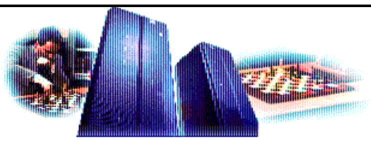
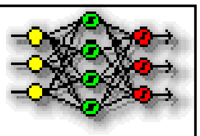




Policy Improvement

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
alberto.borghese@unimi.it

Sommario

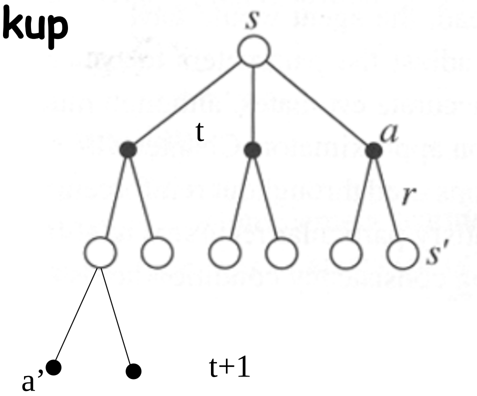
Come migliorare la policy (Value iteration)

Esempi

Tecnica full-backup

Back-up

$\pi(s,a)$ fissata



Conosciamo $Q_k(s_t,a_t)$ $\forall s_t$, anche per s'_{t+1} quindi:
Analizziamo la transizione da s_t,a_t -> (s'_{t+1}, a'_{t+1})
Calcoliamo un nuovo valore di Q per s,a: $Q_{k+1}(s_t,a_t)$ congruente con:
$Q_k(s_{t+1},a_{t+1})$ ed r_{t+1}
Full backup se esaminiamo tutti gli s',a' (cf. DP).
Da s' mi guardo indietro ed aggiorno Q(s, a).

$\boxed{\pi \text{ fissata}}$

Calcolo iterativo della Value Function

Per ogni stato s, estratto a caso, analizziamo una singola transizione.

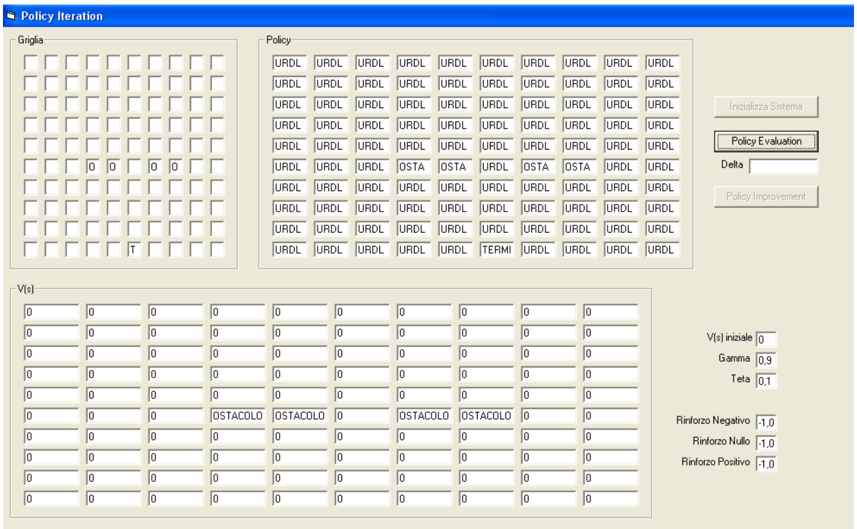
Equazione di Bellman per "iterative policy evaluation":

$$Q_{k+1}^{\pi}(s,a)=\left\{\sum_{s_l'}\left\{P_{s\rightarrow s_l'|a}\left[R_{s\rightarrow s_l'|a}+\gamma\sum_{a'_j}\pi(a'_j,s_l')Q_k^{\pi}(s_l',a_j')\right]\right\}\right\}$$

Mi fido di $Q_{k+1}(s',a')$ (Backup)

$$\lim_{k\rightarrow\infty}\{Q_k(s,a)\}=Q^{\pi}(s,a)$$

Iterative policy evaluation



Sommaruga_PolicyIteration_VisualBasic_Labirinto

Relazione soddisfatta da Q*(s,a)

$$Q^*(s,a) = \underset{a_{t+1}}{Max}\left[E_\pi\{R_t \mid s_t = s, a_t = a\}\right] =$$

$$\underset{a_{t+1}}{Max}\left[E_\pi\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k r_{t+k+1}\middle| s_t = s, a_t = a\right\}\right] =$$

$$\underset{a_{t+1}}{Max}\left[r_{t+1} + \gamma E_\pi\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k r_{t+k+2}\middle| s_t = s, a_t = a\right\}\right] =$$

$$\underset{a_{t+1}}{Max}\left[r_{t+1} + \gamma Q^*(s_{t+1}, a_{t+1}) \mid s_t = s, a_t = a\right] =>$$

$$\boxed{Q^*(s,a) = \underset{a'}{Max}\left\{P_{s->s'|a}\left[R_{s->s'|a} + \gamma Q^*(s',a')\right]\right\}}$$

Bellman's Equation For optimal policy

Miglioramento della policy

Tutti gli stati sono valutati in funzione di una policy data.

Condizioni di funzionamento dell'agente:
•Policy **deterministica**: $a = \pi(s)$.
•Ambiente **stocastico**.

Cosa succede se cambiamo la policy per un certo stato s_m? $a_{new} \neq \pi(s_m)$. Cosa viene influenzato?

Scelgo a_{new} in s_m, visiterò una certa sequenza di stati, per questi stati seguirò la policy precedente per $s \neq s_m$. Cosa viene influenzato?

Come faccio a valutare se miglioro la policy o no?

Effetto del cambiamento della policy

Cambia, a, cambiano i possibili stati successivi ad s_m, $\{s_{t+k}\}$, ed il reward a lungo termine:

$$Q^\pi(s_m, a_{new}) = E_\pi\{r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1}) \mid s_t = s_m, a_t = a_{new} \neq \pi(s_m)\} =$$

$$\sum_{s'} P^{a_{new}}_{s_m -> s'} \left[R^{a_{new}}_{s_m -> s'} + \gamma V^\pi(s') \right]$$

V(s) = value function sullo stato

?

$$Q^\pi(s_m, a_{new}) >=< Q^\pi(s_m, a = \pi(s_m)) \quad \forall s, a ?$$

Se il reward fosse migliore con a_{new}, sceglierò sempre a_{new} in s_m.

Il reward a lungo termine può essere maggiore (minore) solamente se aumenta (diminuisce) il reward totale "visto" ad un passo (reward del passo + reward successivo).

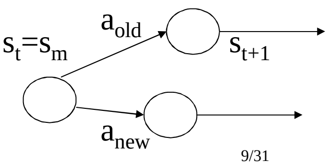
Enunciato del teorema del miglioramento della policy

$$Q^{\pi}(s,a)=\sum_k P_{s\to s_k|a}\left[R_{s\to s_k|a}+\gamma V^{\pi}(s_k)\right]$$

Ipotesi: π and π' deterministi policies
$Q^{\pi}(s_m, \pi'(s_m)) \geq V^{\pi}(s_m)$

$$Q^{\pi}(s,a_{new}=\pi'(s_m))=\sum_k P_{s_m\to s_k|a_{new}}\left[R_{s_m\to s_k|a_{new}}+\gamma V^{\pi}(s_k)\right]$$

Tesi: π' è meglio di π. Cioè: $V^{\pi'}(s) >= V^{\pi}(s)$ **$\forall$s.**
$Q^{\pi'}(s,a_{new}) >= Q^{\pi}(s,a_{old})$



Dimostrazione del teorema del miglioramento della policy

Analizziamo la seguente condizione:

$\pi' = \pi$ $\forall$s tranne che per s_m per il quale si applica l'azione:
$a_{new} = \pi'(s_m)$

Risulta che il reward a lungo termine è maggiore per $a_{new} = \pi'(s)$.

$V^{\pi'}(s) = Q^{\pi'}(s,a_{new} = \pi'(s)) >= Q^{\pi}(s, a = \pi(s)) = V^{\pi}(s)$

Tesi: π' è meglio di π. Cioè: $V^{\pi'}(s) >= V^{\pi}(s)$ $\forall$s (ed in particolare per gli altri stati s)

Dimostrazione del teorema del miglioramento della policy

Hp: $Q^{\pi}(s,\pi'(s)) >= V^{\pi}(s)$ $\forall s$ $\pi'(s,a)$ è migliore per almeno uno stato

$$V^{\pi}(s) \le \quad Q^{\pi}(s,\pi'(s))$$

$$= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) \mid s_t = s\}$$

$$<= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma Q^{\pi}(s_{t+1},\pi'(s_{t+1})) \mid s_t = s\}$$

$$<= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma E_{\pi'}(r_{t+2} + \gamma V^{\pi}(s_{t+2})) \mid s_t = s\}$$

$$= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 V^{\pi}(s_{t+2})) \mid s_t = s\}$$

Sostituisco ancora $Q^{\pi*}(.)$

$$<= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \ldots\ldots \mid s_t = s\}$$

Th: $V^{\pi}(s) <= V^{\pi'}(s)$

Osservazioni

$s = s_m$ $\quad Q^{\pi}(s_m,\pi'(s)) \ge Q^{\pi}(s_m,\pi(s))$

$s \neq s_m$ $\quad Q^{\pi}(s,a) = E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) \mid s_t = s\}$

$$= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma Q^{\pi}(s_{t+1},\pi(s_{t+1})) \mid s_t = s\}$$

Se s_{t+k} = sm miglioro la Q(s,a).

Se nessun $s_{t+k} = s_m$. Non varia la Q(s,a).

Ottimizzazione policy

Per ogni stato scelgo le azioni secondo la policy: $\pi(s,a)$.

Posso ordinare la Value function Q(s,a) in ordine decrescente, in funzione delle azioni scelte in s (policy).

Si definisce una policy, π_1, migliore di un'altra, π_2, se e solo se:
$Q^{\pi 1}(s,a(s)) >= Q^{\pi 2}(s,a(s)) \; \forall s$.

In particolare si definisce una politica ottima, π^*, se e solo se:
$Q^*(s,a(s)) >= V^{\pi}(s,a(s)) \; \forall s$

$Q^*(s,a(s)) >= Q^{\pi}(s,a(s)) \; \forall [s,a]$

Calcolo ricorsivo della Value function ottima::confronti

$$Q_{k+1}^{\pi}(s,a) = \left\{ \sum_{s_l'} \left\{ P_{s \to s_l'|a} \left[R_{s \to s_l'|a} + \gamma \sum_{a'_j} \pi(a'_j, s_l') Q_k^{\pi}(s_l', a_j') \right] \right\} \right\}$$

Q*(s,a) di uno stato-azione, quando viene scelta la policy ottima, deve essere uguale al valore atteso del reward per l'azione migliore per lo stato s.

$$Q^*(s,a) = \max_{a'} \sum_{s'} P_{s \to s'|a} \left[R_{s \to s'|a} + \gamma Q^*(s',a') \right]$$

Politica greedy: scelgo l'azione ottimale.
Ha senso per il robot raccogli-lattine?

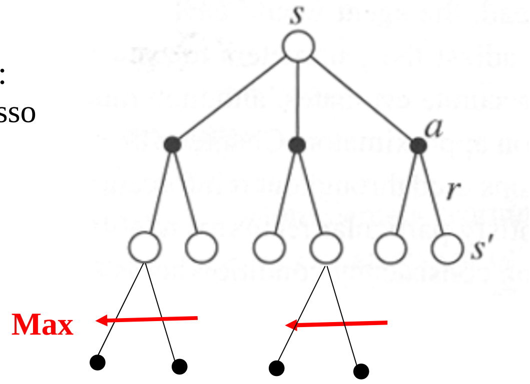
$Q^*(s,a)$ – Osservazioni

$$Q^*(s,a) = \max_{a'} \sum_{s'} P_{s \to s'|a} \left[R_{s \to s'|a} + \gamma Q^*(s',a') \right]$$

Per ogni stato devo valutare:
•L'azione migliore ad un passo

Come valuto?
• analizzando reward a lungo termine

t+1



Policy iteration

Iterazione tra:

• Calcolo iterativo della Value function (iterative policy evaluation)
• Miglioramento della policy (policy improvement)

$$\pi_0 \rightarrow V^{\pi 0} \rightarrow \pi_1 \rightarrow V^{\pi 1} \rightarrow \pi_2 \rightarrow V^{\pi 2} \rightarrow \ldots\ldots.. \rightarrow \pi^* \rightarrow V^*$$

Converge velocemente ad una buona politica
(cf. Software Sommaruga)

Algoritmo - I

Inizialization

Q(s,a) = 0;
π(s,a) = random (e.g. equiprobabile);

Repeat
    point 2.
    point 3.
until policy_stable

Algoritmo - II

Policy evaluation – versione per trial

Repeat
  Th = 0; // small value;
  for s = 1:N
    for a = 1:M

$$Q\_temp = \sum_{s'} \Pr_{s->s'|a} [R_{s->s'|a} + \gamma \sum_{a'} \pi(s',a') Q(s',a')]$$

      ΔQ = |Q(s,a) – Q_temp)|
      Q(s,a) = Q_temp;
      th = max(th, ΔQ)
    end:
  end;
until th < th_max;

Algoritmo - III

Policy improvement

policy_stable = true;
for s = 1:N   // in alternativa, scelgo uno stato
a_old = π(s);
a_new = $\arg\max_{a'}\left(\sum_{s'} \Pr_{s->s'|a}\left[R_{s->s'|a} + \gamma Q(s',a')\right]\right)$;

if (a_new ≠ a_old)
policy_stable = false;
end;

Algoritmo - II

Policy evaluation – versione per epoch
Repeat
Th = 0; // small value;
for s = 1:N
for a = 1:M
Q_temp(s,a) = $\sum_{s'} \Pr_{s->s'|a}[R_{s->s'|a} + \gamma \sum_{a'} \Pr_{a'|s'} Q(s',a')]$

ΔQ = |Q(s,a) – Q_temp(s,a))|
th = max(th, ΔQ)
end:
end;
for s = 1:N, for a=1:m
Q(s,a) = Q_temp(s,a);
end; end;
until th < th_max;

Max or soft max

Policy improvement

policy_stable = true;
for s = 1:N   // in alternativa, scelgo uno stato
  a_old = π(s);

$$\text{a\_new} = \boxed{\arg\max_{a'}\left(\sum_{s'} \Pr_{s->s'|a}\left[R_{s->s'|a} + \gamma Q(s',a')\right]\right)};$$

  if (a_new ≠ a_old)
    policy_stable = false;
end;

Max con policy ε-greedy, soft-max, ...

Iterative policy evaluation - problema

$$V_{k+1}(s) = \left[\sum_{a_j} \pi(a_j, s)\right] \sum_{s'} P_{s\to s'|a_j}\left[R_{s\to s'|a_j} + \gamma V_k(s')\right]$$

Converge al limite a $V^{\pi}(s)$. Come facciamo a troncare?

Value iteration

$$Q_{k+1}(s,a) = \sum_{s'} P_{s \to s'|a} \left[R_{s \to s'|a} + \gamma \left(\sum_{a'_j} \pi(a'_j, s') Q_k(s', a') \right) \right]$$

Invece di considerare una policy stocastica, consideriamo l'azione migliore:

$$Q_{k+1}(s,a) = \max_{a'} \sum_{s'} P_{s \to s'|a} \left[R_{s \to s'|a} + \gamma Q_k(s', a') \right]$$

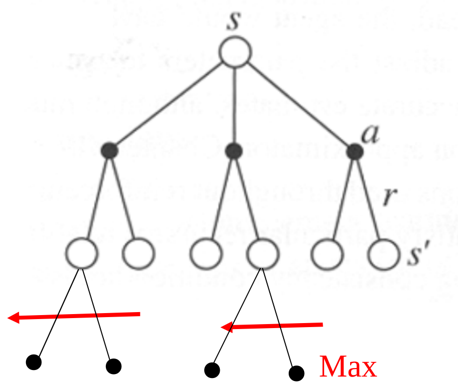
$\forall$**s,a**

Visualizzazione grafica

$$V_{k+1}(s) = \max_{a} \sum_{s'} P_{s \to s'|a} \left[R_{s \to s'|a} + \gamma V_k(s') \right]$$

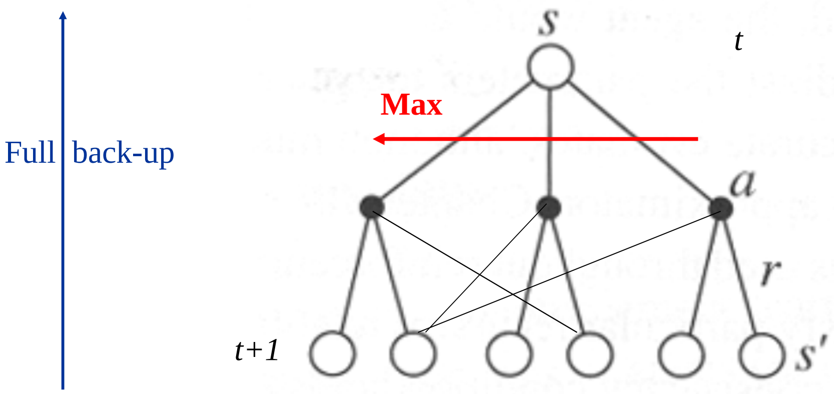
Full back-up

$t+1$



Visualizzazione grafica

$$V_{k+1}(s) = \max_a \sum_{s'} P_{s \to s'|a} \left[R_{s \to s'|a} + \gamma V_k(s') \right]$$

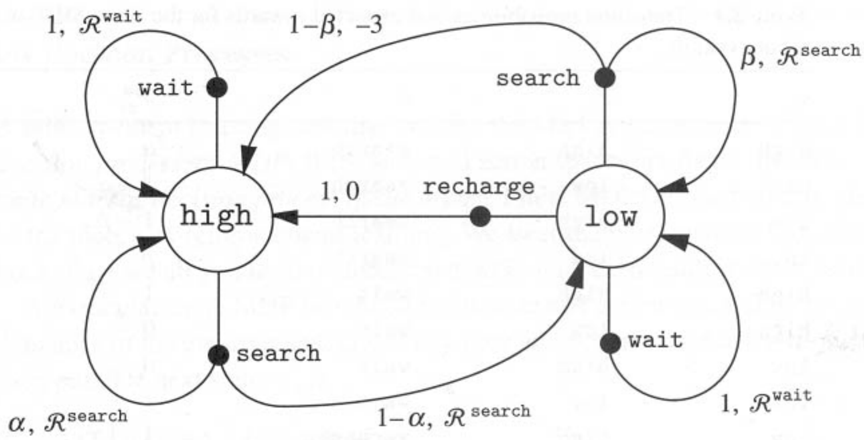


Sommario

Come migliorare la policy (Value iteration)

Esempi

Robot cerca-lattine



Esempio: robot – Policy deterministica

Q(h,search) = Pr(h->l, search) x [R(h->h, search) + γ x Q(h,search)]
Pr(h->h, search) x [R(h->l, search) + γ Q(l,wait)]
Q(h,search) = 0.4x[3+0.8xQ(h,search)]+0.6x[3+0.8Q(l,wait)]

Q(l,wait) = Pr(l->l, wait) x [R(l->l, wait)+0.8 x Q(l,wait)]
Q(l,wait) = 1 x [1+0.8 Q(l,wait)]

Policy iniziale deterministica:

STATO: Q(h,search) ➔
Q(h,s) ≅ 4,4 + 0.7 Q(l,w) ≅ 7.95
STATO: Q(l, wait) ➔
Q(l,wait) = 5

Posso migliorare la policy?

Esempio: robot – miglioramento policy

Miglioro la policy, modificando l'azione associata a s = low:

STATO: high
a = search ➔ Q(h,search) ≅ 4,4 + 0.7 Q(l,recharge) ≠7.95
STATO: low
a = recharge ➔ Q(l,recharge) = 0 + 0.8 Q(h,search) = ???

Ho stimato correttamente Q(h,search)? No
Applico iterative policy evaluation

STATO: Vl
a = recharge → $Q_1(l,r) = 0.8\ Q_1(h,s) = 0.8 \times 7.95 = 6.36$
STATO: high
a = search ➔ $Q_2(h,s) \cong 4.4 + 0.7\ Q_1(l,r) \cong 4.4 + 0.7 \times 6.36 = 8.85$
Ho stimato correttamente Q(s,a)? No. Devo iterare la policy evaluation.

Esempio: robot - IV

<u>**Asintoticamente**</u> **calcolo il valore vero delle coppie stato-azione:**

STATO: high
a = search ➔ $Q(h,s) \cong Q_2(h,s) \cong 4.4+0.7\ Q_1(l,r) = 4.4 + 0.7 \times 6.36 = 8.85$
STATO: low
a = recharge → Q(l,r) = 0.8 Q(h,s) → 7.1

Potrei ottenere gli stessi valori ottenuti asintoticamente, risolvendo il sistema lineare:
Q(h,s) = 4.4 + 0.7 Q(l,r) =
Q(l,r) = 0.8 Q(h,s) =

Ho terminato?

Sommario

Come migliorare la policy (Value iteration)

Esempi