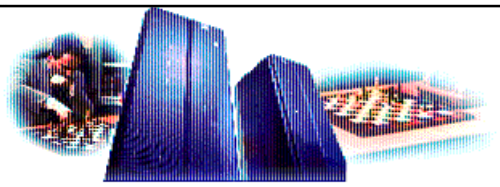
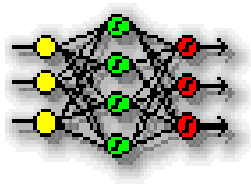
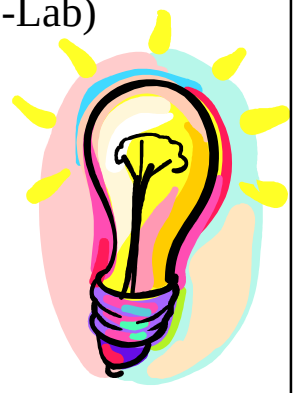




# Le reti neurali

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it



# Sommario

Dal neurone artificiale alle reti neurali

L'apprendimento in reti di perceptroni

Esempio con unità lineari ed accenno ad unità non-lineari

# Brains cause minds (J. Searle)

# Le reti neurali

Se il neurone biologico consente l'intelligenza, perché non dovrebbe consentire l'intelligenza artificiale un neurone sintetico?

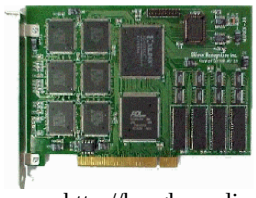
".. a neural network is a system composed of ***many simple processing elements*** operating in ***parallel*** whose function is determined by ***network structure***, ***connection strengths***, and the ***processing performed at computing elements*** or nodes. … Neural network architectures are inspired by the architecture of biological nervous systems, which use many simple processing elements operating in parallel to obtain high computation rates". (DARPA, 1988)….

Now, this is called learning with Kernels

# A cosa servono?

Le reti neurali offrono i seguenti specifici vantaggi nell'elaborazione dell'informazione:

- Apprendimento basato su esempi (non è richiesta l'elaborazione di un modello aderente alla realtà)
- Autoorganizzazione dell'informazione nella rete
- Robustezza ai guasti (codifica ridondante dell'informazione)
- Funzionamento in tempo reale (realizzazione HW)
- Basso consumo (0.5nW ÷ 4nW per neurone, 20W per il SN).



# Direzioni di sviluppo della ricerca

**Spiking neurons models** – Modelli computazionali a neurone singolo

applicazioni alle reti cellulari, reti di persone…

Calcolatori chimici (unità a bassissima Potenza, integrate)

**Deep learning** is a branch of machine learning based on a set of algorithms that attempt to model high-level abstractions in data by using multiple processing layers with complex structures, or otherwise composed of multiple non-linear transformations

**Modelli di calcolo**

# Cosa sono le reti neurali artificiali?

- Le reti neurali sono modelli non lineari per l'**approssimazione** della soluzione di problemi dei quali non esiste un modello preciso (o se esiste è troppo oneroso computazionalmente). I parametri dei modelli risultanti (semiparametrici) vengono calcolati mediante l'utilizzo di esempi (dati di ingresso e uscita desiderata). Connessioni con il dominio della statistica.

- Vengono utilizzate soprattutto per la classificazione e la regressione.

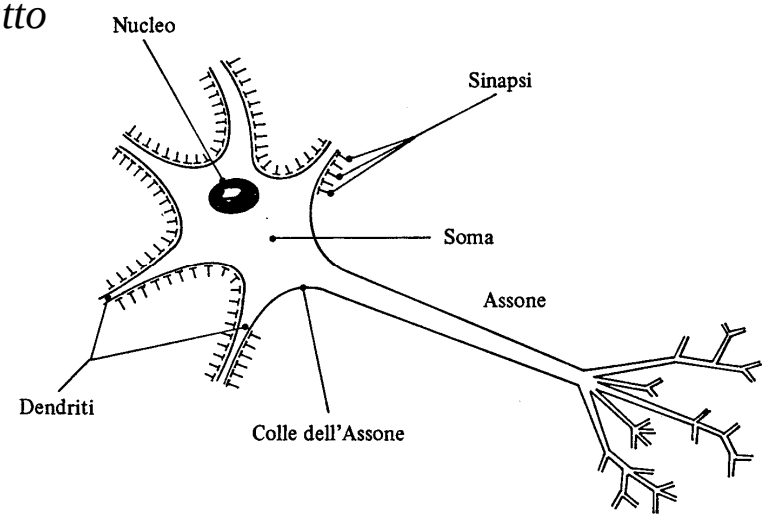
- Sono un capitolo importante negli argomenti di intelligenza artificiale.

- Da un altro punto di vista possono essere utilizzate per lo studio delle reti neurali naturali, ovvero dei processi cognitivi.

- Sono state incorporate nel "machine learning".

# Il neurone artificiale

- *Potenziale di azione (tutto o nulla).*
- *Integrazione nel soma.*
- *Soglia di attivazione.*




Neurone come elemento di calcolo universale: in grado di calcolare qualsiasi funzione logica (cioè implementabile in un computer).

# Il modello di McCulloch-Pitts

•La variazione delle forma d'onda del potenziale di membrana lungo il dendrita non viene considerata.

• Gli input non sono sincroni.

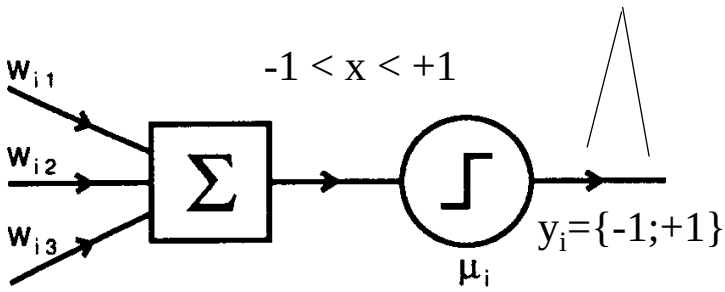
• Le interazioni tra input non sono lineari.

$$y_i(t+1) = \Theta(w_{ij}u_j(t)-\mu_i)$$

• I pesi sono supposti costanti.

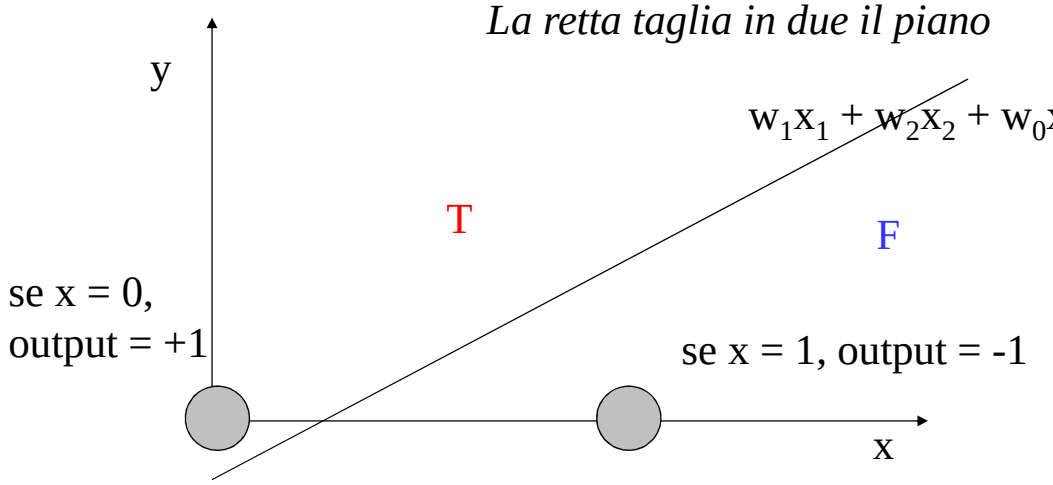
$$\Theta(x)= \begin{cases} 1 & se\ x \geq 0 \\ -1 & altrimenti \end{cases}$$

Sono state pensate per calcolare funzioni logiche (V o F).




McCulloch-Pitts (1943)

# Rappresentazione della retta




$y = mx + q$ ➔ $y = wx - \mu$

*m=1, q = -1*

$x_2 = w_1x_1 - \mu$ ➔ $w_1x_1 + w_2x_2 + w_0x_0 = 0$

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0$

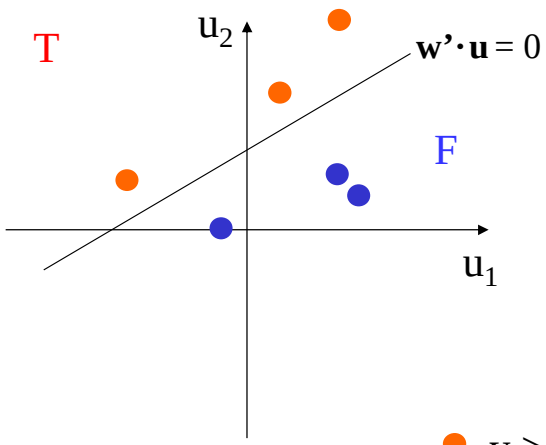
$z = \Theta(w_jx_j(t))$

$w_2 = -1;\ x_0 = 1$

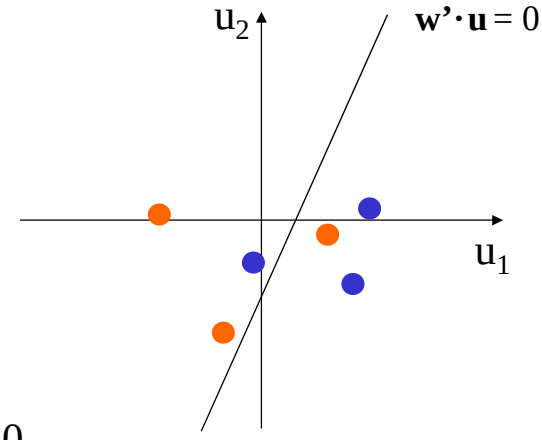
$w_1 = m;\ w_0 = q$

# Funzioni linearmente separabili

Linearmente separabile




Non linearmente separabile



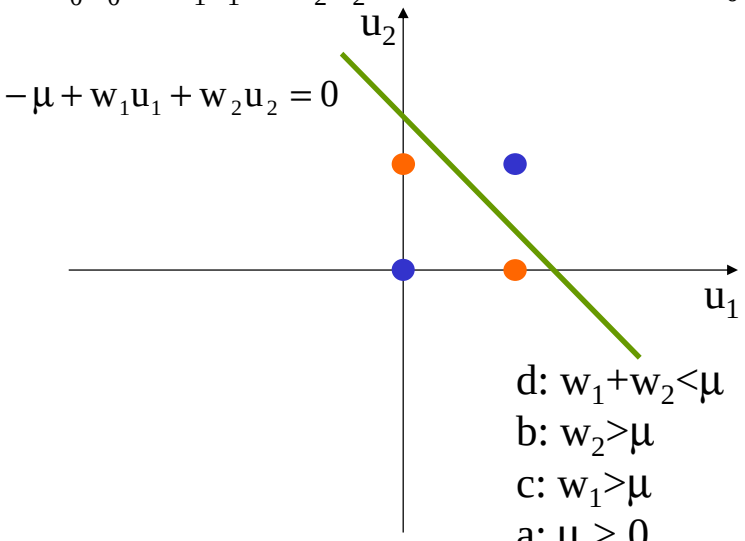

$y > 0$

$y < 0$

$y = f(u_1,u_2)$

# La "morte" del neurone di McCulloch-Pitts (Minski, 1969): XOR

$w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 = 0$ $\quad \mathbf{w'} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad u_0 = 1$




$-\mu + w_1 u_1 + w_2 u_2 = 0$

| $u_1$ | $u_2$ | y | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -1 | a |
| 0 | 1 | 1 | b |
| 1 | 0 | 1 | c |
| 1 | 1 | -1 | d |

d: $w_1+w_2<\mu$
b: $w_2>\mu$
c: $w_1>\mu$
a: $\mu > 0$

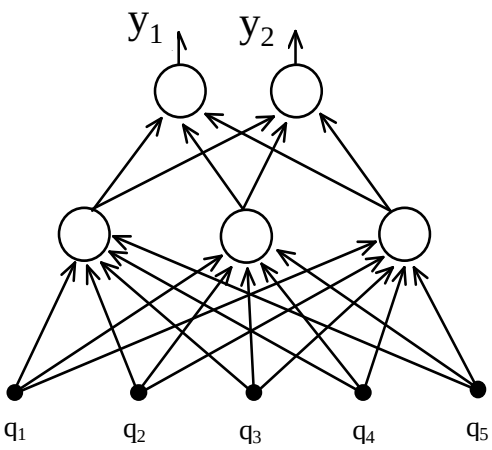
Il sistema di 4 equazioni non è risolubile.

- $y(u_1, u_2, 1)=1$
- $y(u_1, u_2, 1)=-1$

$w_1, w_2 > \mu$ e $w_1+w_2 < \mu$ Impossibile!!

Si possono imparare solamente funzioni linearmente separabili

# Spiking neurons

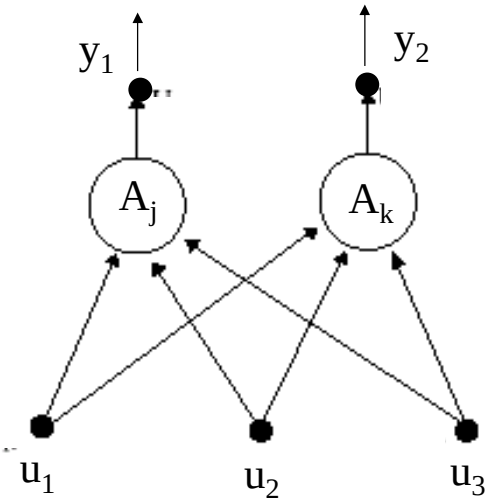



Spiking neurons. Sono neuroni la cui uscita è il singolo spike. Modellazione realistica (e.g. McCullochPitts). Spike del neurone.

Connessionismo classico. Uscita compresa tra min – Max. Frequenza di scarica.

# La rete neurale ad un livello

La rete opera una trasformazione dallo spazio di input allo spazio di output.



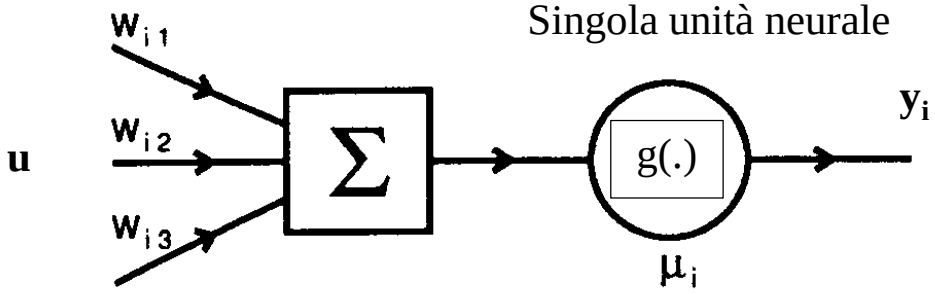

$y_i = g(w_{ij}u_j - \mu_i)$

La trasformazione o mappatura dipende dai parametri $\{w_{ij}\}$ e $\{\mu_i\}$ in modo tale che la rete neurale approssimi la trasformazione tra i pattern di input e di output.

Se g(.) = 1, la rete diventa un modello lineare: $y_i = w_{ij}u_j - \mu_i$

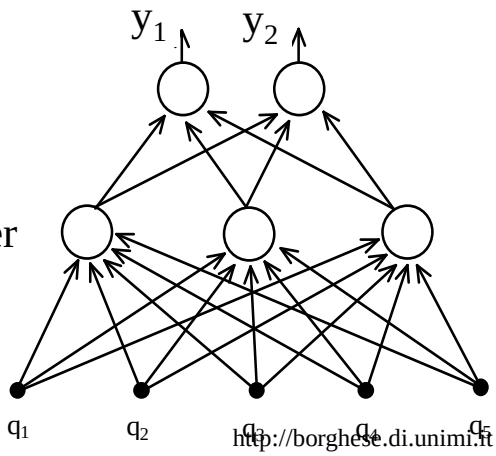
# Una rete neurale a più livelli

Singola unità neurale

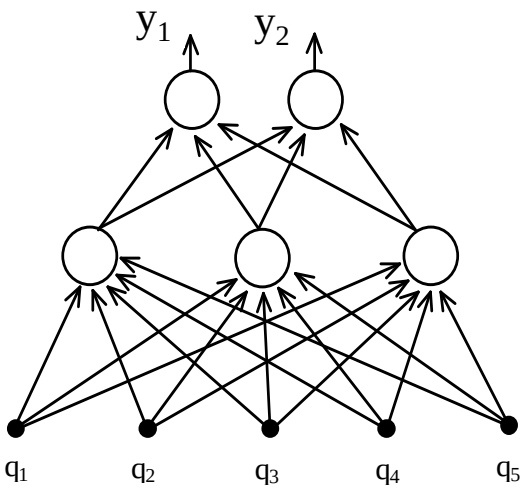



$y_i = g(w_{ij}u_j - \mu_i)$

Unità nascoste – Hidden layer



# Caratteristiche




Livelli di unità di attivazione

Collegamento in cascata

Input convergenti, output divergenti.

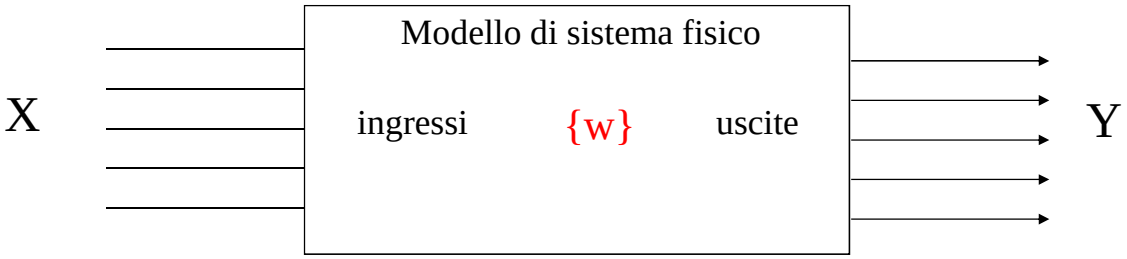
Capacità di approssimazione universale

Perceptrone: layered networks, flusso unidirezionale dell'elaborazione.
L'output viene interpretato come frequenza di scarica del neurone d'uscita della rete.

# Complessità della funzione realizzabile

Quanti più neuroni artificiali vengono connessi tanto più la funzione complessiva approssimabile diviene più complessa

$$Y=|y_1, y_2, y_3, \dots y_n)|^T$$
$$y_i=g(X)$$
$$X=|x_1, x_2, x_3, \dots x_m|^T$$

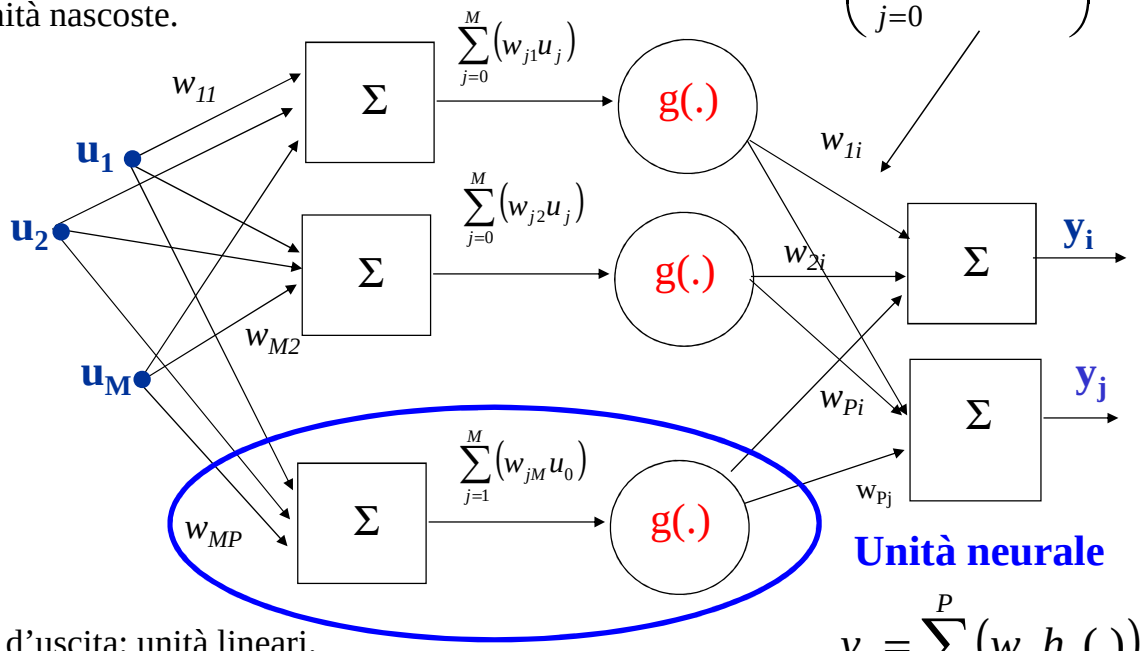



Reti neurali = approssimatori universali.

# MLP : Multi-layer Perceptron

- M ingressi
- N uscite
- P unità nascoste.

$$h_i = g\left(\sum_{j=0}^{M}\left(w_{ji}u_j\right)\right)$$

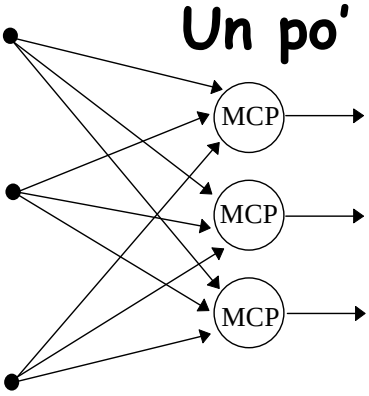



**Unità neurale**

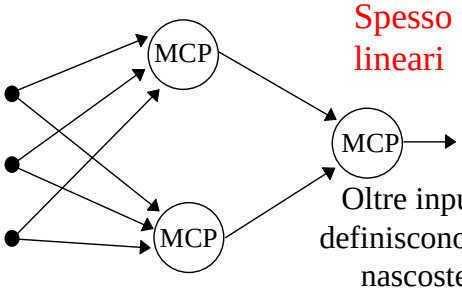
$$y_i = \sum_{k=0}^{P}\left(w_{ki}h_k(.)\right)$$

Livello d'uscita: unità lineari.
Livello intermedio: unità non-lineari

# Un po' di tassonomia



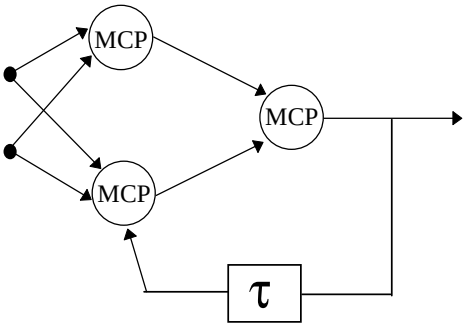

**Perceptrone semplice**



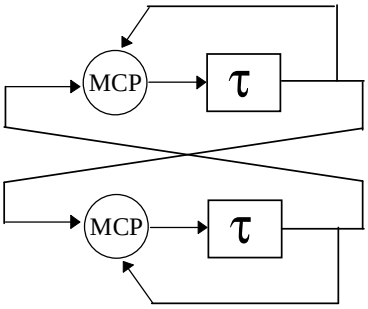

Spesso unità lineari

Oltre input/output si definiscono anche unità nascoste **(hidden units)**

**Perceptrone multistrato**




**Ricorrente**




**Ricorrente completamente connessa: autoassociativa (ingresso=stato)**

# Sommario

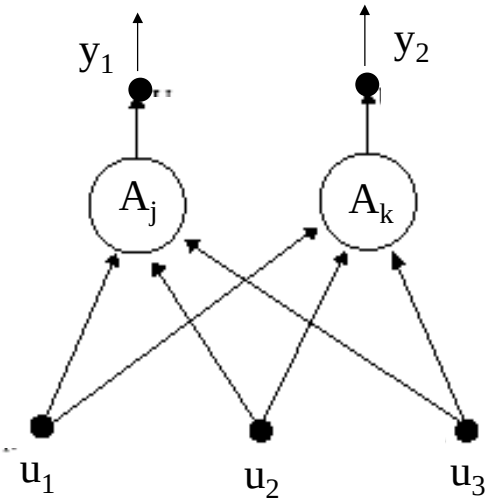
Dal neurone artificiale alle reti neurali

L'apprendimento in reti di perceptroni

Esempio con unità lineari ed accenno ad unità non-lineari

# Lo spirito del'apprendimento supervisionato

La rete opera una trasformazione dallo spazio di input allo spazio di output.




Apprendimento è la modifica dei parametri $\{w_{ij}\}$ e $\{\mu_j\}$ in modo tale che la rete neurale approssimi la trasformazione tra i pattern di input e di output.

$$y_i = g(w_{ij}u_j - \mu_i)$$

# Funzione costo per unità di attivazione continue

Possiamo derivare una regola di apprendimento di spirito **Hebbiano** per una qualsiasi funzione di attivazione continua. Consideriamo un perceptrone ad un livello.

$$y = g\left(\sum_{j=1} w_{ij}u_j - \mu_i\right) = g\left(\sum_{j=0}\left(w_{ij}u_j\right)\right)$$

Si tratta di un problema di minimizzazione di una cifra di merito, J, sullo spazio di parametri W:

$$E(w) = \left\| y^D - g(W^{nuovo}U) \right\| \le \left\| y^D - g(W^{vecchio}U) \right\|$$

Errore

Devo trovare {w} : E(w) è minimo.

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_p \left[\sum_j \left(y_{jp}^D - y_{jp}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_p \left[\sum_j \left(y_{jp}^D - g\left(\sum_i w_{ij}u_{ip}\right)\right)\right]^2$$

# Apprendimento supervisionato

$$\min_{\{w\}} J(.) \qquad J = \left\| Y^D - g(W^{nuovo} U) \right\| \leq \left\| Y^D - g(W^{vecchio} U) \right\|$$

$Y^D$ è l'uscita desiderata nota.

- Si tratta di un problema di minimizzazione di una cifra di merito (J) sullo spazio di parametri W.

***Soluzione iterativa (gradiente):***

Obbiettivo: se esiste una soluzione, trovare $\Delta W$ in modo iterativo tale che l'insieme dei pesi $W^{nuovo}$ ottenuto come:

$$W^{nuovo} = W^{vecchio} + \Delta W$$

dia luogo a un errore sulle uscite di norma minore che con $W^{vecchio}$ (si parte da un $W_0$ inziale, arbitrario).

# Minimizzazione di funzioni di più variabili

min( J{**w**}| …..) funzione costo od errore

Gradiente:
$$\nabla \mathbf{J}(w) = \frac{\partial J(\{w\}|....)}{\partial w_j}\frac{\boldsymbol{w_1}}{|\boldsymbol{w_1}|} + \frac{\partial J(\{w\}|....)}{\partial w_2}\frac{\boldsymbol{w_2}}{|\boldsymbol{w_2}|} + \frac{\partial J(\{w\}|....)}{\partial w_3}\frac{\boldsymbol{w_3}}{|\boldsymbol{w_3}|} + \frac{\partial J(\{w\}|....)}{\partial w_4}\frac{\boldsymbol{w_4}}{|\boldsymbol{w_4}|} + .....$$

Modifico il valore dei pesi di una quantità proporzionale alla pendenza della funzione costo rispetto a quel parametro.
Estensione della tecnica del gradiente a più variabili.

$$\mathbf{\Delta w} = -\eta\, \mathbf{\nabla J(w)} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta w_{ij} = -\eta\, \frac{\partial J(\{w\}|....)}{\partial w_{ij}}$$

Serve un'**approssimazione iniziale** per i pesi $W_{ini} = \{w_j\}_{ini}$.

# La pratica dell'apprendimento supervisionato

Fino a quando l'apprendimento non è stato completato:

1. Presentazione di un pattern di input / output (dati).
2. Calcolo dell'output della rete con il pattern corrente (modello)..
3. Calcolo dell'errore (distanza)..

4. Calcolo dei gradienti (apprendimento).
5. Calcolo dell'incremento dei pesi (apprendimento).

Aggiornamento dei pesi:
- Per trial (ogni pattern)
- Per epoca (ogni insieme di pattern).

# Apprendimento supervisionato tramite gradiente

Coppie input/output note.

Definizione di una funzione costo che misuri l'errore sull'uscita.

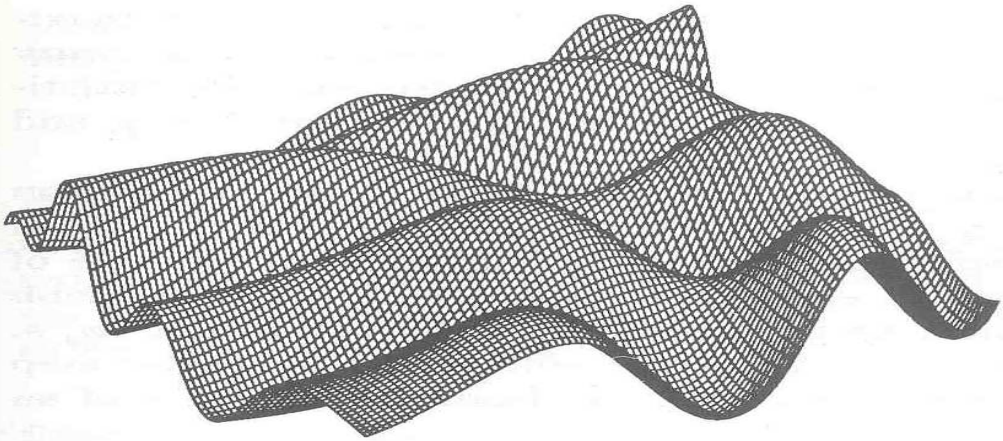
Modifica dei valori dei pesi in modo tale che la funzione costo sia minimizzata.

Reti multi-strato hanno elevata capacità computazionale, ma anche elevata complessita'.

# Problemi nell'apprendimento supervisionato tramite gradiente

- Nota: $W_{ini}$ è generalmente casuale e può condizionare la convergenza degli algoritmi iterativi.

- I problemi di convergenza sono legati all'esistenza di minimi locali del funzionale J(w | ….)



# Sommario

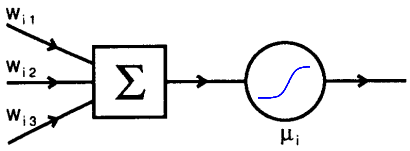
Dal neurone artificiale alle reti neurali

L'apprendimento in reti di perceptroni

Esempio con unità lineari ed accenno ad unità non-lineari

# Unità di attivazione non-lineari

$$y_j = g\left(\sum_{i=1}^{M} w_{ij}u_i - \mu_j\right) = g\left(\sum_{i=0}^{M}\left(w_{ij}u_i\right)\right)$$




$\sum_{i=0}^{M}\left(w_{ij}u_i\right)$ è l'argomento della funzione di attivazione g(.)

Apprendimento: minimizzazione dell'errore, $E(y^D,x^D \mid w)$, sui pattern tra l'uscita desiderata prescritta e quella fornita dal modello.

# Unità non-lineari, soluzione iterativa

$$J = E\left(y^D, x^D \mid \mathbf{w}\right) = \frac{1}{2}\sum_p \left[\sum_j \left(y_{jp}^D - y_{jp}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_p \left[\sum_j \left(y_{jp}^D - g(\sum_i w_{ij}u_{ip})\right)^2\right]$$

$$\Delta w_{ijp} = -\eta \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \frac{1}{2}\sum_j \left(y_{jp}^D - g(\sum_i w_{ij}u_{ip})\right)^2 =$$

$$\eta \sum_j \left(y_{jp}^D - g\left(\sum_i w_{ij}u_{ip}\right)\right) g'\left(\sum_i w_{ij}u_{ip}\right) u_i = +\eta \underbrace{\left(y_{jp}^D - y_{jp}\right) u_{ip} g'\left(\sum_i w_{ij}u_{ip}\right)}$$

δ rule

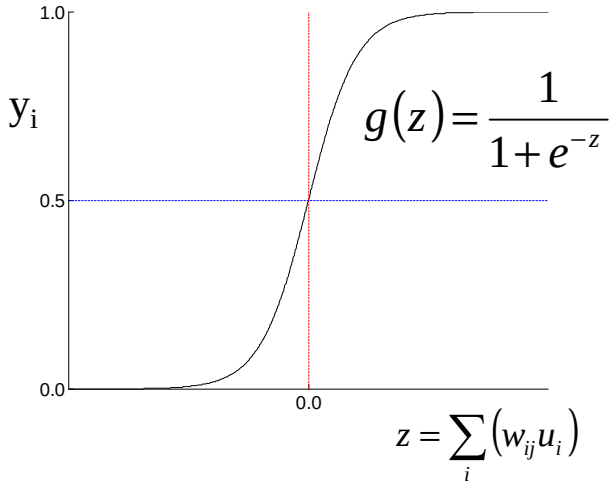
# Perceptrone con unità di attivazione logistiche

$$y_j = g\left(\sum_i w_{ij} u_i\right) \qquad \left(\sum_i w_{ij} u_i\right) = z$$

$$g'(z) = \frac{e^{(-z)}}{\left(1+e^{(-z)}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+e^{(-z)}}\left(1 - \frac{1}{1+e^{(-z)}}\right) =$$

$$g'(z) = g(z)\cdot(1 - g(z))$$



# Update dei pesi per funzione logistica

$$J = E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_p \left[ \sum_j \left(y_{jp}^D - y_{jp}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_j \left( y_{jp}^D - g(\sum_i w_{ij} u_{ip}) \right)^2 \right]$$

$$\Delta w_{ijp} = +\eta \sum_j \left(y_{jp}^D - g(.)\right) g'(.) u_i = +\eta \left(y_{jp}^D - y_j\right) u_{ip} y_j (1 - y_j)$$

$\delta$ rule

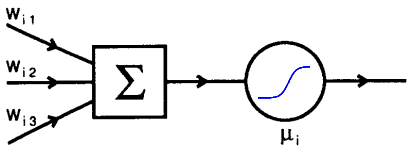
derivata

NB yi =[0 1]. Per $y_i = 0$ o $y_i = 1$ non c'è apprendimento anche se l'uscita è sbagliata. Quando si verifica questa situazione?

Si cerca di mantenere le unità lontane della saturazione.

# Unità di attivazione lineari

$$y_j = g\left(\sum_{i=1}^{M} w_{ij}u_i - \mu_j\right) = g\left(\sum_{i=0}^{M}\left(w_{ij}u_i\right)\right)$$




***Caso lineare (g(.) = 1):***

$$y_j = \sum_{i=1} w_{ij}u_i - \mu_j = \sum_{i=0}\left(w_{ij}u_i\right) \quad \text{====>} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{W}\,\mathbf{U}$$

Soluzione di un sistema lineare nei pesi!!

Condizione di risolubilità: **W** di rango massimo → {w} sono linearmente indipendenti.

# Unità lineari, soluzione iterativa

$$J = E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_p \left[ \sum_j \left( y_{jp}^D - y_{jp} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}\sum_p \left[ \sum_j \left( y_{jp}^D - \left( \sum_i w_{ij} u_{ip} \right) \right)^2 \right]$$

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \frac{1}{2} \sum_j \left( y_j^D - \left( \sum_i w_{ij} u_i \right) \right)^2$$

$$\Delta w_{ij} = +\eta \sum_j \left( y_j^D - \left( \sum_j w_{ij} u_i \right) \right) u_i = +\eta \sum_j \left( y_j^D - y_j \right) u_i$$

**Hebbian learning**

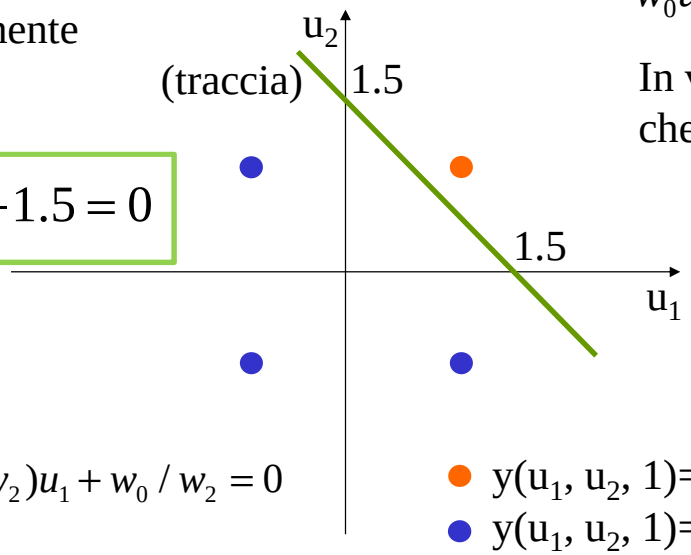
δ rule (Hoff, 1960)

# Esempio – AND

Troviamo la soluzione graficamente

$w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 = 0$

In verde la retta $\mathbf{w'} \cdot \mathbf{u} = 0$ che taglia il piano $u_1 u_2$.




$u_2 + u_1 - 1.5 = 0$

$w_0 = -1.5$
$q = +1.5$
$w_1 = 1$
$w_2 = 1$

$u_2 + (w_1 / w_2) u_1 + w_0 / w_2 = 0$

- $y(u_1, u_2, 1)=1$
- $y(u_1, u_2, 1)=-1$

$u_2 + u_1 - 1.5 = 0$

$\Downarrow$

$w_1 / w_2 = 1 \quad w_0 / w_2 = -1.5 \quad \Rightarrow \quad w_2 = k \quad w_1 = k \quad w_0 = -1.5 * k$

Esistono più soluzioni
Separabilità lineare.

$w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 = 0$

# Problema lineare

Matrice dei termini noti: b = $y^D$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

| $u_1$ | $u_2$ | y | $y^D$ |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | +1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | +1 |

Matrice dei coefficienti: A

$$A = \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Vettore delle incognite: x = w

Ax = b

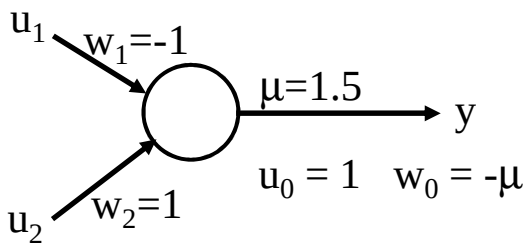
$x = (A'*A)^{-1}*A'*b$ ➔ $w = \begin{bmatrix} +0.5 \\ +0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

Soluzione ottima: minimizzo implictamente la distanza tra la retta ed i 4 punti.

i.it

# Soluzione iterativa
# Delta rule I: calcolo dell'uscita

*Inizializzo i pesi:* $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_0 = 1.5$

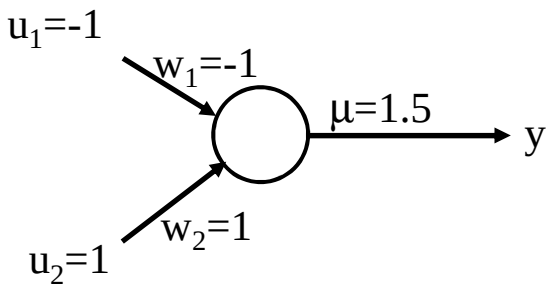



| $u_1$ | $u_2$ | y | $y^D$ |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | | -1 |
| -1 | 1 | 0,5 | -1 |
| 1 | -1 | | -1 |
| 1 | 1 | | +1 |

U=|-1, 1| $y^D$ = -1

$$y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i) = (-1)(-1) + (1)(1) + (-1)(1.5) = 0.5 >> -1$$

# Delta rule II: Calcolo dell'errore




| $u_1$ | $u_2$ | y | $y^D$ |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | | -1 |
| -1 | 1 | 0,5 | -1 |
| 1 | -1 | | -1 |
| 1 | 1 | | +1 |

$$y = \sum_{i=0} (w_i u_i) = 0.5$$

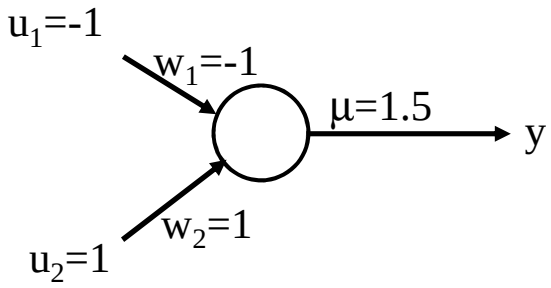
Errore = $(y^D - y)^2 = (-1 - (0.5))^2 = -1.5^2$

# Delta rule III: calcolo del gradiente

$$\frac{dErrore}{dw_1} = \left(y_i^D - y_i\right)u_1 = (-1-0.5)(-1) = 1.50$$

$$\frac{dErrore}{dw_2} = \left(y_i^D - y_i\right)u_2 = (-1-0.5)(+1) = -1.50$$

$$\frac{dErrore}{d\mu} = -\frac{dErrore}{dw_0} = +1.50$$

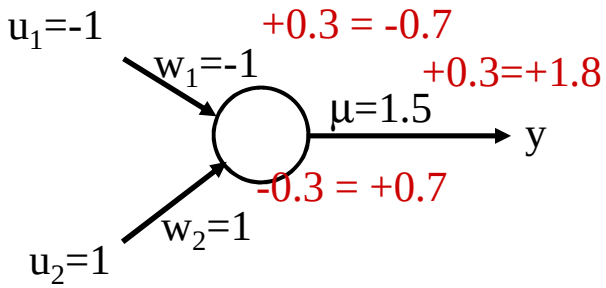


# Delta rule IV: aggiornamento pesi

$$\Delta w_{ij} = +\eta\left(y_j^D - y_j\right)u_i$$

U=|-1, 1|  $y^D$ = -1
η = 0.2

$$\Delta w_1 = \eta\left(y_i^D - y_i\right)u_1 = \eta(-1-0.5)(-1) = +0.30$$
$$\Delta w_2 = \eta\left(y_i^D - y_i\right)u_2 = \eta(-1-0.5)(1) = -0.3$$
$$\Delta w_0 = \eta\left(y_i^D - y_i\right)u_0 = \eta(-1-0.5)(1) = -0.30$$
$$\Delta\mu = -\Delta w_0 = +0.30$$



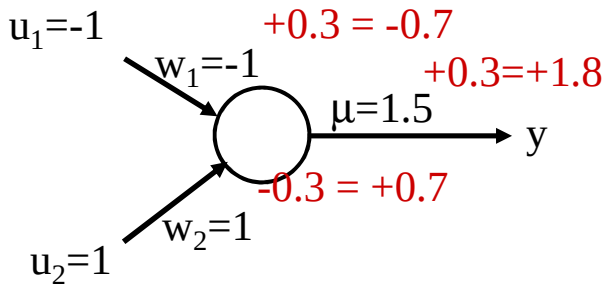
# Delta rule V: Nuovo valore di uscita

U=|-1, 1|  $y^D = -1$

$\eta = 0.2$

$$y = \sum_{i=1} \left( w_i u_i - \mu \right) =$$

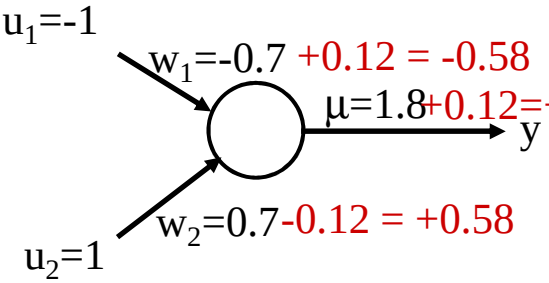
$$\sum_{i=0} \left( w_i u_i \right) = -0.4 > -1$$



# Delta rule VI- Nuovo aggiornamento

U=|-1, 1|  $y^D = -1$

$\eta = 0.2$




$$y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i) \quad = \textbf{-0.4}$$

**-0.76**

$$\Delta w_{ij} = +\eta \left( y_i^D - y_i \right) u_j$$

$$\Delta w_0 = \eta \left( y_i^D - y_i \right) u_0 = \eta(-1-(-0.4))(1) = -0.12$$
$$\Delta w_1 = \eta \left( y_i^D - y_i \right) u_1 = \eta(-1-(-0.4))(-1) = +0.12$$
$$\Delta w_2 = \eta \left( y_i^D - y_i \right) u_2 = \eta(-1-(-0.4))(1) = -0.12$$

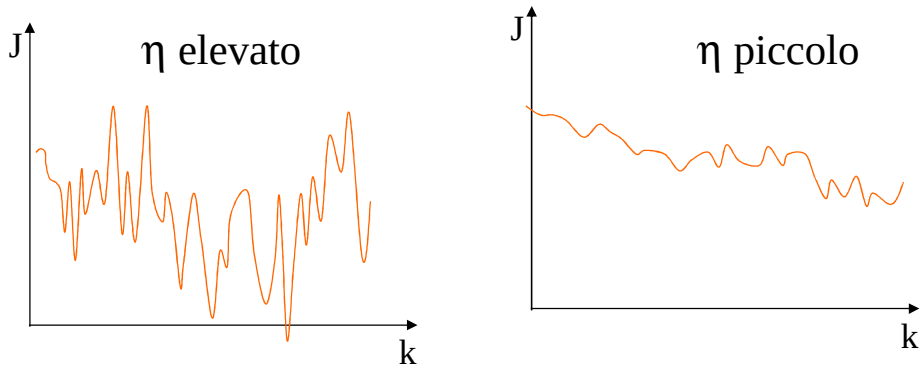
Che relazione c'è tra i pesi e la retta che separa le uscite positive da quelle negative?

# Ruolo di η – learning rate

$$\Delta w_{ij} = +\eta\left(y_j^D - y_j\right)u_i$$

Calmiera il $\Delta w_{ij}$ per evitare che :

- Un peso sia specifico di un'unità ingresso-uscita.
- Oscillazioni durante l'apprendimento senza convergenza.

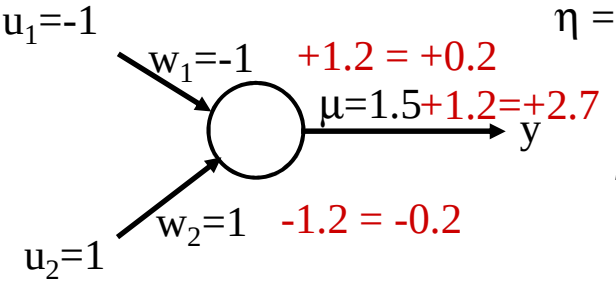



η può variare durante l'addestramento.

# Esempio di delta rule – Cattiva scelta di η

U=|-1, 1|  $y^D$ = -1

η = 0.8




$$y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i) \quad = \mathbf{0.5} \quad \mathbf{-3.1}$$

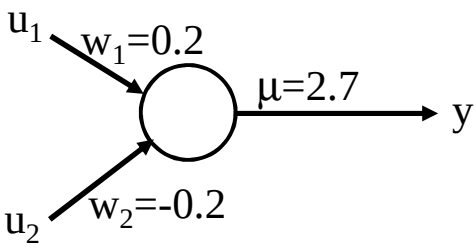
$$\Delta w_{ij} = +\eta \left( y_j^D - y_j \right) u_i$$

$$\Delta\mu = \Delta w_0 = \eta \left( y_i^D - y_i \right) u_0 = \eta(-1-0.5)(1) = +1.2$$

$$\Delta w_1 = \eta \left( y_i^D - y_i \right) u_1 = \eta(-1-0.5)(-1) = +1.2$$

$$\Delta w_2 = \eta \left( y_i^D - y_i \right) u_2 = \eta(-1-0.5)(1) = -1.2$$

# Esempio di specializzazione sul pattern b




| | $u_1$ | $u_2$ | $y^D$ |
|---|---|---|---|
| a | -1 | -1 | -1 |
| b | -1 | 1 | -1 |
| c | 1 | -1 | -1 |
| d | 1 | 1 | 1 |

a $y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i)$ = (0.2)(-1) + (-0.2)(1) – 2.7 = -3.1

b $y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i)$ = (0.2)(-1) + (-0.2)(1) – 2.7 = -2.9

c $y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i)$ = (0.2)(1) + (-0.2)(-1) – 2.7 = -2.3

d $y = \sum_{i=1} w_i u_i - \mu = \sum_{i=0} (w_i u_i)$ = (0.2)(1) + (-0.2)(1) – 2.7 = **-2.7**

Errato su d. Specializzazione su a, b, c

# Riassunto – topologia

I neuroni connessionisti sono basati su:
•Ricevere una somma pesata degli ingressi.
•Trasformarla secondo una funzione non-lineare (scalino o logistica)
•Inviare il risultato di questa funzione all'uscita o ad altre unita'.

Le reti neurali sono topologie ottenute connettendo tra loro i neuroni in modo opportuno e riescono a calcolare funzioni molto complesse.

# Riassunto - Apprendimento

Algoritmi iterativi per adattare il valore dei parametri (pesi).

Definizione di una funzione costo che misura la differenza tra valore fornito e quello desiderato.

Algoritmo (gradiente) che consente di aggiornare i pesi in modo da minimizzare la funzione costo.

Training per pattern (specializzazione) o per epoche.

# Sommario

Dal neurone artificiale alle reti neurali

L'apprendimento in reti di perceptroni

Esempio con unità lineari ed accenno ad unità non-lineari