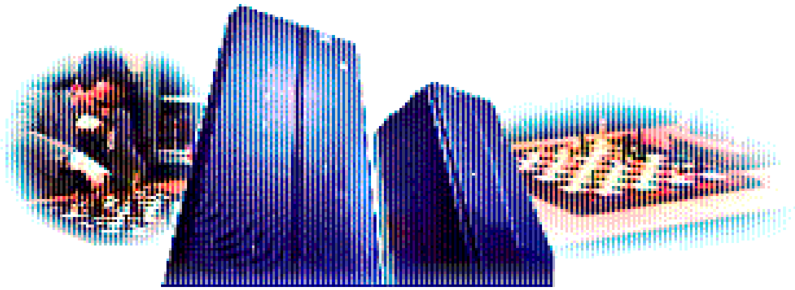
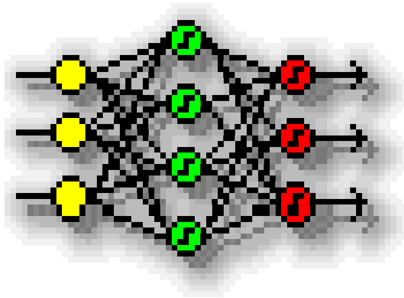




Sistemi Intelligenti
Introduzione al calcolo delle probabilità - II

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Overview

Esempi sul teorema di Bayes

Densità di probabilità

Stima alla massima verosimiglianza

Teorema di Bayes

$$P(X,Y) = P(Y|X)P(X) = P(X|Y)P(Y)$$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y \mid X)P(X)}{P(Y)}$$

X = causa   Y = effetto

$$P(\text{causa}|\text{effetto}) = \frac{P(Effetto|Causa)\,P(Causa)}{P(Effetto)}$$

We usually do not know the statistics of the cause, but we can measure the effect and , through frequency, build the statistics of the effect or we know it in advance.

A doctor knows P(Symptons|Causa) and wants to determine P(Causa|Symptoms)

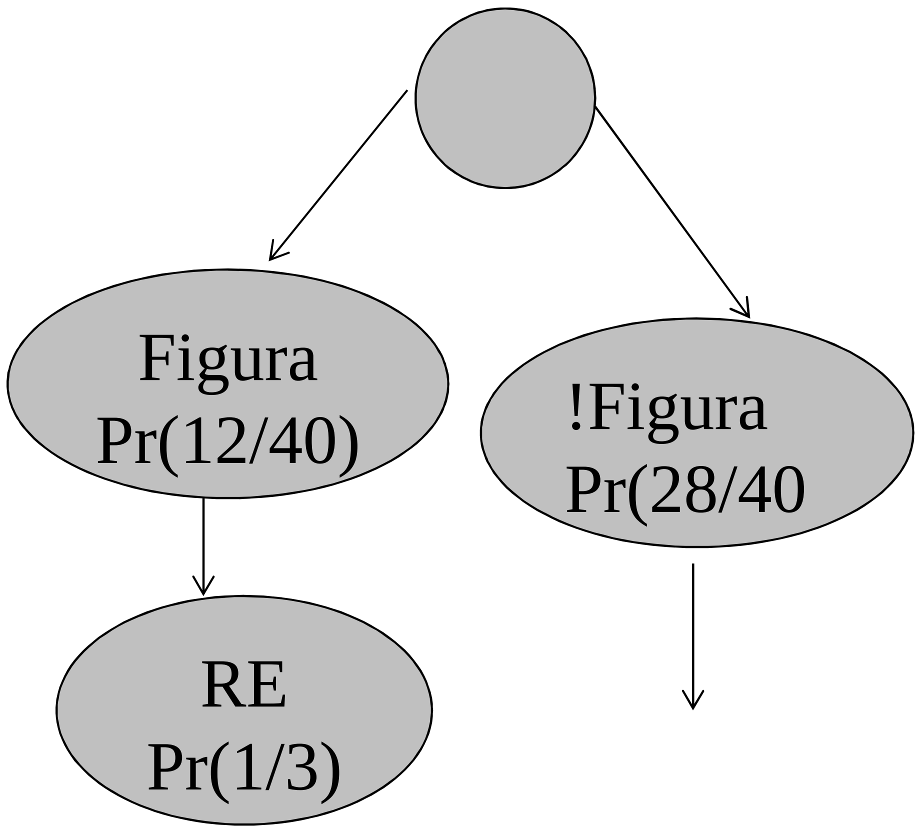
Probabilità condizionata

Consideriamo un mazzo di 40 carte:
vogliamo valutare quale sia la probabilità che una carta estratta a caso sia un re (probabilità semplice)
vogliamo valutare quale sia la probabilità che una carta estratta a caso sia un re, sapendo di avere estratto una figura (probabilità condizionata)

P(Y) = probabilità che sia un re
P(X) = probabilità che sia una figura

$P(Y \mid X) = 1/3$

$P(Y) = P(Y/X)\, P(X) = 1/3 \; 12/40 = 4/40$



Esempio I

In una città lavorano due compagnie di taxi:
blue e verde: $X = \{T_{blu}, T_{verde}\}$ con una
Distribuzione di 85% di taxi verdi e 15% di taxi blu.

Succede un incidente in cui è coinvolto un taxi.

Un testimone dichiara che il taxi era blu. Era sera e l'affidabilità del testimone è stata valutata dell'80%.

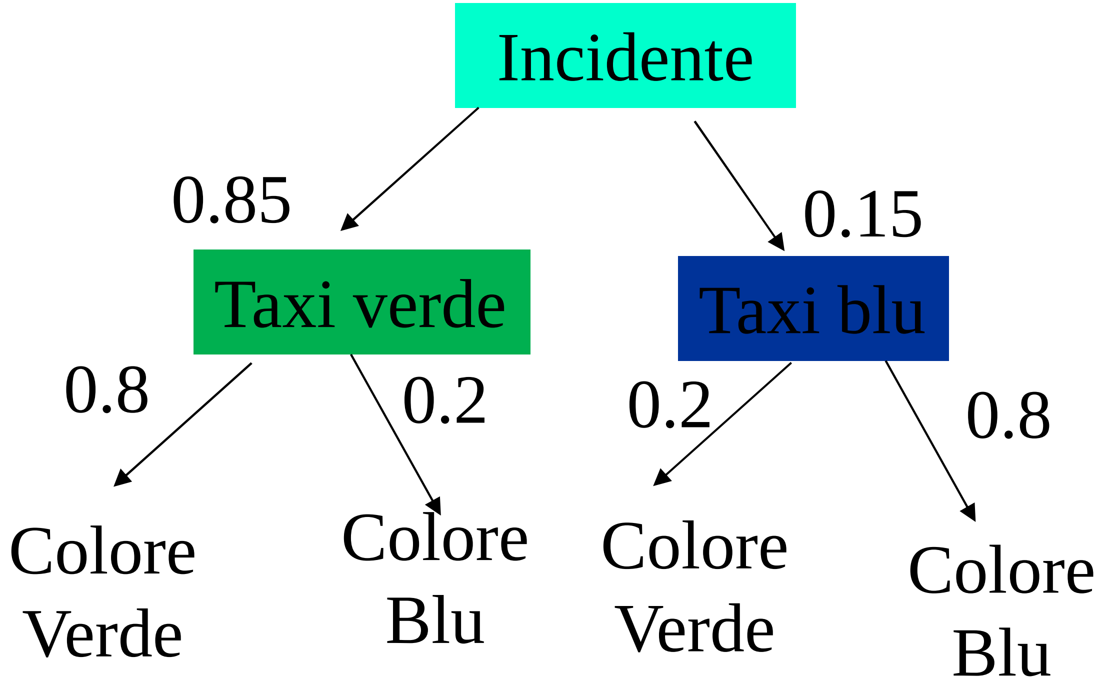
Qual è la probabilità che il taxi fosse effettivamente blu?

Non è l'80%!

Esempio - I

$X = \{T_{blu}, T_{verde}\}$
"Causa"

$Y = \{C_{blu}, C_{verde}\}$
"Effetto"

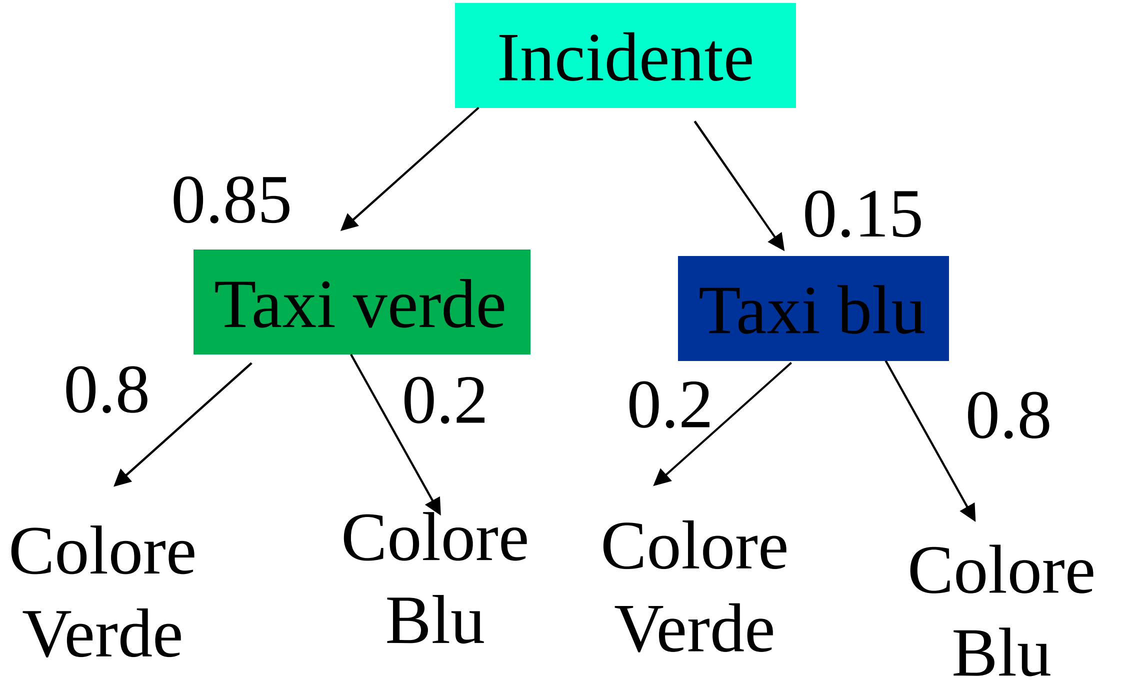


$$P(X=T_{blue}|Y_{blue}) = P(Y_{blue}|X_{blue})P(X_{blue}) / P(Y_{blue})$$

$P(X_{blue})$ = Probabilità a-priori = 0.15
$P(Y_{blue}|X_{blue})$ = Probabilità condizionata = 0.8

Esempio - I

$X = \{T_{blu}, T_{verde}\}$
$Y = \{C_{blu}, C_{verde}\}$



Inverto la relazione tra causa ed effetto applicando Bayes:

$P(X=T_{blu} \mid Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu})$

$P(Y_{blu})$ = Probabilità marginale di Y (probabilità semplice) =

$P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) + P(Y_{blu}|X_{verde})P(X_{verde}) = 0.8*0.15 + 0.2*0.85 = 0.29 > 0.15!!$

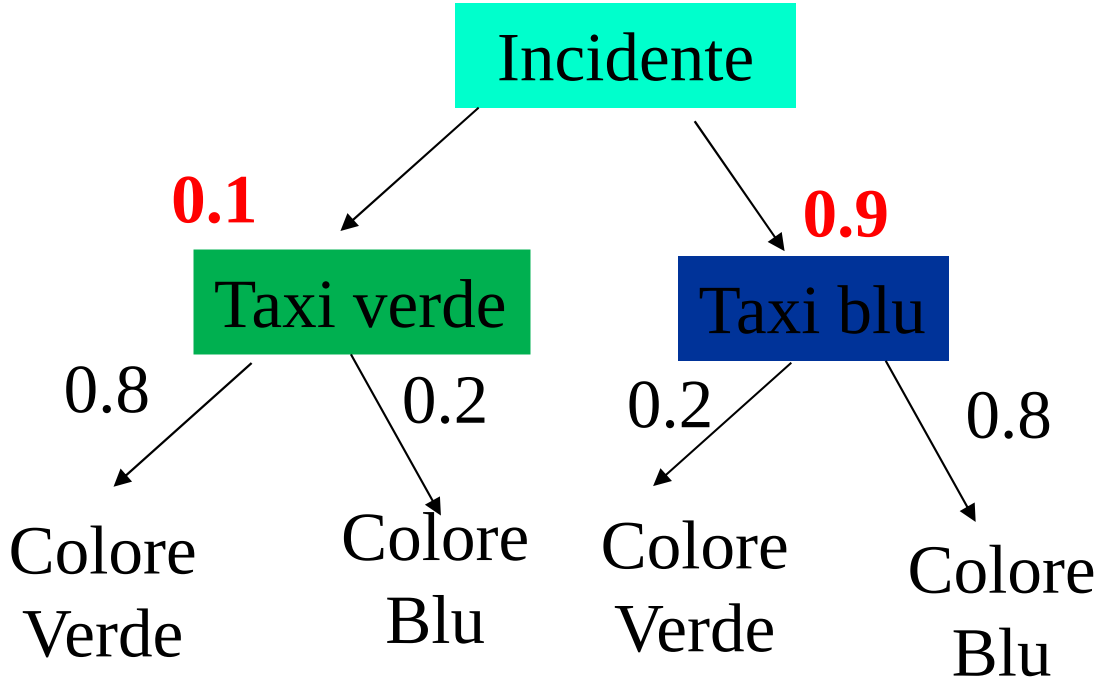
$P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.8*0.15 / 0.29 = 0.41$

Pesano anche gli “errori” commessi quando il testimone vede un taxi verde!

Esempio - I

Cambio la distribuzione dei taxi

$X = \{T_{blu}, T_{verde}\}$
$Y = \{C_{blu}, C_{verde}\}$



$P(X=T_{blu}|Y_{blu}) =$
$P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu})$

$P(Y_{blu})$ = Probabilità marginale di Y (probabilità semplice) =

$$P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) + P(Y_{blu}|X_{verde})P(X_{verde}) = 0.8*0.9 + 0.2*0.1 = 0.74$$

$$P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.8*0.9 / 0.74 = 0.97$$

Affidabilità della stima - SW in Matlab

$N = 10 \rightarrow$ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.5$

$N = 100 \rightarrow$ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.3235$

$N = 1,000 \rightarrow$ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4$

$N = 10,000 \rightarrow$ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4157$

$N = 100,000 \rightarrow$ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4173$

$N = 1,000,000 \rightarrow$ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4158$

Possiamo dare degli intervalli di confidenza?
Quanto deve essere grande N per ottenere una certa confidenza?

Estensione a più variabili

$P(X| Y_1;Y_2)$ if $(P(Y_1) = y_1$ and $P(Y_2) = y_2$ then $P(X) = x$

$Z = Y_1$ *and* Y_2

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

Dalla tabella delle probabilità congiunte ricaviamo:

P(carie; Z) = P(mal di denti; cavità) = 0,108

P(carie | Z) = P(carie ; Z) / P(Z) = 0,108 / 0,124 = 0,871

Estensione a più variabili

$P(X| Y_1;Y_2)$ if $(P(Y_1) = y_1$ and $P(Y_2) = y_2$ then $P(X) = x$

$Z = Y_1$ *and* Y_2

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

Applichiamo il teorema di Bayes

$P(X \mid Y_1 \text{ and } Y_2) = P(Y_1 \text{ and } Y_2 \mid X) * P(X)$

Abbiamo bisogno di conoscere come si comporta Z per ogni valore di X, cioè (Mal di denti *and* Cavità) in funzione di Carie. Diventa difficoltoso quando le variabili diventano tante: per capire se c’è una carie possiamo misurare anche: raggi-X, igiente orale....

Conditional independence

$P(X \mid Y_1 \text{ and } Y_2) = P(Y_1 \text{ and } Y_2 \mid X) * P(X)$

Introduciamo un'altra ipotesi. Cosa succede se Y_1 e Y_2 sono indipendenti? Dipendono entrambe da X ma non dipendono tra di loro.

Sono cioè **condizionatamente indipendenti**, cioè vale che:
$P(Y_1 \text{ and } Y_2 \mid X) * P(X) = P(Y_1 \mid X) * P(Y_2 \mid X)$

In questo caso:

P(cavità and mal di denti | carie) = P(cavità | carie) * P(mal di denti | carie) che diventa più trattabile.

P(Carie ; cavità ; mal di denti) = P(Carie) [P(Cavità | Carie)*P(Mal di denti | carie)

Modello Naive Bayes   Gli effetti sono indipendenti tra loro e dipendono da una stessa causa

In generale: $P(\text{Causa} \mid \text{Effetto}_1 \text{ and } \text{Effetto}_2 \text{ and} \ldots \text{Effetto}_N) = \boxed{\prod_{i=1}^{N} P(Effetto_i \mid Causa)}$

Conditional independence at work

$P(X| Y_1;Y_2)$ if $(P(Y_1) = y_1$ and $P(Y_2) = y_2$ then $P(X) = x$

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

$P(X \mid Y_1 \text{ and } Y_2) = P(Y_1 \text{ and } Y_2 \mid X) * P(X) / (P(Y_1) \text{ and } P(Y_2))$

P(carie | cavità and mal di denti) = P(cavità and mal di denti and carie) / P(cavità and mal di denti) = 0,108 / 0,124 = 87,1%

P(carie | cavità and mal di denti) = P(cavità and mal di denti | carie) * P(carie) ~~/ P(cavità and mal di denti)~~

P(carie | cavità and mal di denti) = P(cavità | carie) * P(mal di denti | carie) * P(carie) ~~/ (P(cavità) and P(mal di denti))~~

P(cavità | carie) = 0,18 / 0,2 = 0,9

P(carie) = 0,2

P(mal di denti | carie) = 0,12 / 0,2 = 0,6

P(carie | cavità and mal di denti) = (0,9* 0,6 * 0,2) / (0,124) = 87,1%

Esempio - II

Lo strumento principe per lo screaning per il tumore al seno è la radiografia (mammografia).

Definiamo X la situazione della donna: X={sana, malata}
Definiamo Y l'esito della mammografia: Y={positiva, negativa}

La sensitività della mammografia è intorno al 90%:

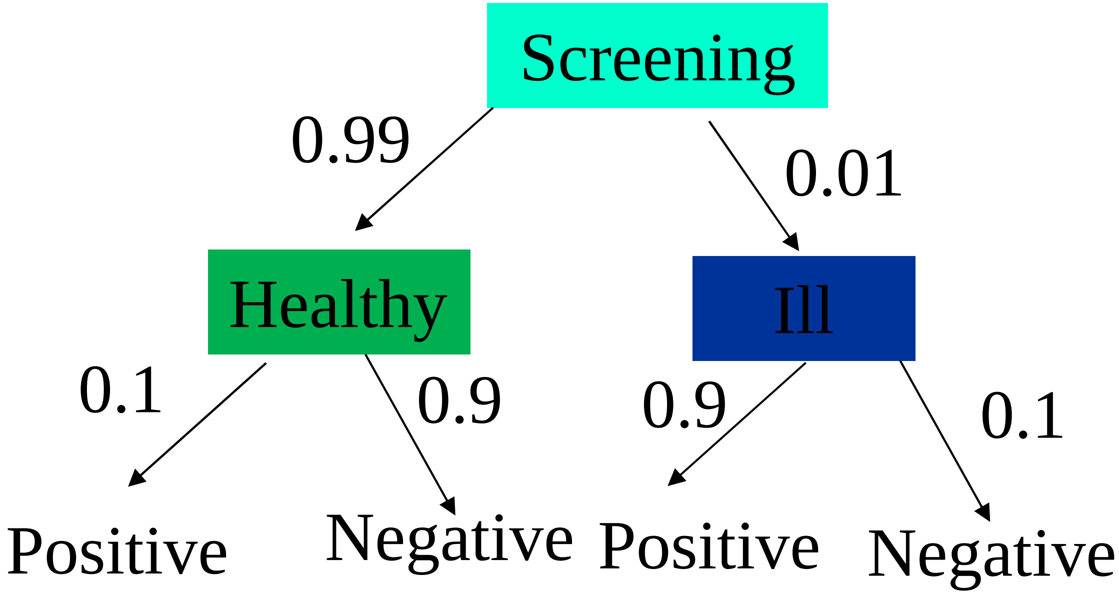
$$\text{sensitività} = \frac{n_{positive}}{N_{ill}} \qquad \Rightarrow P(Y=\text{positive} \mid X=\text{ill})$$

La specificità della mammografia è anch'essa intorno al 90%:

$$\text{specificità} = \frac{n_{negative}}{N_{healthy}} \qquad \Rightarrow P(Y=\text{negative} \mid X=\text{healthy})$$

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}



P(Y=Positive | X=Ill) = 0.9 * 0.01 = 0.009
P(Y=Positive | X=Ill) = 0.1*0.99 = 0.099

P(Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.009 + 0.099 = 0.108

10.8% di probabilità di avere un esame positivo a fronte di uno 0.01% di donne malate! Solo lo 0,9% proviene da donne effettivamente malate, le altre sono false positive

Esempio - II

Qual'è la probabilità che una donna sia veramente malata se il test risulta positivo?

Applichiamo Bayes:
P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive)

P(X = Ill) = 0.01

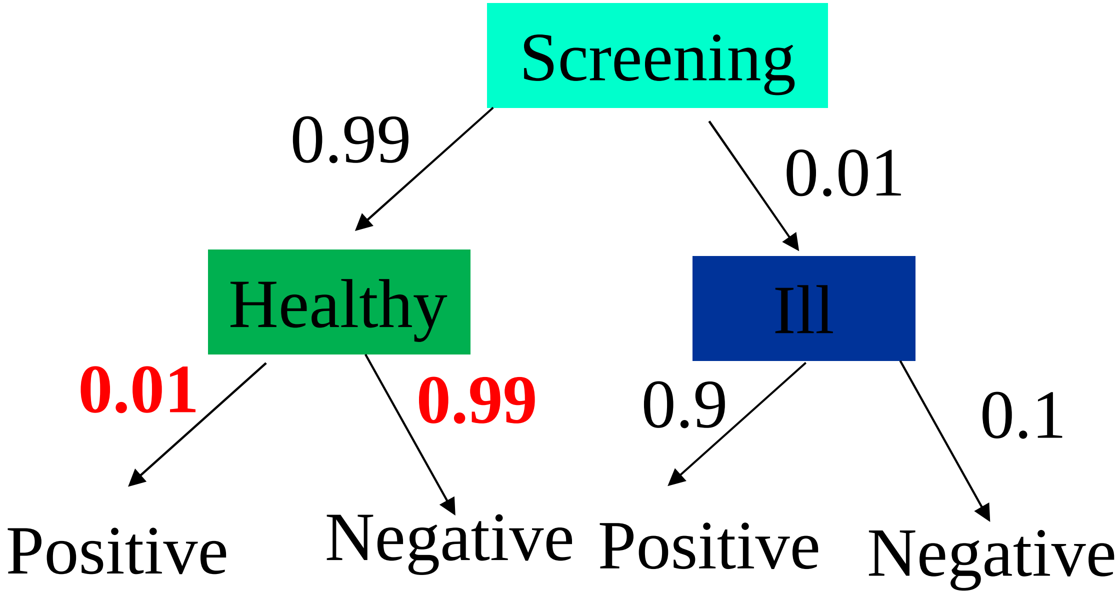
Il PPV (Positive Predictive Value) è:
P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive) =
0.09 / 0.108 = 0.083 (8.3%)

Solo 8.3% delle donne con mammografia positiva sono effettivamente ammalate.

Analizzando la formula del teorema di Bayes, dove ha senso investire per ottenere un rendimento delle screening maggiore?

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}



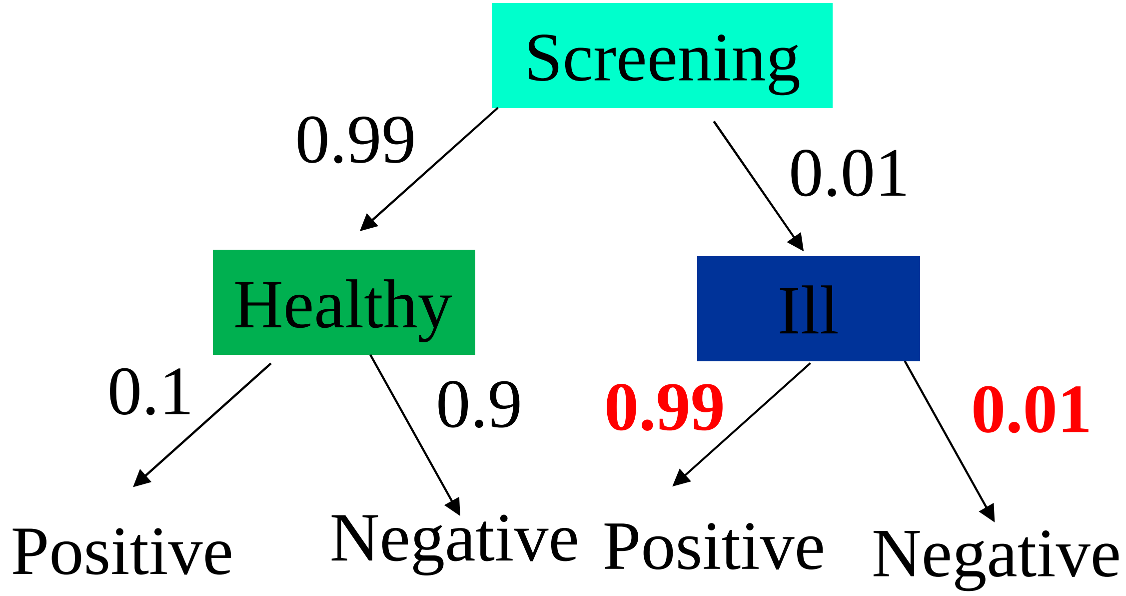
P(Y=Positive | X=Ill) = 0.9 * 0.01 = 0.009

P(Y=Positive = P(Y=Positive | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.009 + 0.99*0.01 = 0.0189

P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive) =
= 0.009 / 0.0189 = 0.476 = 47,6% >> 8.3%

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}



P(Y=Positive | X=Ill) = 0.99 * 0.01 = 0.0099

P(Y=Positive = P(Y=Positive | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.0099 + 0.99*0.1 = 0. 1098

P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive) =
= 0.0099 / 0.1098 = 0.09 = 9% > 8.3%.

Riepilogo

$$P(X|Y) = \frac{P(Y \mid X)P(X)}{P(Y)} = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$$

Teorema di Bayes

Lega probabilità condizionate, congiunte, semplici (marginali)

Consente di inferire la probabilità di un evento causa, X, a partire dalla probabilità associata alla frequenza di una certa misura, effetto, P(Y), dalla frequenza relativa dell'evento associato alla misura, P(Y), e dalla probabilità nota a-priori, P(X), della causa.

La probabilità P(X|Y) viene per questo detta probabilità a-posteriori ed è una probabilità condizionata.

Viene utilizzata nei problemi inversi.

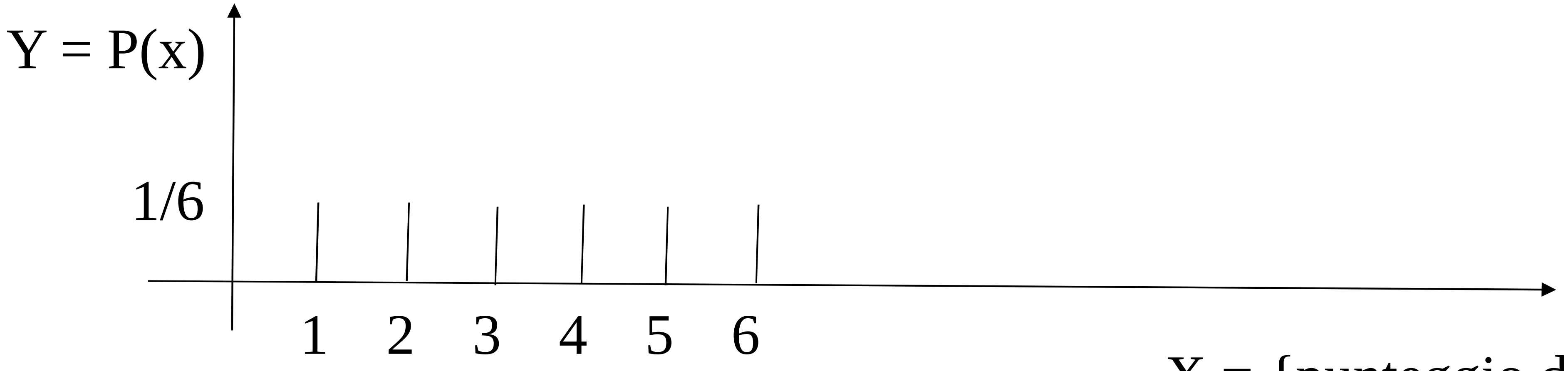
Overview

Esempi sul teorema di Bayes

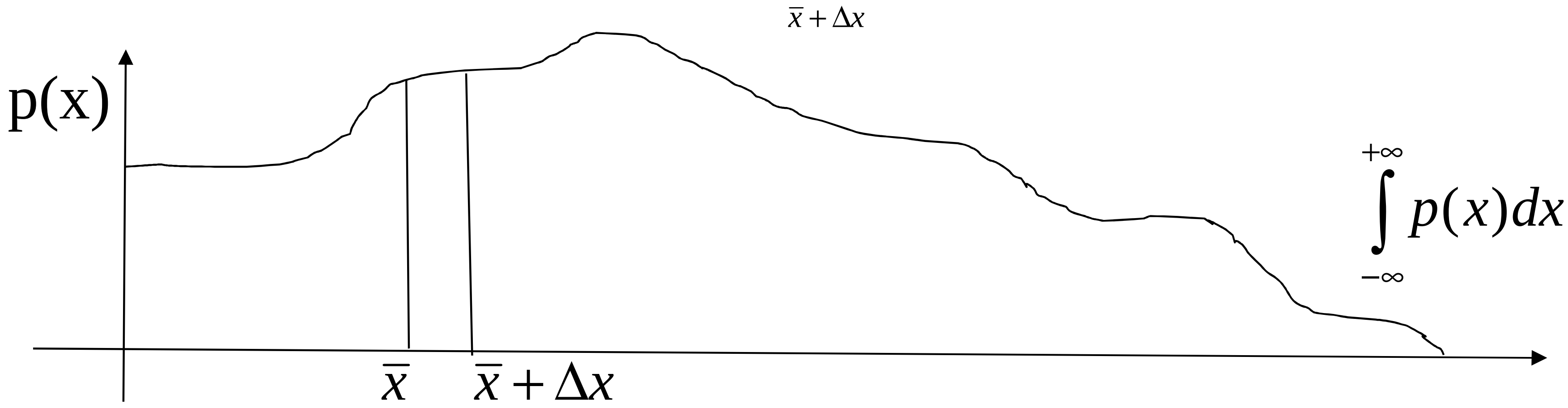
Densità di probabilità

Stima alla massima verosimiglianza

La probabilità nel caso continuo



X = {punteggio dado}



$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$X \in C^0$

$$P(x \in [\bar{x}, \bar{x}+\Delta x]) \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} p(x)dx$$

Definizione di p(x)

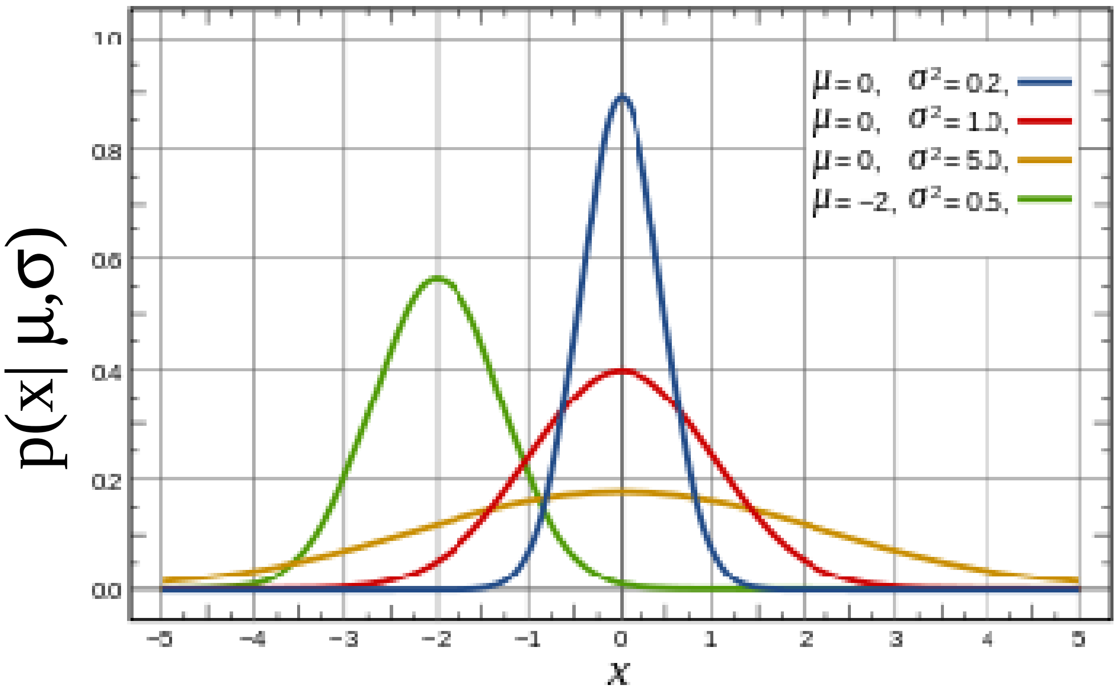
Caso discreto: prescrizione della probabilità per ognuno dei finiti valori che la variabile X può assumere: P(X).

Caso continuo: i valori che X può assumere sono infiniti. Devo trovare un modo per definirne la probabilità. Descrizione **analitica** mediante la funzione densità di probabilità. Si considera la probabilità che x cada in un certo intervallo.

Valgono le stesse relazioni del caso discreto, dove alla somma si sostituisce l'integrale.

$$P(X = x \in [\bar{x}, \bar{x} + \Delta x]) \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy$$

Distribuzioni notevoli: la Gaussiana



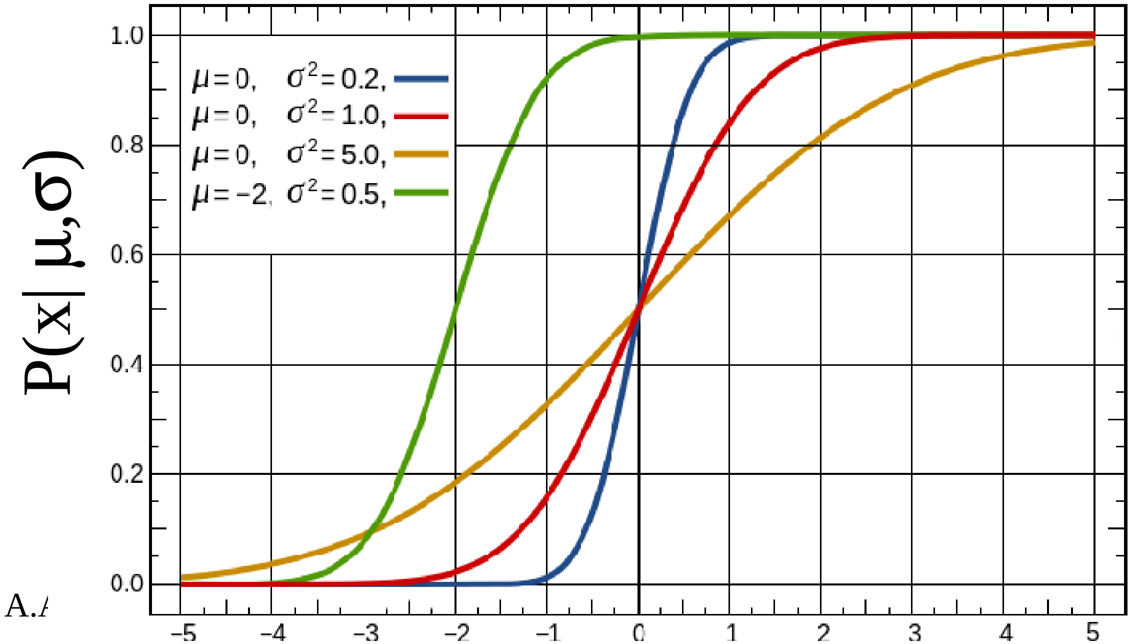
$$p(x|\mu,\sigma)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\Sigma^2}\right)^D}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\Sigma}\right)^2\right]$$

D = dimensione, in questo caso D = 1

Pr(| X-μ | < σ) = 0.68268

Pr(| X-μ | < 2σ) = 0.95452

Pr(| X-μ | < 3σ) = 0.9973



I momenti di una variabile statistica

$$\mu^k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k \; p(x)dx$$ Momento rispetto ad a, solitamente alla media

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p(x)$$ Valore atteso (Expeted value) di X = media distribuzione

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \; p(x)$$ Varianza (σ^2)

$$E\left[(X-\mu)^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 \; p(x)$$ Asimmetria

$$E\left[(X-\mu)^4\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^4 \; p(x)$$ Kurtosi – peso delle code di p(x)

Overview

Esempi sul teorema di Bayes

Densità di probabilità

Stima alla massima verosimiglianza

Nozioni di base

Variabili indipendenti: $p(y_1,y_2) = p(y_1)p(y_2)$

Gaussiana: siano date due realizzazioni **indipendenti** della stessa variabile casuale Y… Quale è la probabilità di misurare y_1 nella prima realizzazione e y_2 nella seconda realizzazione (estrazione con ripetizione)?

$$p(y_1 \mid \mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$p(y_2 \mid \mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$p(y_1, y_2 \mid \mu,\sigma) = p(y_1 \mid \mu,\sigma) \cdot p(y_2 \mid \mu,\sigma) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Il risultato dipende dai parametri della Gaussiana che descrive l’errore di misura: μ e σ.
Qual’è il valore più ragionevole per μ e σ?

Funzione di verosimiglianza

- Siano date **N variabili casuali <u>indipendenti</u>**… Quale è la **probabilità di misurare il vettore [$\mathbf{y_1}$, …, $\mathbf{y_N}$]**?

$$p(y_1, y_2, ..., y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot ... p(y_N) = L(y_1, y_2, ..., y_N)$$

- E’ il prodotto delle probabilità semplici.

- Questa è la **Funzione di verosimiglianza** o **funzione di Likelihood**, L(.)

Funzione di verosimiglianza (riassunto)

- Data una serie di misure y_i i=1…N di variabili casuali…
- … Nota la distribuzione statistica dell'errore sulla misura espressa come densità di probabilità di ciascuna variabile casuale…
- … Sotto l'ipotesi che le variabili siano tra loro indipendenti…
- … E' possibile scrivere la funzione di verosimiglianza come il prodotto delle probabilità di ciascuna misura y_i i=1…N.

Stima alla massima verosimiglianza caso Gaussiano

- Supponiamo il vettore **y** corrisponda a N realizzazioni di una variabile Gaussiana a media μ, deviazione standard σ (N misure indipendenti di una stessa quantità)
- La funzione verosimiglianza dipende da μ e σ che non sono note a-priori.

$$L\left(y_1, y_2, \dots, y_N \mid \mu, \sigma\right) = p\left(y_1\right) \cdot p\left(y_2\right) \cdot \dots p\left(y_N\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_N - \mu}{\sigma}\right)^2\right] =$$

- Quale sarà il valore più verosimile per μ e σ?

Stima alla massima verosimiglianza

- Se **<u>massimizziamo</u>** $L=L(\mathbf{y} \mid \mu,\sigma)$ rispetto a μ e σ

- troviamo i parametri μ,σ tali per cui è massima la probabilità di misurare il vettore di dati $\mathbf{y} = \{y_i, i=1\ldots N\}$.

- **Stima alla massima verosimiglianza**.

- Più in generale, le variabili possono avere densità di probabilità diverse, ciascuna descritta da un set di parametri. I parametri delle diverse densità di probabilità possono essere calcolati utilizzando l'approccio alla massima verosimigianza…

- La funzione di verosimiglianza dipende dai parametri che definiscono le densità di probabilità delle variabili casuali che entrano nella verosimiglianza…

- Massimizzando la funzione di verosimiglianza rispetto a tali parametri se ne effettua la stima in modo tale che il vettore osservato $y = \{y_i\}$ $i = 1\ldots N$ sia massimamente probabile (massima verosimiglianza).

Stima alla massima verosimiglianza
Il caso gaussiano

- E' solitamente più facile minimizzare il logaritmo negativo della verosimiglianza, f(.), (prodotto → sommatoria)

$$f(y_1, y_2, ..., y_N \mid \mu, \sigma) = -\ln\left[L(y_1, y_2, ..., y_N \mid \mu, \sigma)\right] =$$

$$= -\ln\left\{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \ln\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= N \cdot \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + N \cdot \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Determino μ

- Per trovare il minimo, poniamo a zero le derivate:

$$\frac{\partial f(y_1, y_2....y_N \mid \mu,\sigma)}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{N\cdot\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + N\cdot\ln(\sigma) + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= 0 + 0 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} y_i = N\cdot\mu \Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

Media campionaria!

Determino σ

- Per trovare il minimo, poniamo a zero le derivate:

$$\frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_N \mid \mu, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{ N \cdot \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + N \cdot \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= 0 + \frac{N}{\sigma} + \sum_{i=1}^{N} 2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)\cdot(y_i - \mu)\cdot\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow N - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$N \cdot \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2}{N}$$

Varianza campionaria!

Overview

Esempi sul teorema di Bayes

Densità di probabilità

Stima alla massima verosimiglianza