



Sistemi Intelligenti Reinforcement Learning: Equazioni di Bellman

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it



A.A. 2008-2009

1/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Sommario



Determinazione della value function. Esempio.

Le equazioni di Bellman

A.A. 2008-2009

2/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Reinforcement Learning Problem



Given: Repeatedly...

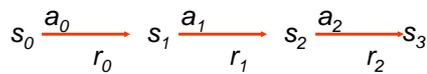
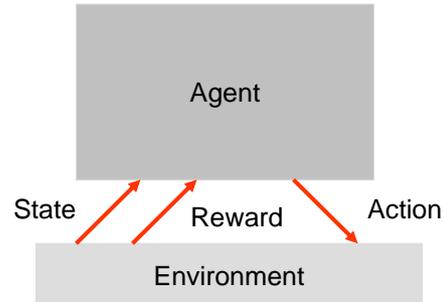
- Executed action
- Observed state
- Observed reward

Learn action policy $\pi: S \rightarrow A$

- ◆ Maximizes life reward
 $r_0 + \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 \dots$
from any start state.
- ◆ Discount: $0 < \gamma < 1$

Note:

- Unsupervised learning
- Delayed reward



Goal: **Learn** to choose actions that maximize life reward

$$r_0 + \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 \dots$$



Esempio: AIBO search



Azioni:

- 1) Rimanere fermo e aspettare che qualcuno getti nel cestino una lattina vuota.
- 2) Muoversi attivamente in cerca di lattine.
- 3) Tornare alla sua base (recharge station) e ricaricarsi.

Stato:

- 1) Alto livello di energia.
- 2) Basso livello di energia.

Policy:

$A(s = \text{high}) = \{\text{Search, Wait}\}$

$A(s = \text{low}) = \{\text{Search, Wait, Recharge}\}$

Goal: collezionare il maggior numero di lattine.



Funzionamento del Robot



Funzione Stato prossimo:

$$P_{s \rightarrow s'|a} = \Pr\{s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a\}$$

Se il livello di energia è alto ($s_t = \text{alto}$):

se scelgo Wait - $s_{t+1} = \text{alto}$.

se scelgo Search, s_{t+1} avrà una certa probabilità di diventare low.

$$P_{\text{high} \rightarrow \text{low} | \text{Search}} = \Pr\{s_{t+1} = \text{low} | s_t = \text{high}, a_t = \text{Search}\} = \alpha$$

Se il livello di energia è basso ($s_t = \text{basso}$):

se scelgo Wait - $s_{t+1} = \text{basso}$.

se scelgo Recharge - $s_{t+1} = \text{alto}$.

se scelgo Search, s_{t+1} avrà una certa probabilità di fermarsi.

$$P_{\text{low} \rightarrow \text{low} | \text{Search}} = \Pr\{s_{t+1} = \text{low} | s_t = \text{low}, a_t = \text{Search}\} = \beta$$

A.A. 2008-2009

5/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Reward del Robot



Funzione Reward:

$$R_{s \rightarrow s'|a} = E\{r_{t+1} = r' | s_t = s, a_t = a, s_{t+1} = s'\}$$

R^{search} reward se il robot sta cercando.

R^{wait} reward se il robot sta cercando.

R^{die} se occorre portarlo a ricaricarsi.

R^{recharge} se il robot va autonomamente a ricaricarsi.

$$R^{\text{search}} > R^{\text{wait}} > R^{\text{recharge}} > R^{\text{die}}$$

A.A. 2008-2009

6/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Forma tabellare

s	s'	a	$P_{s \rightarrow s'} a$	$R_{s \rightarrow s'} a$
alta	alta	ricerca	α	R^{search}
alta	bassa	ricerca	$1 - \alpha$	R^{search}
bassa	alta	ricerca	$1 - \beta$	$R^{\text{die}} = -3$
bassa	bassa	ricerca	β	R^{search}
alta	alta	attesa	1	R^{wait}
alta	bassa	attesa	0	R^{wait}
bassa	alta	attesa	0	R^{wait}
bassa	bassa	attesa	1	R^{wait}
bassa	alta	ricarica	1	$R^{\text{recharge}} = 0$
bassa	bassa	ricarica	0	$R^{\text{recharge}} = 0$
alta	Non esiste	ricarica	X	X

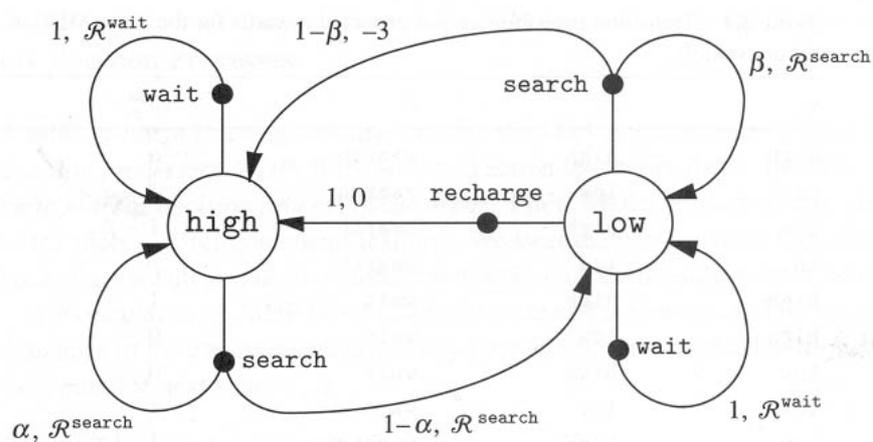
A.A. 2008-2009

7/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



State Transition Graph



Probabilistic Finite State Machine

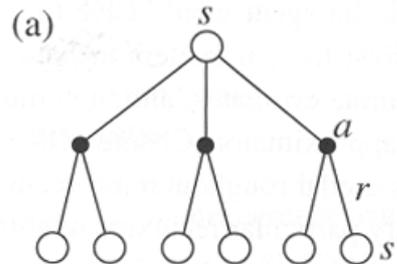
A.A. 2008-2009

8/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Policy



La policy deve essere ancora determinata. Come fa l'agente a determinare la policy ottimale?

Archi multipli fuoriuscenti da un'azione sono associati alla probabilità di scegliere quel cammino (ambiente stocastico).

Archi multipli fuoriuscenti da uno stato, sono associati alla policy.

A.A. 2008-2009

9/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Value function & policy

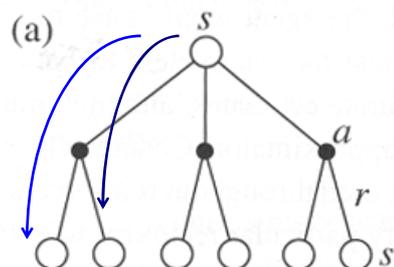
Nulla è detto sulla policy: dato uno stato, in quale nodo azione mi sposto?

Vogliamo costruire agenti lungimiranti

State-Value function
(function of the policy):

$$V^\pi(s) = E_\pi \{ R_t \mid s_t = s \} =$$

$$E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\}$$



Massimizzo la ricompensa a lungo termine, $V(\cdot)$. Dipende dalla policy:

A.A. 2008-2009

10/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Value function e modelli markoviani

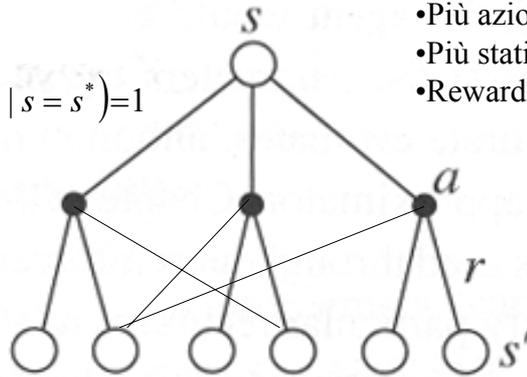


Anche la policy può essere stocastica.

Per ogni stato devo valutare:

- Più azioni.
- Più stati prossimi
- Reward stocastici.

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{azioni}}} \Pr(a_j | s = s^*) = 1$$



$$\sum_{k=1}^{N_{\text{stati}}} \Pr(s_{t+1} = s_k | s_t = s'; a_t = a_j) = 1$$

$$V^\pi(s) = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\}$$

A.A. 2008-2009

11/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Esempio di calcolo della Value function



Value function

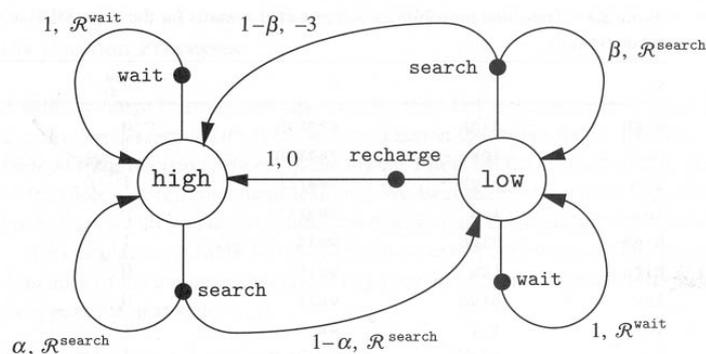
V(high) = ?

V(low) = ?

Policy

a(high) = ?

a(low) = ?



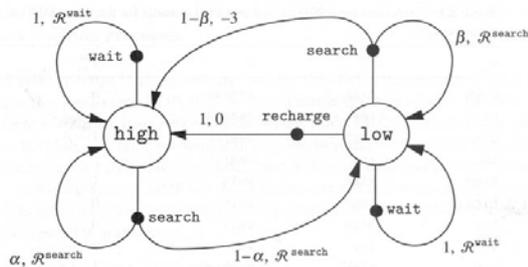
A.A. 2008-2009

12/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Esempio di calcolo della funzione valore



$\alpha=0.4, \beta=0.1, \gamma=0.8, R_{search}=3, R_{wait}=1$

$$V_h = \Pr(W) \times 1 \times [1 + 0.8V_h] + \Pr(S) \times 0.4 \times [3 + 0.8V_h] + \Pr(S) \times 0.6 \times [3 + 0.8V_l]$$

Wait
Search -> high
Search -> low

$$V_l = \Pr(W) \times 1 \times [1 + 0.8V_l] + \Pr(S) \times 0.1 \times [3 + 0.8V_l] + \Pr(S) \times 0.9 \times [-3 + 0.8V_h] + \Pr(R) \times 1 \times [0 + 0.8V_h]$$

Wait
Recharge
Search -> High

Search -> Low

Sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite: V_h e V_l
Come calcolo V_h e V_l ?

A.A. 2008-2009

13/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Esempio di calcolo della funzione valore - I



$$V_h = \Pr(W) \times 1 \times [1 + 0.8V_h] + \Pr(S) \times 0.4 \times [3 + 0.8V_h] + \Pr(S) \times 0.6 \times [3 + 0.8V_l]$$

Wait
Search -> high
Search -> low

$$V_l = \Pr(W) \times 1 \times [1 + 0.8V_l] + \Pr(S) \times 0.1 \times [3 + 0.8V_l] + \Pr(S) \times 0.9 \times [-3 + 0.8V_h] + \Pr(R) \times 1 \times [0 + 0.8V_h]$$

Wait
Recharge
Search -> High

Search -> Low

Devo specificare una policy (stocastica):

$$s = \text{high} \quad [\Pr(W) = 0.4 \quad \Pr(S) = 0.6]$$

$$s = \text{low} \quad [\Pr(W) = 0.4 \quad \Pr(S) = 0.5 \quad \Pr(R) = 0.1]$$

$$V_h = 0.4 \times 1 \times [1 + 0.8V_h] + 0.6 \times 0.4 \times [3 + 0.8V_h] + 0.6 \times 0.6 \times [3 + 0.8V_l]$$

$$V_l = 0.4 \times 1 \times [1 + 0.8V_l] + 0.5 \times 0.1 \times [3 + 0.8V_l] + 0.5 \times 0.9 \times [-3 + 0.8V_h] + 0.1 \times 1 \times [0 + 0.8V_h]$$

A.A. 2008-2009

14/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Esempio di calcolo della funzione valore - II



Devo specificare una policy (stocastica):

$$s = \text{high} \quad [\text{Pr}(W) = 0.4 \quad \text{Pr}(S) = 0.6]$$

$$s = \text{low} \quad [\text{Pr}(W) = 0.4 \quad \text{Pr}(S) = 0.5 \quad \text{Pr}(R) = 0.1]$$

$$V_h = 0.4x1x[1+0.8V_h] + 0.6x0.4x[3+0.8xV_h] + 0.6x0.6x[3+0.8V_l]$$

$$V_l = 0.4x1x[1+0.8V_l] + 0.5x0.1x[3+0.8xV_l] + 0.5x0.9x[-3+0.8V_h] + 0.1x1x[0+0.8V_h]$$

$$0.488 V_h = 2.20 + 0.288 V_l \quad \Rightarrow \quad V_h \approx 6,35$$

$$0.64V_l = -0.8 + 0.44 V_h \quad \Rightarrow \quad V_l \approx 3,12$$

Cosa si può concludere? Quasi nulla.



Esempio di calcolo della funzione valore - III



Devo specificare una policy (stocastica), robot più attivo:

$$s = \text{high} \quad [\text{Pr}(W) = 0.2 \quad \text{Pr}(S) = 0.8]$$

$$s = \text{low} \quad [\text{Pr}(W) = 0.2 \quad \text{Pr}(S) = 0.7 \quad \text{Pr}(R) = 0.1]$$

$$V_h = 0.2x1x[1+0.8V_h] + 0.8x0.4x[3+0.8xV_h] + 0.8x0.6x[3+0.8V_l]$$

$$V_l = 0.2x1x[1+0.8V_l] + 0.7x0.1x[3+0.8xV_l] + 0.7x0.9x[-3+0.8V_h] + 0.1x1x[0+0.8V_h]$$

$$0.488 V_h = 2.20 + 0.288 V_l \quad \Rightarrow \quad V_h \approx -14.2$$

$$0.64V_l = -0.8 + 0.44 V_h \quad \Rightarrow \quad V_l \approx -28.465$$

E' una policy peggiore.

Come utilizziamo V per determinare la policy ottimale?



Sommario



Determinazione della value function. Esempio.

Le equazioni di Bellman



Il modello markoviano



Il comportamento dell'ambiente è definito dallo stato: $S = \{s_j\}$

Per ogni stato l'agente sceglie un'azione: $a = a(s)$ $A = \{a_k\}$

Policy di un agente: $\pi(s, a)$ è quanto dobbiamo definire.

L'ambiente ha una evoluzione stocastica rappresentata da un MDP:

$$P_{s_t=s \rightarrow s_{t+1}=s' | a_t=a} = \Pr\{s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a\}$$

Inoltre, ad ogni istante fornisce un reward immediato associato alla transizione, stimato all'istante t come:

$$R_{s_t=s \rightarrow s_{t+1}=s' | a_t=a} = E\{r_{t+1} = r' | s_t = s, a_t = a, s_{t+1} = s'\}$$

$$\forall s \in S; \forall a \in A$$



La value function

Nulla è detto sulla policy: dato uno stato, quale azione scegliere? In quale stato mi sposto?

Vogliamo costruire agenti lungimiranti.

State-Value function:

$$V^\pi(s) = E_\pi \{R_t \mid s_t = s\} = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\}$$

Massimizzo la ricompensa a lungo termine, $V(\cdot)$. Dipende dalla policy:

A.A. 2008-2009

19/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



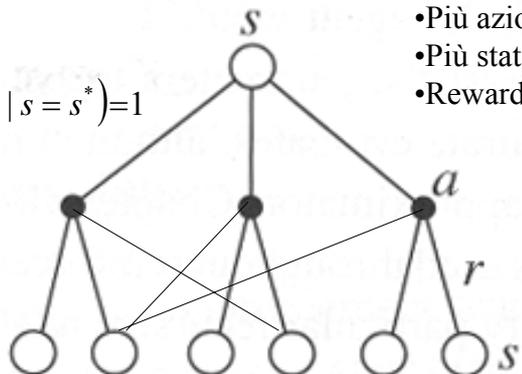
Value function e modelli markoviani

Anche la policy può essere stocastica.

Per ogni stato devo valutare:

- Più azioni.
- Più stati prossimi
- Reward stocastici.

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{azioni}}} \Pr(a_j \mid s = s^*) = 1$$



$$\sum_{k=1}^{N_{\text{stati}}} \Pr(s_{t+1} = s_k \mid s_t = s'; a_t = a_j) = 1$$

$$V^\pi(s) = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\}$$

A.A. 2008-2009

20/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Bayes' theorem



- $P(A, B) = P(A | B) P(B)$
- $P(r, s') = P(r | s') P(s') = P(r | s') P(s' | a) P(a)$



Calcolo ricorsivo della Value function



$$V^\pi(s) = E_\pi \{R_t | s_t = s\} = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\}$$

$$V^\pi(s') = E_\pi \{R_{t+1} | s_{t+1} = s'\} \quad \text{Relazione?}$$

$$V^\pi(s) = E_\pi \left\{ r_{t+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\} =$$

$$V^\pi(s) = E_\pi \left\{ r_{t+1} + \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\}$$

Io termine

Il termine

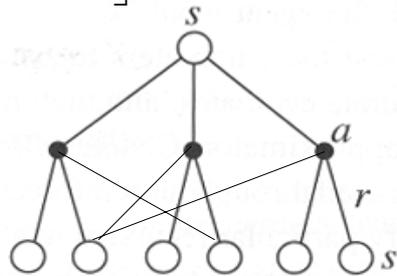


$V^\pi(s)$: primo termine

$$E_\pi \{r_{t+1} \mid s_t = s\} = \left[\sum_{a_j} \pi(a_j, s) \right] \sum_{s'} P_{s \rightarrow s' | a_j} [R_{s \rightarrow s' | a_j}]$$

Per ogni stato devo valutare:

- Più azioni.
- Più stati prossimi
- Reward stocastici nella transizione ad un passo



Visione Bayesiana: Probabilità di ottenere il reward: $R_{s \rightarrow s' | a_j}$ condizionata all'arrivare nello stato s' , che a sua volta è condizionata allo scegliere l'azione a_j .

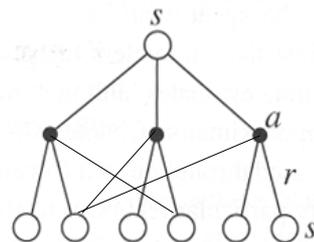


$V^\pi(s)$: secondo termine

$$V^\pi(s) = \dots + E_\pi \left\{ \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\} \quad V^\pi(s') = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_{t+1} = s' \right\}$$

Per ogni stato devo valutare:

- Più azioni.
- Più stati prossimi
- Reward stocastici.



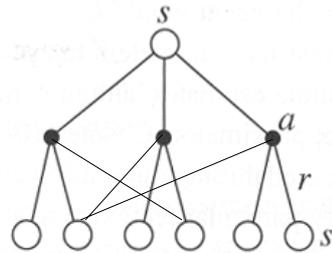
Nella valutazione dello stato s_t , sono considerati con un peso opportuno e scontati di γ , i reward a lungo termine che collezionerò a partire dai diversi stati s' .



$V^\pi(s)$: secondo termine

$$V^\pi(s) = \dots + E_\pi \left\{ \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\} \quad V^\pi(s') = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_{t+1} = s' \right\}$$

In s confluiranno i reward a lungo termine di tutti gli stati prossimi, s' , ciascuno pesato con la probabilità di passare da s a s' , ovvero, in termini Bayesiani, condizionati alla realizzazione della transizione di stato, $s \rightarrow s'$.



$$E_\pi \left\{ \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\} = \gamma \sum_t E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_{t+1} = s' \right\} \Pr(s_{t+1} = s_k \mid s_t = s)$$

A.A. 2008-2009

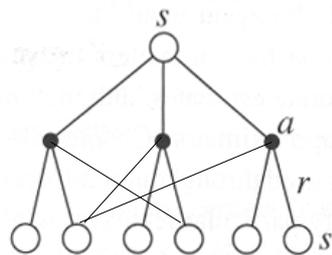
25/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



$V^\pi(s)$: secondo termine

$$E_\pi \left\{ \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\} = \gamma \sum_t E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_{t+1} = s' \right\} \Pr(s_{t+1} = s_k \mid s_t = s)$$



$$E_\pi \left\{ \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\} = \left[\sum_{a_j} \pi(a_j, s) \right] \sum_{s'} P_{s \rightarrow s' | a_j} [\gamma V^\pi(s')]$$

A.A. 2008-2009

26/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Calcolo ricorsivo della Value function



$$V^\pi(s) = E_\pi \{R_t | s_t = s\} = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s \right\}$$

$$V^\pi(s') = E_\pi \{R_{t+1} | s_{t+1} = s'\}$$

Legame?

Policy Next-state

$$P_{s \rightarrow s' | a} = \Pr \{s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a\}$$

$$V^\pi(s) = \sum_{a_j} \pi(a_j, s) \sum_{s'} P_{s \rightarrow s' | a_j} R_{s \rightarrow s' | a_j} + E_\pi \left\{ \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} \mid s_t = s \right\}$$

$$V^\pi(s) = \left\{ \sum_{a_j} \pi(a_j, s) \sum_{s'} \left\{ P_{s \rightarrow s' | a_j} \left[R_{s \rightarrow s' | a_j} + \gamma V^\pi(s') \right] \right\} \right\}$$

Bellman's equation

A.A. 2008-2009

27/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>

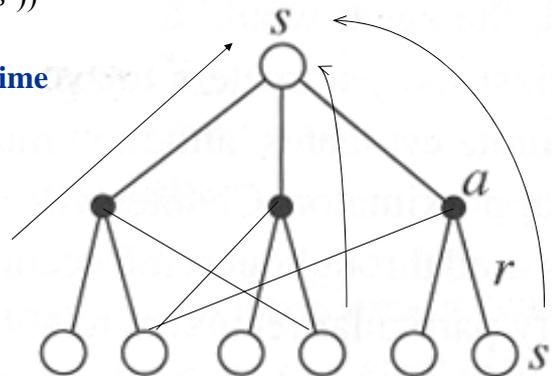


Osservazioni



$$V^\pi(s) = \text{funz}(V^\pi(s'))$$

Backwards in time



$$V^\pi(s) = \left\{ \sum_{a_j} \pi(a_j, s) \sum_{s'} \left\{ P_{s \rightarrow s' | a_j} \left[R_{s \rightarrow s' | a_j} + \gamma V^\pi(s') \right] \right\} \right\}$$

A.A. 2008-2009

28/30

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



Confronto con il setting non associativo



	Setting non associativo	Setting associativo
Task	Azioni	Comportamenti (catena di azioni)
Reward	Reward istantaneo	Somma (scontata) dei reward collezionati lungo il task.
Max	Reward atteso sulla singola azione	Reward del comportamento
Orizzonte temporale del task	Finito (1 azione)	Finito / infinito per il singolo task
Policy	Stocastica	Stocastica
Stato	Non definito	Markoviano



Sommario



Determinazione della value function. Esempio.

Le equazioni di Bellman