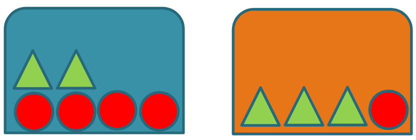
Teorema di Bayes

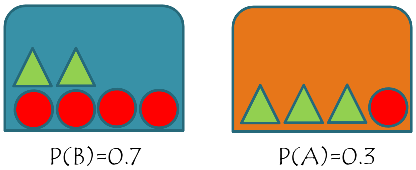
I. Frosio

Il caso discreto



- Abbiamo due scatole, una blu e una arancione;
- Le scatole contengono triangoli verdi e cerchi rossi, come mostrato in figura;
- Sappiamo che è stato estratto un cerchio rosso, senza sapere da quale scatola;
- Siano P(A)=0.3 e P(B)=0.7 le probabilità (date a priori) di scegliere rispettivamente la scatola arancione o la scatola blu;
- Quale è la probabilità che il cerchio rosso estratto provenga dalla scatola arancione?

Il caso discreto



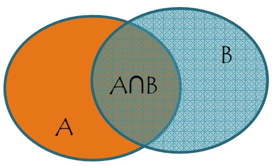
R –> Cerchio rosso
V –> Triangolo verde

- Quale è la probabilità che il cerchio rosso estratto provenga dalla scatola arancione, P(A|R)?
- Scriviamo la probabilità totale di estrarre un cerchio rosso:
  P(R) = P(R|B)*P(B)+P(R|A)*P(A) (1)
- Nella (1) non compare P(A|R), quindi non riusciamo a risolvere il problema…

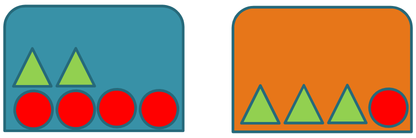
Il caso discreto

- Teorema di Bayes
- Consideriamo due eventi A e B con probabilità P(A) e P(B); abbiamo:
  P(A,B) = P(A|B)*P(B)
  P(A,B) = P(B|A)*P(A)
- Quindi:
  P(A|B)*P(B) = P(B|A)*P(A) =>
  P(A|B) = P(B|A)*P(A) / P(B) [Bayes]

Probabilità congiunta (i due eventi si verificano insieme)



Il caso discreto



P(B)=0.7 P(A)=0.3

R -> Cerchio rosso
V -> Triangolo verde

- P(A|R)=?
- P(R) = P(R|B)*P(B)+P(R|A)*P(A) (1)
- P(A|R) = P(R|A)*P(A) / P(R) [Bayes]
- Dalla (1) + [Bayes] abbiamo:
  P(A|R) = 0.25*0.3 / (0.66*0.7+0.25*0.3)

Il caso continuo (con definizioni)

- Il teorema si estende al caso continuo (densità di probabilità invece che eventi...):

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y|X=x)\,f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y|X=x)\,f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|X=\xi)\,f_X(\xi)\,d\xi}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|X=x)\,f_X(x)\,dx$$

$f_{X,Y}(x,y)$ Probabilità congiunta di x e y [fx,y(x,y) = fx(x|Y=y)*f(Y=y) = fy(y|X=x)*f(X=x)]

$f_X(x|Y=y)$ Probabilità a posteriori di x dato y

$f_X(x)$ $f_Y(y)$ Densità marginali per x e y, con fx(x) detta anche "a priori"