi quadrati e stima a massima verosimiglianza