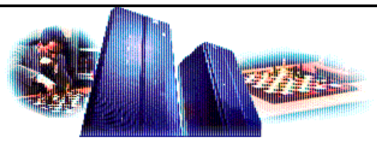
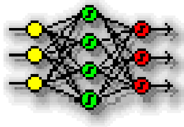




Sistemi Intelligenti
I sistemi lineari

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Sommario

Matrici

Sistemi lineari

Analisi dell'affidabilità della stima

Determinazione dei parametri di un modello non-lineare

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + ...\quad a_{1N} x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22} x_2 + ...\quad a_{2N} x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2} x_2 + ...\quad a_{MN} x_N = b_M$

{aij} – coefficienti in numero N x M
{xj} – incognite, M
{bj} – termini noti, N

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

Esempio:
$3x_1 + 2\, x_2 + ...\quad 4x_N = 5$
$4x_1 - 2\, x_2 + ...\quad 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + ...\quad -3\, x_N = -1$

Matrici

$$A = [a_{i,j}] \qquad A^T = [a_{j,i}]$$

$$\alpha A = [\alpha a_{i,j}] \qquad C = A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$C = AB = [c_{i,j}] \text{ dove } [c_{i,j}] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Prodotto degli elementi di una riga per gli elementi di una colonna.
Se A (n x m) ➔ B (m x p) ➔ C (n x p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ==> \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$$

Se il numero di righe = numero di colonne, matrice quadrata

Matrici (Proprietà)

La somma è associativa e commutativa (A + B) + C = A + (B + C).

Il prodotto è associativo rispetto alla somma ma non gode della proprietà commutativa:

(A+B)C = AC + BC.

AB ≠ BA

$$I = \left[a_{i,j}\right] = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{matrice identità}$$

$$AI = A = IA$$

$$\text{vettore come matrice colonna} : \overline{u}^T = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$\text{prodotto vettore matrice} : \overline{v} = \overline{u}^T M$$

Minore complementare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A_{ij}* minore complementare di a_{ij} = determinante della matrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j di A.

$$A^*_{21} = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3*2 - (-2*1) = +8$$

Determinante di una matrice Quadrata

$$\det(A) = \sum_i (-1)^{(i+j)} a_{ij} A^*_{ij} = \sum_j (-1)^{(i+j)} a_{ij} A^*_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Elementi sulla riga}$$

$\det(A) = (-1)^{(2+1)}$ (2) $[(3 * 2) - (-2 * 1)] + (-1)^{(2+2)}$ (0) $[(1*2) - (-2*1)] +$
$(-1)^{(2+3)}$ (1) $[(1*1)-(3*1)] = -16 + 2 = -14$

Altre proprietà delle matrici

$\det(AB) = \det(A) \det(B)$

$\det(\mathrm{diag}(W)) = \prod_k w_{k,k}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A\, B\, C)^T = C^T B^T A^T$

Una matrice U, si dice ortogonale se $U^T U = \mathrm{diag}(W)$.
Una matrice U, si dice ortonormale se $U^T U = I \rightarrow U^{-1} = U^T$

Condizione di ortonormalità:
Il determinante è = 1.
La somma dei prodotti di due righe o di due colonne è = 0.
La somma dei quadrati degli elementi su righe e colonne = 1
Esempio notevole: **matrice di rotazione (cambio di sistema di riferimento)**.

Rango di una matrice

Data una matrice A di ordine n (n x n),

una matrice A n x n ha rango m < n se e solo se esiste un suo minore di ordine m non nullo mentre sono nulli tutti i minori di ordine m + 1.

Una matrice A n x n ha rango n (rango pieno) se e solo se il suo determinante è diverso da 0

Rango di una matrice M x N è la dimensione massima di tutte le matrici quadrate estraibili da A e con determinante non nullo. Il rango è massimo quando non è inferiore alla dimensione minima della matrice.

Calcolo della matrice inversa

Matrice dei complementi algebrici

$$A^{-1} = [1/\det(A)]\ A+$$

$$A^+_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}\det (A^*_{ji})}_{\text{Minore complementare}}$$

Esempio di matrice Inversa

A = [$a_{i,j}$], matrice quadrata.

A+$_{ij}$ matrice dei complementi algebrici = minori complementari moltiplicati $(-1)^{i+j}$

$$A^{-1} = 1/\det(A) \begin{bmatrix} A^{+}_{11} & A^{+}_{21} & A^{+}_{n1} \\ A^{+}_{12} & A^{+}_{22} & A^{+}_{32} \\ A^{+}_{13} & A^{+}_{23} & A^{+}_{33} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} A = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{-1}{14} \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 & -[3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1] & 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \\ -[2 \cdot 2 - 1 \cdot 1] & 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 & -[1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2] \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 & -[1 \cdot 1 - 3 \cdot 1] & 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = (-1/14) \begin{bmatrix} -1 & -8 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -14 \qquad AA^{-1} = -1/14 \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3(-3) - 2 \cdot 2 & 1(-8) + 3 \cdot 4 - 2(2) & 1 \cdot 3 + 3(-5) - 2(-6) \\ 2(-1) + 0(-3) + 1(2) & 2(-8) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 0(-5) + 1(-6) \\ 1(-1) + 1(-3) + 2 \cdot 2 & 1(-8) + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2] & 1 \cdot 3 + 1(-5) + 2(-6) \end{bmatrix} = I$$

Se esiste, la matrice inversa è unica.

Sommario

Matrici

Sistemi lineari

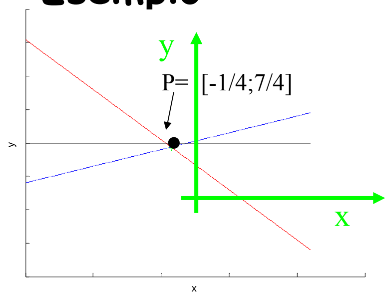
Analisi dell'affidabilità della soluzione

Determinazione dei parametri di un modello non-lineare

Esempio

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$



$1\ x_1 - 1\ x_2 = -2$

$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

Risolvo per sostituzione: x1 = -2 + x2.

-3 (-2 + x2) – x2 = -1 ➔ x2 = 7/4

$x_1 = -2 + 7/4$ ➔ x1 = -1/4

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + ...\ \ a_{1N}\ x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + ...\ \ a_{2N}\ x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\ x_2 + ...\ \ a_{MN}\ x_N = b_M$

Esempio:

$3x_1 + 2\ x_2 + ...\ \ 4x_N = 5$

$4x_1 -2\ x_2 + ...\ \ 0.5\ x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\ x_2 + ...\ \ -3\ x_N = -1$

A x = b

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Sistema quadrato (N x N)

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{1N}\,x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{2N}\,x_N = b_2$

....

$a_{N1}x_1 + a_{N2}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{NN}\,x_N = b_N$

Esempio:
$3x_1 + 2\,x_2 + \ldots\ldots\; 4x_N = 5$
$4x_1 - 2\,x_2 + \ldots\ldots\; 0.5\,x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\,x_2 + \ldots\ldots\; -3\,x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A è N x N quadrata

$\mathbf{A\,x = b}$
$\mathbf{A^{-1}Ax = A^{-1}b}$
$\mathbf{x = A^{-1}\,b}$ se $\mathbf{A^{-1}}$ esiste, 1 soluzione.

altrimenti, nessuna (rette parallele)
o
∞ soluzioni (rette coincidenti).

Soluzione dei sistemi lineari

Scrivo il sistema lineare: Ax = b

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$
$-3\,x_1 - 1\,x_2 = -1$

X è una soluzione se soddisfa tutte le equazioni del sistema stesso.

Soluzioni:
- ! ∃ Soluzione (sistema impossibile)
- ∃ Soluzione (sistema possibile)
  - 1 soluzione (sistema determinato)
  - > 1 soluzione (∞^k soluzioni – sistema indeterminato).

Soluzione di sistemi lineari quadrati

$x = A^{-1} b$

Condizione di esistenza dell'inversa è $\det(A) \neq 0$

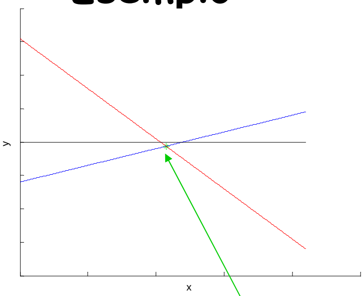
Il sistema ammette 1 ed 1 sola soluzione se $\det(A) \neq 0$

Altrimenti: nessuna o infinite soluzioni

Esempio

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$



$1\ x_1\ - 1\ x_2 = -2$

$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Rango di A è pieno}}$

$\det(A) = 1(-1)-(-1)(-3)=-1-3=-4$

$x_1 = -1/4$

$x_2 = 7/4$

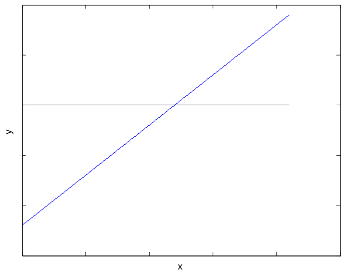
$P = A^{-1} b$

P = [-1/4 7/4]

Esempio di soluzione non univoca

$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$
$2\,x_1 - 2\,x_2 = -4$

$y = x + 2$
$2y = 2x + 4$



$x_1 = x$
$x_2 = y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 1(-2)-(-1)(2)=-2+2=0$

La soluzione non è unica: tutti i punti della retta soddisfano contemporaneamente le 2 equazioni

Risoluzione di un sistema 2x2

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$

Sistema M x N, M > N

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots \quad a_{1N}\, x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots \quad a_{2N}\, x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots \quad a_{MN}\, x_N = b_M$

Esempio:
$3x_1 + 2\, x_2 + \ldots\ldots \quad 4x_N = 5$
$4x_1 - 2\, x_2 + \ldots\ldots \quad 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + \ldots\ldots \quad -3\, x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A x = b

A è M x N, M > N, non è una matrice quadrata.

1, nessuna, ∞ soluzioni.

Ho delle equazioni di troppo, devono essere correlate (combinate linearmente), perché il sistema ammetta soluzione.

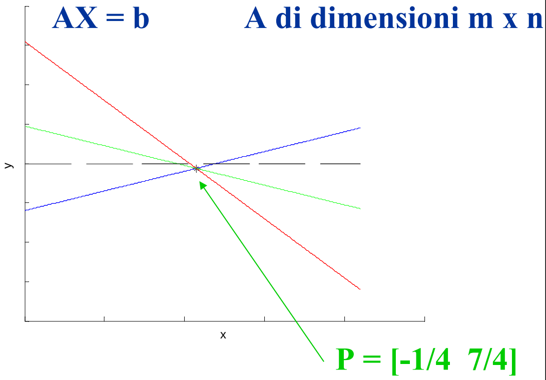
Posso sempre calcolare la soluzione in forma matriciale.

Sistemi lineari con m > n

J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$
$y = -x + 3/2$

Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.



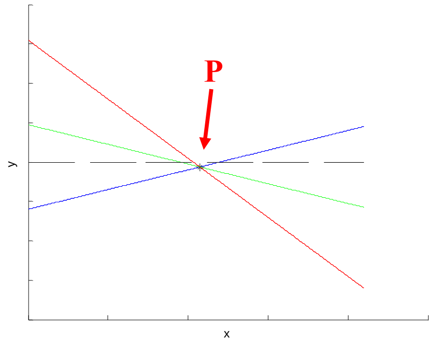
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +1.5 \end{bmatrix}$$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

Correlazione tra le equazioni



α_1 (y - x + 2) +
α_2 (y +3x – 1) =
(y + x - 3/2)

In questo caso:
α_1 = -1/2
α_2 = -1/2

Tutte le rette per la soluzione P possono essere descritte come un fascio (di rette).
Un fascio di rette è univocamente identificato da due rette (che si incontrino in un punto).
La terza equazione è combinazione lineare delle prime due.

Sistema lineare: soluzione algebrica

Caso generale:

A X = B $\Rightarrow$ **A' A X = A' B** $\Rightarrow$ **(A' A)$^{-1}$A' A X = (A' A)$^{-1}$A' B** $\Downarrow$ **X = (A'A)$^{-1}$A'B**

(A'A) gioca il ruolo di A quadrata.

Quale criterio viene soddisfatto da X?

Riformulazione del problema

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{1N}\,x_N = b_1 + \nu_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{2N}\,x_N = b_2 + \nu_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{MN}\,x_N = b_M + \nu_M$

Modello **Misure**

Errore di modello (sistematico, randomico). M x 1 => **Residuo.**

A x = b + N

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Soluzione come problema di ottimizzazione

Funzione costo: $(Ax - b)^2 = \sum_k \nu_k^{\,2} = \|Ax - b\|^2$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x, non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza minima da tutte le rette.

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_k \nu_k^{\,2} = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{A^T A x = A^T b}$$

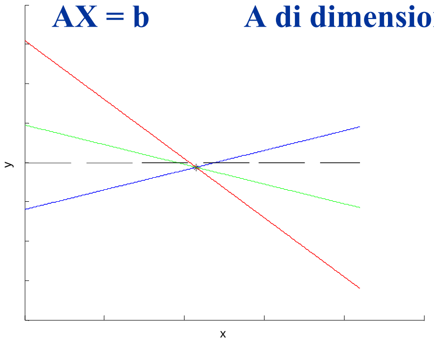
$$\mathbf{X = (A^T A)^{-1} A^T b}$$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convessi) perchè il costo cresce sia che il modello sovrastimi che sottostimi le misure.

Sistemi lineari con m > n

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 3/2



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det = 24$$

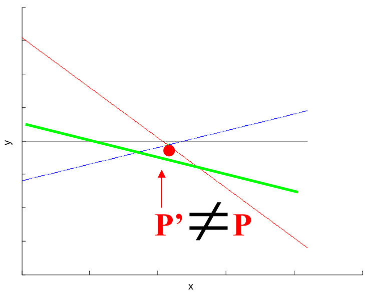
$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P = C * A^T * b$ **P = [-0.25 +1.75]**
intersezione

Sistemi lineari con m > n - non esiste soluzione (matematica)

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 1/2



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det = 24$$

$$\sum_k {v_k}^2 = \|Ax - b\|^2 = 0.865$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P = C * A^T * b$ **P' = [-0.25 +1.4167]**
No intersezione

Giustificazione statistica

- **<u>C'è un solo insieme vero</u> dei parametri**, mentre ci **possono essere infiniti universi di dati per effetto dell'errore di misura**.
- La domanda quindi più corretta sarebbe: "Dato un certo insieme di parametri, qual'è la probabilità che questo insieme di dati sia estratto?" (più correttamente si parla di densità di probabilità?)
- Cioè, **per ogni insieme di parametri, calcoliamo la probabilità che i dati siano estratti. Ovverosia la likelihood (verosimiglianza) dei parametri, dato un certo insieme di dati.**

La stima ai minimi quadrati dei parametri è equivalente a determinare i parametri che massimizzano la funzione di **verosimiglianza** sotto l'ipotesi di errore **Gaussiano a media nulla**.

Sommario

Matrici

Sistemi lineari

Analisi dell'affidabilità della stima

Determinazione dei parametri di un modello non-lineare

Condizionamento della matrice C = A'*A

$\mathbf{X = (A'A)^{-1}A'B = CA'B}$ - C è matrice di covarianza.

Per evitare di ottenere elementi troppo grandi che rendono la norma della matrice C vicina alla precisione della macchina, si preferisce utilizzare la Singular Value Decomposition per risolvere il sistema lineare.

$$\boxed{\mathbf{A\,x = b}}$$

Sistema lineare: soluzione robusta

$\mathbf{A\,X = B} \Longrightarrow \mathbf{A'\,A\,X = A'\,B} \Longrightarrow \mathbf{X = (A'A)^{-1}A'B}$

Numero di condizionamento varia circa con (A'*A).

Soluzione tramite Singular Value Decomposition (diagonalizzazione)

Numero di condizionamento varia circa con A.

$\mathbf{A\,X = B}$

$\mathbf{U\,W\,V\,X = B}$

$$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$$

Ortonormale M x N (U) Diagonale (N x N) (W) Ortonormale N x N (V)

$\mathbf{V^T\,W^{-1}\,U^T\,U\,W\,V\,X = V^T\,W^{-1}\,U^T\,B} \rightarrow \mathbf{X = V^T\,W^{-1}\,U^T\,B}$

- La matrice C non viene formata.
- W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W.

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

Quando C è singolare?

$x = (A'^*A)^{-1}A'^* b$ $\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$

Se A è rank-deficient, A'*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W che risulta uguale a 0.

In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

Valutazione della bontà della stima

$x = (A'^*A)^{-1}A'^* b \iff \min_{\mathbf{x}} \sum_k v_k^2 = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^2$

Errore di modellizzazione Gaussiano a media nulla $N(0,\sigma^2)$

$<v_k> = 0$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sum_{k=1}^{M} \left(v_k^2\right) = |v|^2$$

Varianza della stima = varianza dell'errore di misura

.

Richiamo di statistica

Data una variabile casuale, x, il suo valore medio calcolato su N campioni è dato da:

$$M_x = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}$$

Data una variabile casuale, x, la sua varianza su N campioni è data da:

$$\sigma^2{}_x = \frac{\sum_{k=1}^{N} (x_k - M_x)^2}{N}$$

Data una variabile casuale, x, la sua deviazione standard su N campioni è data da:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_k - M_x)^2}{N}}$$

Varianza e deviazione standard descrivono la dispersione attorno al valor medio.

Valutazione della bontà della stima del singolo parametro e della loro correlazione

x = (A'*A)$^{-1}$A'* b

x = CA'* b

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \sum_{m=1}^{M} \left(\nu_m{}^2\right)$$

Chiamiamo u e v le variabili casuali associate all'errore sui parametri e all'errore di modellizzazione, rispettivamente. Si suppone errore a media nulla e Gaussianamente distribuito.

(x + u) = C A'* (b + v)

$$\Downarrow$$

u = C A'* v

Impostazione del calcolo della correlazione tra i parametri

u = C A' v

Vogliamo individuare la correlazione tra due parametri i e j. Devo quindi determinare la loro correlazione:

$$\begin{bmatrix} u_1^{\;2} & u_1u_2 & \dots & u_1u_W \\ u_2u_1 & u_2^{\;2} & \dots & u_2u_W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_Wu_1 & u_Wu_2 & \dots & u_W^{\;2} \end{bmatrix}$$

$<u_i, u_j>$

u = C A' v => u' = v'A (C)'

uu' = C A' vv'A C' => Applicando l'operatore di media, si ottiene:

<uu'> = C A' <vv'>A C'

Dato che v sono i residui, e sono indipendenti, e tutte i punti di controllo hanno lo stesso tipo di errore di misura, si avrà che $<vv'> = I\sigma_0^2$.

Correlazione tra i parametri

$<uu'> = CA'\,IA\,C'\sigma_0^2 = C'\,\sigma_0^2$ $\boxed{<u'u> = C\,\sigma_0^2}$

Da cui si giustifica il nome di matrice di covarianza per C.

Segue che: $\sigma^2(u_{ij}) = c_{ij}\,\sigma_0^2$ Varianza sulla stima del parametro.

$$-1 \le r_{ij} = \frac{<u_iu_j>}{\sqrt{<u_i>^2<u_j>^2}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_ic_j}} \le +1$$

Indice di correlazione tra il parametro i ed il parametro j
(empiricamente si scartano parametri quando la correlazione è superiore al 95%)

Vanno rapportati alle dimensioni dei parametri coinvolti.

Matrice di covarianza

Date N variabili casuali: $x = [x_1, x_2, \ldots x_N]$ si può misurare la correlazione tra coppie di variabili. E' comodo rappresentare la correlazione tra variabili casuali in un'unica matrice detta **matrice di covarianza** come:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_1} & \sigma_{x_1x_2} & . & \sigma_{x_1x_N} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2x_2} & . & \sigma_{x_2x_N} \\ . & . & . & . \\ \sigma_{x_Nx_1} & \sigma_{x_Nx_2} & . & \sigma_{x_Nx_N} \end{bmatrix}$$

Varianza: $\sigma_{x_1x_1} = \sigma^2{}_{x_1}$ N parametri

Covarianza: $\sigma_{x_ix_j} = \sigma_{x_jx_i}$ $i \neq j$ $(N-1)^2/2$ parametri

Correlazione

Date due variabili casuali: x_i, x_j, l'indice di correlazione misura quanto le coppie di variabili estratte: $p(x_i, x_j)$ stanno su una retta:

$$r = \frac{M_{x_ix_j} - M_{x_i}M_{x_j}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$$

$-1 \leq r \leq +1$

Definendo la covarianza tra x_i ed x_j come:

$$\sigma_{x_ix_j} = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j \left(x_i - M_{x_i}\right)\left(x_j - M_{x_j}\right)$$

Dalla definizione di deviazione standard risulta:

$$r = \frac{\sigma_{x_ix_j}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$$

Esempio

Supponiamo di avere distorsione radiale misurata come segue:

Distanza [mm]	Distorsione radiale [mm]
0.000	0.000
20.072	0.004
40.855	0.018
63.155	0.047
88.034	0.062
116.995	0.035
152.472	-0.064

Modello lineare utilizzato: $\Delta r = k_1 r + k_2 r^3 + k_3 r^5 + k_4 r^7$.

Parametri determinati:
$k_1 = 1.99697 \times 10^{-4}$
$k_2 = 1.94801 \times 10^{-7}$
$k_3 = -1.97388 \times 10^{-11}$
$k_4 = 0.43934 \times 10^{-15}$

Analisi di varianza?

Stima di parametri in insiemi di equazioni non lineari - linearizzazione

y = f(x) viene linearizzata utilizzando il differenziale:

$$y = f(x_o) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_o} dx = y_o + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_o} dx$$

Si può vedere come sviluppo di Taylor arrestato al 1° ordine
E' un'equazione lineare in dx.

Per funzioni di più variabili, f(**P;W**) = 0, la linearizzazione si può scrivere come:

$$F(\mathbf{P};\mathbf{W}) = F(\mathbf{P_o};\mathbf{W_o}) + \sum_{j=1}^{W} \left.\frac{\partial F(.)}{\partial w_j}\right|_{P_o, W_o} * dw_j = k - \sum_{j=1}^{W} a_j * dw_j$$

E' un'equazione lineare nei dw che descrive il comportamento della funzione F(.) nell'intorno del punto Po con i parametri Wo.

Sommario

Sistemi lineari e matrici

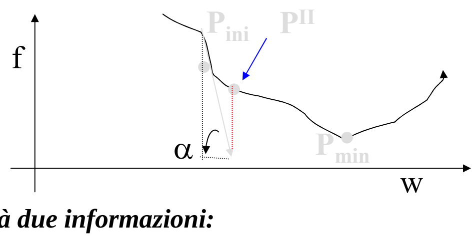
Soluzione dei sistemi lineari

Analisi dell'affidabilità della stima

Determinazione dei parametri di un modello non-lineare

Minimizzazione tramite gradiente: 1 variabile

Tecnica del gradiente applicata alla minimizzazione di funzioni non-lineari di **una variabile, p,** e di **un parametro, w**: f = f (P | w).



La derivata, mi dà due informazioni:

1) In quale direzione di w, la funzione decresce.
2) Quanto rapidamente decresce.

Definisco uno spostamento arbitrario lungo la pendenza: maggiore la pendenza maggiore lo spostamento.

$dw \propto -f'(w;P)$ dati P, w.

Occorre un'inizializzazione.

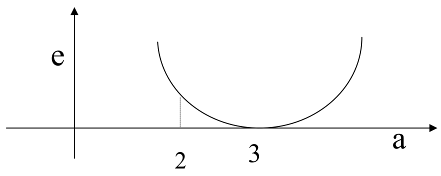
Metodo iterativo.

Esempio di applicazione tecnica del gradiente per funzioni di 1 variabile

Supponiamo che il modello da noi considerato sia semplice: $y = ax^2$

Misuriamo un punto sulla parabola: x = 1, y =3.
Vogliamo modificare a in modo che la parabola passi per P(x,y).
La funzione costo da minimizzare sarà: $e = f(a \mid x,y) = (y-ax^2)^2$
La soluzione è a = 3

Partiamo da $a_{ini} = 2$.
$e = (3 – 2*1)*1 = 1$



Utilizziamo il metodo del gradiente:
Calcoliamo la derivata di $f(a \mid x,y)$ ➔ $f'(a) = -2\,(y – a\,x^2)\,x^2$

Minimizzazione – underdamping

Consideriamo $\alpha = 1$
Calcoliamo la derivata di f(.) ➔ $f'(.) = -2\,(y – a\,x^2)\,x^2$

Utilizziamo il metodo del gradiente:

Passo 1:
Calcoliamo l'incremento da dare al parametro a:
da =-[-2 (3 – 2 1) 1] = -[-6 +4] = 2 a' = 2 + 2 = 4

Passo 2:
Calcoliamo l'incremento da dare al parametro a:
da = -[-2 (3 - 4 1) 1] = -[-6 +8] = -2 a'' = 4 – 2 = 2
Oscillazioni!!!

Mi sposto troppo velocemente da una parte all'altra del minimo.

Minimizzazione -2 passi

Consideriamo $\alpha = 0.4$
Calcoliamo la derivata di f(.) ➔ $f'(.) = -2 (y - a x^2) x^2$

Utilizziamo il metodo del gradiente:

Passo 1:
Calcoliamo l'incremento da dare al parametro a:
da = -**0.4** [-2 (3 – 2 1) 1] = -[-6 +4] = 0.8   a' = 2 + 0.8 = 2.8

Passo 2:
Calcoliamo l'incremento da dare al parametro a:
da = - **0.4** [-2 (3 – 2.8 1) 1] = -[-6 + 5.6] = 0.16   a'' = 2.8 + 0.16 = 2.96
Converge ad a = 3.

Posso correre il rischio di spostarmi troppo lentamente

Minimizzazione di funzioni di più variabili

min(f(**x**, **w**)) funzione costo od errore, **w** vettore.

Modifico il valore dei pesi di una quantità proporzionale alla pendenza della funzione costo rispetto a quel parametro.
La pendenza è una direzione nello spazio, non è più solamente destra / sinistra. Devo calcolare la derivata spaziale = **gradiente** della funzione costo, f(.).
Estensione della tecnica del gradiente a più variabili.

dw = - α ∇f(x;w), dato P, W.

Serve un'**approssimazione iniziale** per i pesi $W_{ini} = \{w_j\}_{ini}$.

Sommario

Sistemi lineari e matrici

Soluzione dei sistemi lineari

Analisi dell'affidabilità della stima

Linearizzazione di sistemi di funzioni

Determinazione dei parmetri di un modello non-lineare.