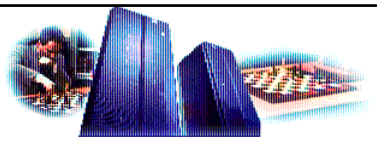
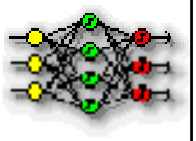




Sistemi Intelligenti
Reinforcement Learning: Iterative policy evaluation

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Sommario

Determinazione ricorsiva della Value function

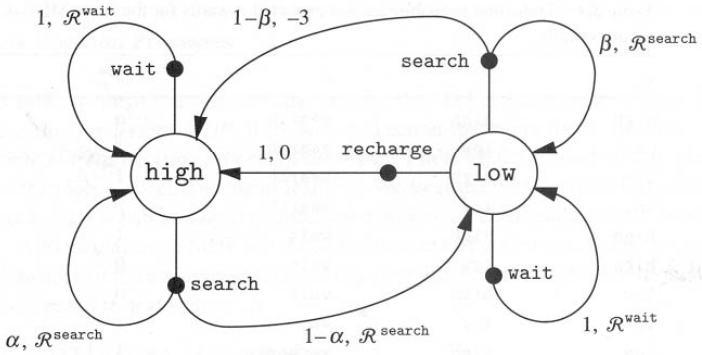
Dalle equazioni di Bellman alla iterative policy evaluation.

Determinazione della policy ottima.

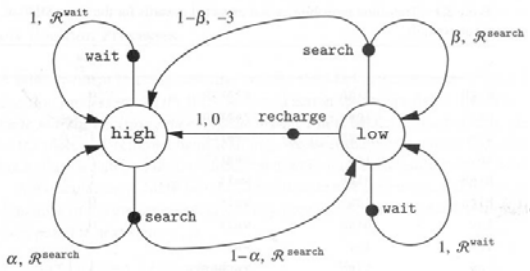
Esempio di calcolo della Value function

Value function
V(high) = ?
V(low) = ?

Policy
a(s=high) = ?
a(s=low) = ?



Esempio di calcolo della funzione valore



α=0.4, β=0.1, γ=0.8, R^{search}=3, R^{wait}=1

Vh = Pr(W)x1x[1+0.8Vh] + Pr(S)x0.4x[3+0.8xVh]+Pr(S)x0.6x[3+0.8Vl]
Wait *Search -> high* *Search -> low*

Vl = Pr(W)x1x[1+0.8Vl] + Pr(S)x0.1x[3+0.8xVl]+Pr(S)x0.9x[-3+0.8Vh]+
Pr(R)x1x[0+0.8Vh]
Wait *Recharge* *Search -> High*
Search -> Low

Sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite: Vh e Vl
Come calcolo Vh e Vl?

Sviluppo dei calcoli

- s = High Pr(W) = 0,4 Pr(S) = 0,6
- s = Low Pr(W) = 0,4 Pr(S) = 0,6 Pr(R) = 0,1

0,488 Vh – 0,288Vl = 2,20
0,44 Vh -0,64Vl = 0,8

Sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite.

E' risolubile?

Che relazione ha con l'intelligenza?

Calcolo ricorsivo della Value function

$$V^{\pi}(s) = E_{\pi}\{R_t \mid s_t = s\} = E_{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \,\middle|\, s_t = s\right\}$$

$$V^{\pi}(s') = E_{\pi}\{R_{t+1} \mid s_{t+1} = s'\}$$

Legame?

Policy Next-state

$$P_{s->s'|a} = \Pr\{s_{t+1} = s' \mid s_t = s, a_t = a\}$$

$$V^{\pi}(s) = \sum_{a_j} \pi(a_j, s) \sum_{s'} P_{s\to s'|a_j} R_{s\to s'|a_j} + E_{\pi}\left\{\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \,\middle|\, s_t = s\right\}$$

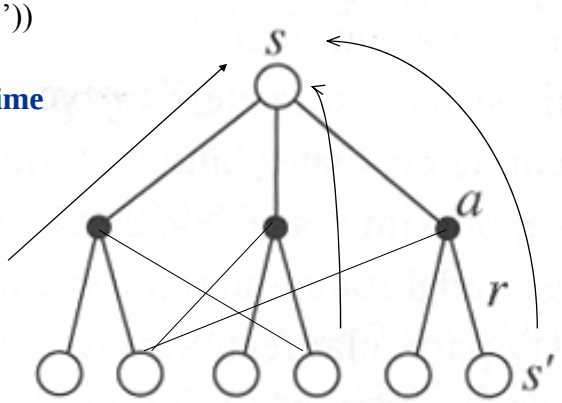
$$V^{\pi}(s) = \left\{\sum_{a_j} \pi(a_j, s) \sum_{s_l'} \left\{P_{s\to s_l'|a_j}\left[R_{s\to s_l'|a_j} + \gamma V^{\pi}(s_l')\right]\right\}\right\}$$

Bellman's equation

Osservazioni

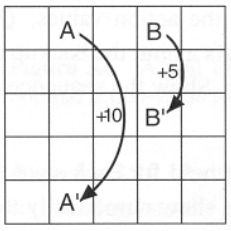
$V^{\pi}(s) = funz(V^{\pi}(s'))$

Backwards in time



$$V^{\pi}(s) = \left\{ \sum_{a_j} \pi(a_j, s) \sum_{s_l'} \left\{ P_{s \to s_l' | a_j} \left[R_{s \to s_l' | a_j} + \gamma V^{\pi}(s_l') \right] \right\} \right\}$$

Esempio di funzione valore (possibile progetto)



(a)

3.3	8.8	4.4	5.3	1.5
1.5	3.0	2.3	1.9	0.5
0.1	0.7	0.7	0.4	-0.4
-1.0	-0.4	-0.4	-0.6	-1.2
-1.9	-1.3	-1.2	-1.4	-2.0

(b)

Figure 3.5 Grid example: (a) exceptional reward dynamics; (b) state-value function for the equiprobable random policy.

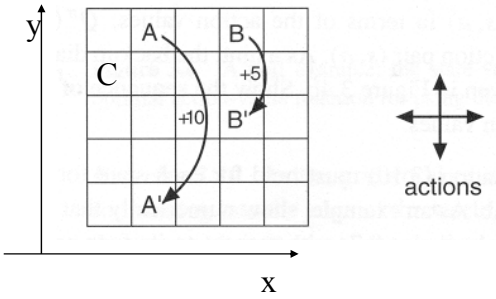
a = π(s) equiprobabile = 0.25 ∀a
R(s,a) per stati sui bordi e azioni che portano fuori dal bordo.
R(s) per tutti gli altri stati (= 0, +5, +10)

Calcolo della funzione valore per uno stato

t: $s = s_t = C$

t + 1: $s = s' = s_{t+1}$

I C + Dy p = 0.25 r = 0
II C – Dy p = 0.25 r = 0
III C + Dx p = 0.25 r = 0
IV C p = 0.25 r = -1



Per calcolare il valore di s: V(s), devo analizzare il valore di ogni s':

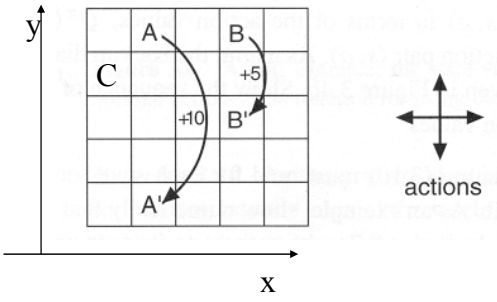
$\pi(s,a)$ -- $P_{s->s'|a}$ -- $R_{s->s'|a}$ -- $V^{\pi}(s')$ ← Value of s'.

policy — Risposta ambiente — Reward

Esempio di valore di uno stato

t: $s = s_t = C$

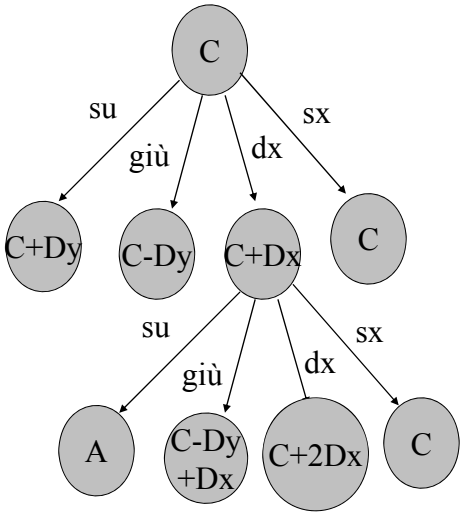
t + 1: $s = s' = s_{t+1}$
C + Dy p = 0.25 r = 0
C – Dy p = 0.25 r = 0
C + Dx p = 0.25 r = 0
C p = 0.25 r = -1
$r_{t+1} = -0.25$



t + 2, s = C+Dx
→ A p = 0.25 r = 0
→ C +Dx+Dy p = 0.25 r = 0
→ A +2Dx p = 0.25 r = 0
→ C p = 0.25 r = 0
$r_{t+2} = 0.0$

s = C-Dy
→ C r = 0
→ C -2Dy r = 0
→ C – Dy + Dx r = 0
→ C – Dy r = -1
$r_{t+2} = -0.25$

Sviluppo parziale a 2 passi



Problematiche legate al calcolo di V(s): problema di policy evaluation

3 assunzioni:

1) Conoscenza della dinamica dell'ambiente: P(s->s'| a_j)
2) Conoscenza della policy (eventualmente stocastica), $\pi(s, a)$
3) Potenza di calcolo sufficiente
4) Proprietà Markoviane dell'ambiente (definizione di uno stato).

Le equazioni contengono dei termini statistici (valori attesi).

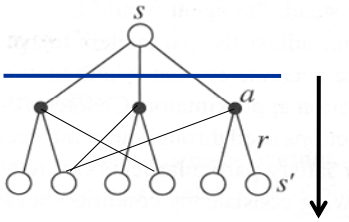
Soluzione di un sistema lineare in N incognite (numero di stati).

Come mai posso determinare la Value function per la policy $\pi(.)$, se questa si basa sul reward che riceverò negli istanti futuri?

C'e' poca interazione con l'ambiente e molta simulazione (cf. metodi Montecarlo).

La Value function sulle azioni

La value function può riguardare le azioni.



Action-Value function

$$Q^{\pi}(s,a) = E_{\pi}\{R_t \mid s_t = s,\ a_t = a\} = E_{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \,\middle|\, s_t = s, a_t = a\right\}$$

Massimizzo la ricompensa a lungo termine, Q(.). Dipende dalla policy.

Dove abbiamo già trovato una Value function associata alle azioni?

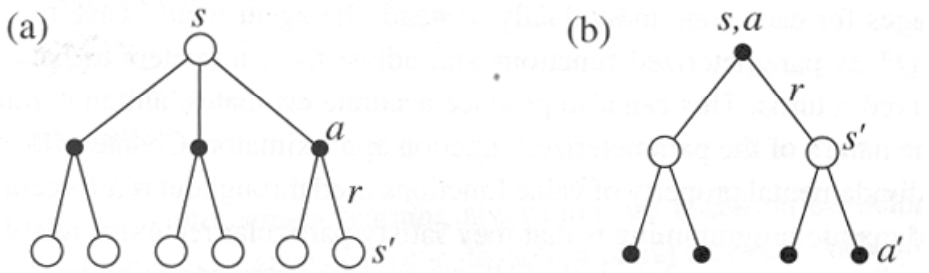
Sommario

Determinazione ricorsiva della Value function

Dalle equazioni di Bellman alla iterative policy evaluation.

Determinazione della policy ottima.

Policy



La policy deve essere ancora determinata. Come fa l'agente a determinare la policy ottimale?

Archi multipli fuoriuscenti da un'azione sono associati alla probabilità di scegliere quel cammino (ambiente stocastico).

Archi multipli fuoriuscenti da uno stato, sono associati alla policy.

Ottimizzazione policy

Per ogni stato scelgo le azioni secondo la policy: $\pi(s,a)$.

Posso ordinare la Value function V(s) in funzione delle azioni scelte in s (policy).

Si definisce una policy, π_1, migliore di un'altra, π_2, se e solo se:
$V^{\pi 1}(s) >= V^{\pi 2}(s)\ \forall s$.

In particolare si definisce una politica ottima, π^*, se e solo se:
$V^*(s) >= V^{\pi}(s)\ \forall s$

$Q^*(s,a) >= Q^{\pi}(s,a)\ \forall [s,a]$

Riassunto

Posso determinare la Value function in modo ricorsivo. Per ogni stato, sarà funzione dell'output dell'ambiente in quell'istante (attraverso la funzione stato prossimo ed il reward istantaneo) e della policy scelta in quell'istante e dei reward a lungo termine attesi negli stati in cui l'ambiente mi porta.

Per scegliere la policy devo esaminare il reward a lungo termine che mi si prospetta nello stato in cui mi trovo e scegliere l'azione che lo massimizza.

Iterative policy evaluation

Evoluzione del sistema da s(t=0) a {s'(t = T)} utilizzando la policy $\pi(s,a)$, prefissata.

Quanto valgono gli stati?

Parto da $V(s(t=0))_{k=0}$ arbitraria, otterrò una value function per ogni stato che sarà funzione di V(s(t=0)).

Devo migliorare, come?

Utilizziamo l'informazione sul **passato**.

$\{V\}^0$, $\{V\}^1$, $\{V\}^2$, $\{V\}^3$, $\{V\}^4$, $\{V\}^5$, ……. $\{V\}^\infty$

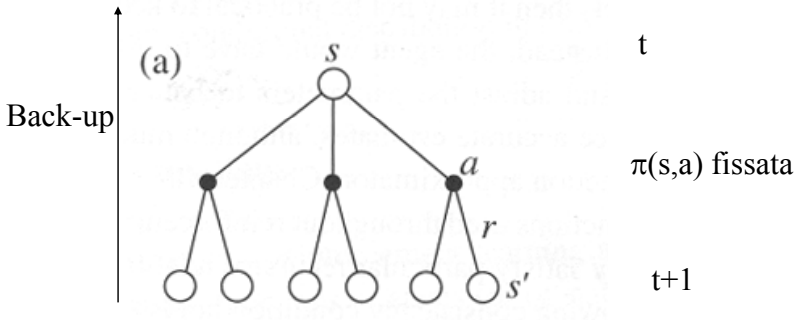
Fondamenti del metodo

• Supponiamo di essere all'istante t. In questo istante t, si può passare ad un certo insieme di stati: $\{s'_{t+1}\}$.

•Analizziamo un solo passo: cosa succede nella transizione da t a t+1.

• Migliorare la stima della nostra Value Function ad ogni iterazione.

Tecnica full-backup



Conosciamo $V_k(s(t))$ $\forall s$, anche per s' quindi
Analizziamo la transizione da s(t) -> {s'(t+1)}
Calcoliamo un nuovo valore di s: $V_{k+1}(s(t))$ congruente con $V_k(s(t))$ ed r_{t+1}
Full backup se esaminiamo tutti gli s' (cf. DP).

π fissata

Da s' mi guardo indietro ed aggiorno V(s).

Calcolo iterativo della Value Function

Per ogni stato s, estratto a caso, analizziamo una singola transizione.

Equazione di Bellman per "iterative policy evaluation":

$$V_{k+1}(s) = \left[\sum_{a_j} \pi(a_j, s)\right] \sum_{s'} P_{s \to s' | a_j} \left[R_{s \to s' | a_j} + \gamma V_k(s')\right]$$

Mi fido di $V_k(s')$ (Backup)

$$\lim_{k \to \infty} \{V_k(s)\} = V^{\pi}(s)$$

Algoritmo per "iterative policy evaluation", versione batch

Partiamo da una politica $\pi(s,a)$ data.
Definiamo una soglia di convergenza τ
Inizializziamo $V(s) = 0\ \forall s$, compreso gli stati finali.
Repeat
{ $\Delta = 0$;
for s = 1 : N // $\forall s_{a_j} \neq TS$
{ $W(s) = \sum_{a_j} \pi(s, a_j) \sum_{s'} P^{a_j}_{s->s'} \left[R^{a_j}_{s->s'} + \gamma V(s')\right]$ // W(s) è $V_{k+1}(s)$

$\Delta = \max(\Delta, | V(s) - W(s) |)$
}
for s=1:N
$V(s) = W(s)$;
} Until ($\Delta < \tau$);

Interpretazione dell'update (batch o trial)

$$V(s) = \sum_{a_j} \pi(s,a_j) \sum_{s'} P^{a_j}_{s->s'} \left[R^{a_j}_{s->s'} + \gamma V(s') \right]$$

Al termine dell'aggiornamento dei V(s) per tutti gli stati, V(s) = $V_{new}(s)$. **Aggiornamento batch**.

Utilizzerò in parte già il nuovo valore di V(s) all'interno dell'equazione di aggiornamento. **Aggiornamento per trial.**

Entrambe le modalità di aggiornamento convergono.

Algoritmo per "iterative policy evaluation", versione per trial

Partiamo da una politica π(s,a) data.
Definiamo una soglia **relativa** di convergenza τ
Inizializziamo V(s) = 0 ∀s, compreso gli stati finali.
Repeat
{ Δ = 0;
for s = 1 : N // ∀s, ≠ TS
{ Value = V(s);

$$V_{k+1}(s) = \sum_{a_j} \pi(s,a_j) \sum_{s'} P^{a_j}_{s->s'} \left[R^{a_j}_{s->s'} + \gamma V(s') \right]$$

Δ = max(Δ, (| Value – $V_{k+1}(s)$ |) / | Value |)
}
} Until (Δ < τ);

Esempio

- L'agente evolve esplorando gli stati 1-14. TS sono gli stati terminali.
- L'agente può spostarsi: {dx, sx, alto, basso}
- $\pi(s,a)$ è equiprobabile.
- R = -1 per ogni transizione, tranne quando s' = TS (R = 0).
- $\gamma = 1$.

TS	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	TS

Esempio – $V(s)_{k=0}$

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Esempio – $V(s)_{k=1}$

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$V(s)_{k=0}$

0	-0.75	-1	-1
-0.75	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-0.75
-1	-1	-0.75	0

$V(s)_{k=1}$

Esempi:

- $V(s=10)_{k=1} = 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(14)_{k=0}] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(6)_{k=0}] +$
  $0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(9)_{k=0}] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(11)_{k=0}] = -1$
- $V(s=1)_{k=1} = 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(1)_{k=0}] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(5)_{k=0}] +$
  $0.25\ [1\ (0 + 1\ V(TS)_{k=0}] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(2)_{k=0}] = -0.75$

Esempio – $V(4)_{k=1}$ per trial

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$V(s)_{k=0}$

0	-0.75	-1	-1
-0,75	??	0	0
0	0	0	0
0	0	-0	0

$V(s)_{k=1}$

Per epoch:

- $V(s=5)_{k=1} = 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(9)_{k=0}] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(6)_{k=0}] +$
  $0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(4)_{k=0}] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(1)_{k=0}] = -1$

Per trial:

- $V(s=5)_{k=1} = 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(9)\ ] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(6)] +$
  $0.25\ [1\ (0 + 1\ V(4)] + 0.25\ [1\ (-1 + 1\ V(1)] = -1.375$

Esempio – $V(s)_{k=2}$

0	-0.75	-1	-1
-0.75	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-0.75
-1	-1	-0.75	0

$V(s)_{k=1}$

0	-1.4375	-1.9375	-2
-1.4375	-1.875	-2	-1.9375
-1.9375	-2	-1.875	-1.4375
-2	-1.9375	-1.4375	0

$V(s)_{k=2}$

Esempi:

- $V(s=10)_{k=2} = 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(14)_{k=1}] + 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(6)_{k=1}] + 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(9)_{k=1}] + 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(11)_{k=0}] = -1.875$
- $V(s=1)_{k=2} = 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(1)_{k=1}] + 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(5)_{k=1}] + 0.25\,[1\,(0 + 1\,V(TS)_{k=1}] + 0.25\,[1\,(-1 + 1\,V(2)_{k=1}] = -1.4375$

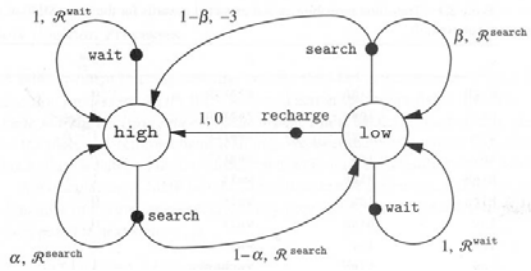
Sommario

Determinazione ricorsiva della Value function

Dalle equazioni di Bellman alla iterative policy evaluation.

Determinazione della policy ottima.

Esempio di calcolo di V*(s) - I



$\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.8$, $R^{Wait} = 1$, $R^{Search} = 3$

V(high):

$$state = high, action = wait \rightarrow Q(high, wait) = 1[R_{wait} + \gamma V^*(high)]$$
$$state = high, action = search \rightarrow Q(high, search) = \alpha[R^{search} + \gamma V^*(high)] + (1-\alpha)[R^{search} + \gamma V^*(low)]$$

V(low):

$$state = low, action = wait \rightarrow Q(low, wait) = [R_{wait} + \gamma V^*(low)]$$
$$state = low, action = search \rightarrow Q(low, search) = \beta[R^{search} + \gamma V^*(low)] + (1-\beta)[-3 + \gamma V^*(high)]$$
$$state = low, action = rechar \rightarrow Q(low, rechar) = \gamma V^*(h)$$

Esempio di calcolo di V*(s) - II

s = HighEnergy	a = Search;	Vh ≈ 6 + 0.65V*l
	a = Wait;	Vh = 5 (per ogni V*l)
s = Low	a = Search;	Vl ≈ -2.2 + 6.6 V*h
	a = Wait;	Vl = 5
	a = Recharge;	Vl = 0.8 V*h

Come calcolo V*h e V*l?

Esempio di calcolo di V*(s) - III

s = HighEnergy	a = Search;	Vh ≈ 6 + 0.65V*l
	a = Wait;	Vh = 5 (per ogni V*l)
s = Low	a = Search;	Vl ≈ -2.2 + 6.6 V*h
	a = Wait;	Vl = 5
	a = Recharge;	Vl = 0.8 V*h

Scelgo $\underset{a}{Max}$ sia per lo stato High Energy che Low Energy

Sistema non-lineare..

Esempio di calcolo di V*(s) - IV

s = HighEnergy	a = Search;	Vh ≈ 6 + 0.65Vl ≈ 9.25
s = Low	a = Wait;	Vl = 5
s = HighEnergy	a = Search;	Vh ≈ 6 + 0.65Vl ≈ 12
s = Low	a = Recharge;	Vl = 0.8 * Vh = 9.6
s = HighEnergy	a = Wait;	Vh ≈ 5
s = Low	a = Search;	Vl = -2.2 + 6.6Vh ≈ 33

Serve comunque una valutazione globale di V(s) per i vari stati.

La soluzione dipende dal valore dei parametri.

Sommario

Determinazione ricorsiva della Value function

Dalle equazioni di Bellman alla iterative policy evaluation.

Determinazione della policy ottima.