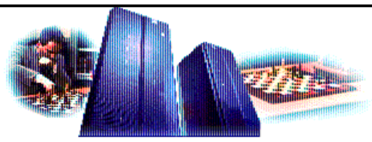
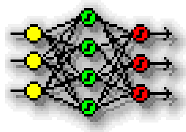




Sistemi Intelligenti
I fuzzy system

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

B. Kosko, Neural Networks and Fuzzy Systems, Prentice Hall.

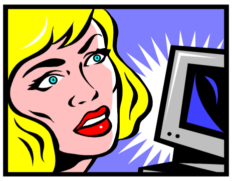
Per la logica basata su fuzzy set: corso di Logica Fuzzy della laurea specialistica in informatica tenuto dai Proff. Aguzzoli e Marra.

I Fuzzy set

Nella logica classica $A \cap A^c = \emptyset$. $A = T$ (True) $\Leftrightarrow$ $A^c = F$ (False). $A = [T, F]$.

Nella teoria fuzzy, tutto è questione di gradazione.

Dal punto di vista matematico, fuzzy e’ equivalente ad una proposizione logica che puo’ assumere un numero infinito di valori tra vero e falso.



La funzione verita’ generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy o $\mathbf{L_1}$.

La funzione verità fuzzy

La funzione verita’ generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy o $\mathbf{L_1}$.

$A \cap A^c \neq \emptyset$ Viene violata la legge di non contraddizione.

$A \cup A^c \neq X$ Viene violata la legge del terzo escluso.

Esempio di Fuzzy set

Costruiamo una montagnetta di granelli di sabbia S(.) è l'affermazione "è una montagnetta di sabbia" ed è funzione del numero di granelli.

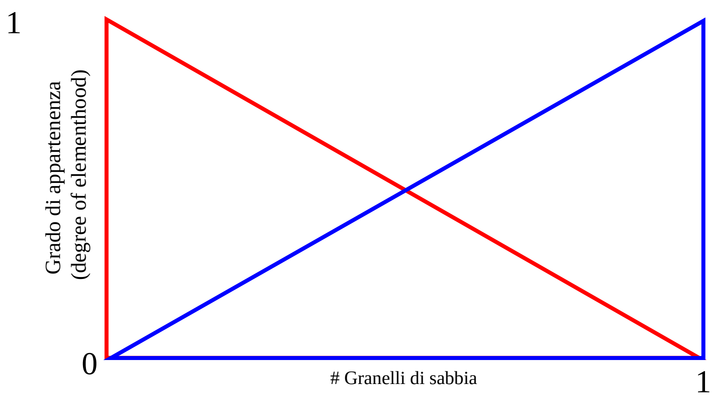
Non esiste un particolare numero di granelli, n*, per cui $S_{n*} = T$ diventi $S_{n*+1} = F$.

Supponendo di avere una montagnetta di n granelli di sabbia, possiamo scrivere: $T(S(_{n-m}) = 1 – d_{n-m}$. $T(S_n) = 1$ $T(0) = 0$. d esprime un margine di dubbio. (cf. l'esperimento di Moravec: the prosthetic brain).

Vale la relazione $0 \leq d_n \leq d_{n-1} \leq d_{n-2} \leq d_{n-3} \leq ….. \leq d_1 \leq d_0 \leq 1$.

Nulla e' detto ancora sulla forma della funzione che passa da 0 ad 1.

Esempio di funzione di appartenenza

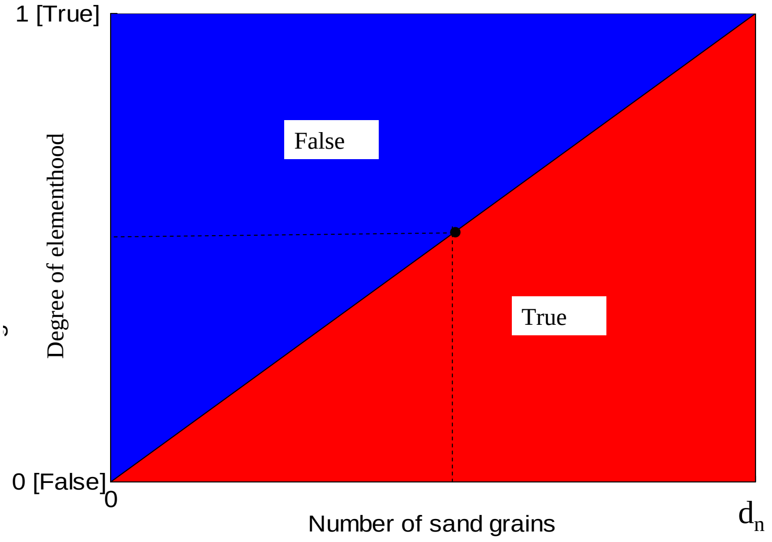


m(X) castello_false
m(X) castello_false

Sono 2 proposizioni antitetiche. In questo caso vale:

$m(X)_{castello\_false} = 1 – m(X)_{castello\_true}$

Esempio di funzione di appartenenza (membership function, $m_A(x)$)

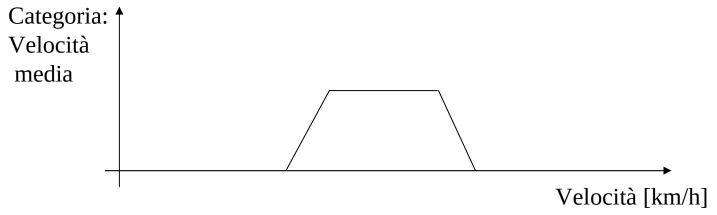


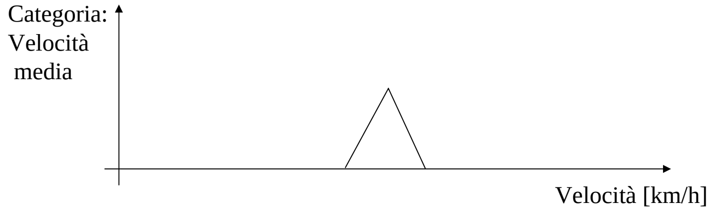
Insieme A: montagnetta di sabbia

$S(d_n) = T$
$S(0) = F$

$m_A(x) = \text{Degree}(x \in A)$ è membership value or fit value

Altre forme di funzioni di appartenenza (membership function, $m_A(x)$)





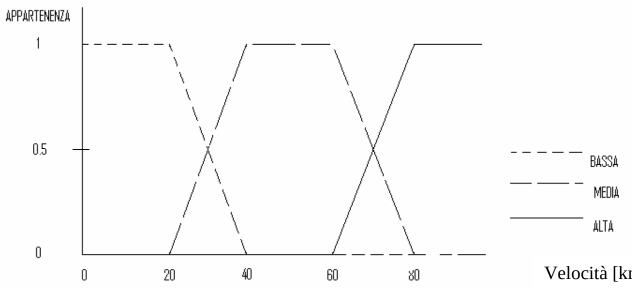
Una variabile per più insiemi fuzzy

Velocità (km/h)	Grado di appartenenza a :(membership)		
	BASSA	MEDIA	ALTA
10	1	0	0
20	1	0	0
30	0.5	0.5	0
40	0	1	0
50	0	1	0
60	0	1	0
70	0	0.5	0.5
80	0	0	1

Differenti idee su cosa sia velocità bassa, media o alta.

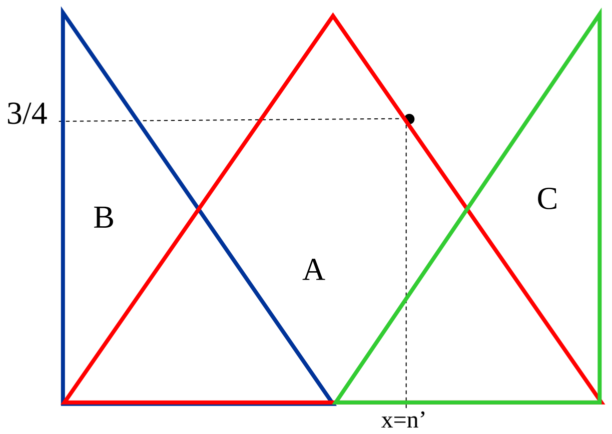
In generale le funzioni di membership hanno forma trapezoidale o triangolari.

Sovrapposizione tra le funzioni circa 25%



Velocità [km/h]

Una variabile, più classi



Tre insiemi fuzzy
(e.g. pioggia):

A) Pioggia leggera.
B) Qualche goccia.
C) Pioggia intensa.

Esempio:
$m_A(x=n') = 3/4$
$m_C(x=n') = 1/4$

Sta piovendo in modo leggero?

NB Non essendo pioggia leggera, qualche goccia e pioggia intensa, insiemi complementari, non vale che la somma delle membership deve essere 1.

Fuzzyness versus probability

La **fuzzyness** descrive l'ambiguità insita in un evento.
La **probabilità** descrive l'incertezza che l'evento avvenga.

Che un evento accada o meno è una questione di probabilità, in quale misura accada è un questione di fuzzyness.

Esempio: "C'è il 20% di probabilità che domani ci sia pioggia leggera".

Ma anche: "Errori piccoli", "Clienti soddisfatti", "paesi in via di sviluppo", "segnali affetti da rumore",….

Una soluzione potrebbe essere definire meglio i confini degli insiemi. E' possibile? Quale vantaggio se ne trarrebbe?

Fuzzyness versus Probabilità (esempi)

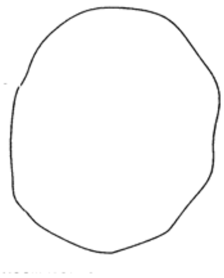
•Propongo un libro ad un editore (che può rispedirlo al mittente o chiederne la revisione, problema di royalities!).

•Apro il frigorifero in cui trovo una mezza mela (bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto).

•Parcheggio la mia automobile (non è previsto che venga parcheggiata a cavallo delle strisce: si rischia la contravvenzione).

Dopo che un evento è avvenuto, la sua probabilità svanisce.

Fuzzy versus probabilità (formalmente)



Ha più senso dire che questo è un ellisse fuzzy o che è proabilmente un ellisse?

Pur essendoci tutti gli elementi dell'evento, l'incertezza rimane. A cosa è dovuta?

Ha senso scrivere che: $m_A(x) = \mathrm{Prob}\{x \in A\}$ true?

La fuzzyness è un'incertezza deterministica.

Gli operatori logici fuzzy

T(A **AND** B) = ***min***(**T**(A), **T**(B))

T(A **OR** B) = ***max***(**T**(A), **T**(B))

T(**NOT**-A) = 1 – **T**(A)

Zadeh, 1969.

Segue che: **T**(A **AND** A^c) + **T**(A **OR** A^c) = 1 (dimostrare!).

Rapporto con gli operatori della logica classica?

Valgono se vale il principio di mutua esclusione e del terzo escluso.

Esempio sugli operatori logici fuzzy

Oggetto: temporale forte (A), temporale leggero (B).
Classi fuzzy: pioggia pesante, molti fulmini, tuoni, vento forte.

Logica fuzzy

$A = (1.\ \ .8\ \ 0.\ \ .5)$
$B = (.4\ \ .4\ \ .7\ \ .7)$

OR $\quad A \cup B = (1.\ \ .8\ \ .7\ \ .7)$
AND $\quad A \cap B = (.4\ \ .4\ \ 0.\ \ .5)$

$A^c = (0\ \ .2\ \ 1.\ \ .5)$
$A \cap A^c = (0\ \ .2\ \ 0.\ \ .5)$
$A \cup A^c = (1\ \ .8\ \ 1.\ \ .5)$

$A \cap A^c + A \cup A^c = 1$

$A \cap A^c \neq \varnothing$
$A \cup A^c \neq X$

Logica classica

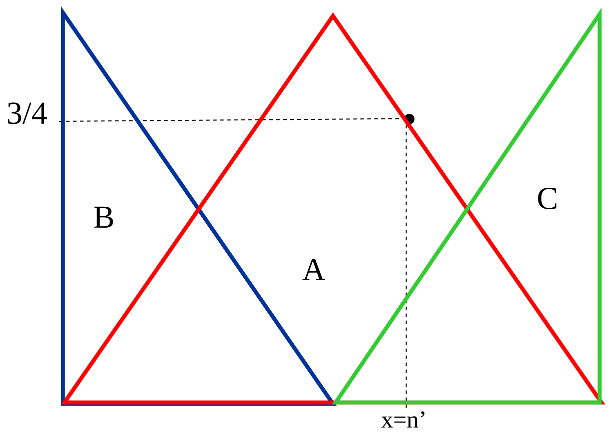
$A = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$
$B = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$

$A \cup B = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$
$A \cap B = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$

$A^c = (0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)$
$A \cap A^c = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$
$A \cup A^c = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$

$A \cap A^c + A \cup A^c = 1$

Una variabile, più classi



Sta piovendo in modo leggero?

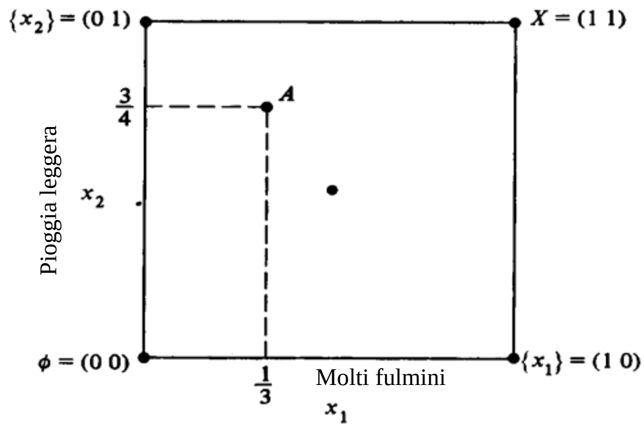
Tre insiemi fuzzy
(e.g. pioggia):

A) Pioggia leggera.
B) Qualche goccia.
C) Pioggia intensa.

Esempio:
$m_A(x=n') = 3/4$
$m_C(x=n') = 1/4$

NB Non essendo pioggia leggera, qualche goccia e pioggia intensa, insiemi complementari, non vale che la somma delle membership deve essere 1.

Rappresentazione geometrica di un evento fuzzy



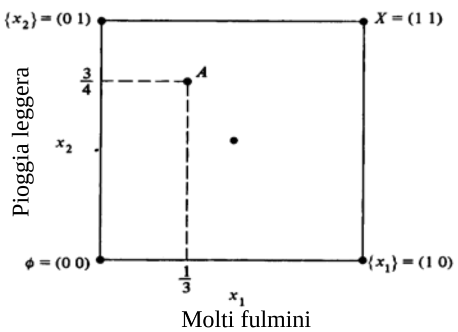
Su ogni asse il grado di appartenenza ad una classe.

Rappresentazione geometrica di 2 classi fuzzy.

Valore di **fit** di A = (1/3 3/4).

Un certo insieme fuzzy (di fulmini e gocce di pioggia) è un punto in un ipercubo di dimensioni $I_2 = [0,1]x[0,1] = [0,1]^2$, in generale, $I_n = [0,1]^n$.

Proprietà dello spazio fuzzy (I)

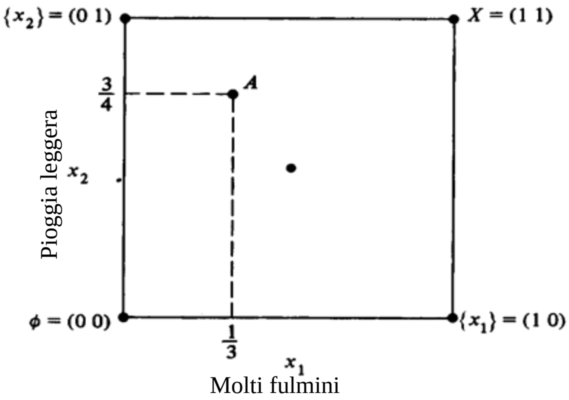


I vertici dell'ipercubo cosa rappresentano?

NF = {Ø, X, {x_1}, {x_2}}.

Questi 4 elementi rappresentano i 4 insiemi non fuzzy dello spazio fuzzy definito dalle 2 classi: pioggia leggera e molti fulmini.

Proprietà dello spazio fuzzy (II)



Dove troviamo la massima fuzzyness?

Al centro: A U A_c = A $\cap A_c$

Paradossi associati al centro

Il bugiardo di Creta che diceva che tutti a Creta erano bugiardi.

Il barbiere di Bertrand Russell. Fuori dal suo negozio era appeso un cartello che diceva: “il barbiere taglia la barba solamente a tutti quelli che non se la tagliano da soli”. Chi taglia la barba al barbiere?

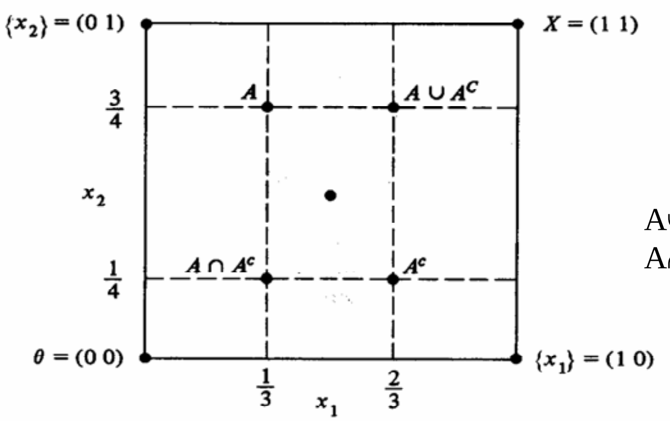
Prendiamo una carta che dice su un lato: “Quello che è riportato sull’altro lato è vero” e sull’altro: “Quello che è riportato sull’altro lato è falso”.

Bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto.

Al centro: A U A_c = A $\cap A_c$

Esempio A: barbiere, A_c : non_barbiere

Ipercubo fuzzy interno.

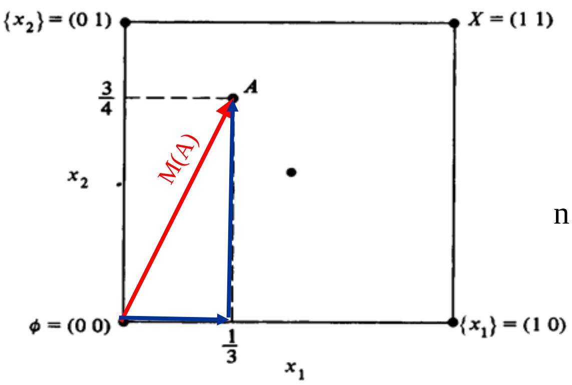


A = (1/3 3/4)
A^c = (2/3 1/4)

$A \cup A^c$ = (2/3 3/4) Max
$A \cap A^c$ = (1/3 1/4) min

•Dipende da A.
•Può degenerare se una proprietà è massimamente fuzzy. Se sono fuzzy sia x_1 che x_2: $A \cup A^c = A \cap A^c$ = (1/2 1/2).

Misure in un insieme fuzzy



$$M(A) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |m_A(x_i)|^p}$$

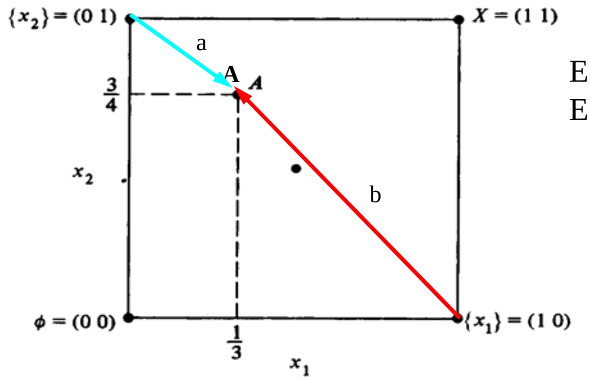
n: numero di insiemi fuzzy

Per p = 2 misuriamo la lunghezza del vettore A – O.
Per p = 1 cosa misureremmo in logica classica?

Distanza fuzzy di Hamming ***-> l_1*** $0 \le M(A) = 1/3+3/4 = 13/12 \le n$
Distanza euclidea. ***-> l_2*** $0 \le M(A) = \sqrt[2]{97/144} \le \sqrt[2]{n}$

Entropia fuzzy

How (much) fuzzy is a fuzzy set?



E(A) = 0 nei vertici
E(A) = 1 nel centro

$$E(A) = \frac{a}{b} = \frac{l^1(A, A_{vicino})}{l^1(A, A_{lon\tan o})} \qquad 0 \le E(A) = \frac{1/3 + 1/4}{2/3 + 3/4} = 7/17 \ 0 \le 1$$

Riassunto

•Fuzzyness descrive l’ambiguità di un evento.

•La funzione di appartenenza descrive il grado di appartenenza di un evento ad una o più classi (non mutuamente esclusive, le funzioni di membership sono parzialmente sovrapposte).

•La fuzzyness si distingue dalla probabilità che misura la probabilità che un evento, nella sua interezza si verifichi o meno.

•Si possono definire attraverso la T-norm, le operazioni logiche tra insiemi fuzzy: AND, OR e NOT.

•Un oggetto fuzzy si può rappresentare come un punto all’interno di un ipercubo di dimensionalità pari al numero di elementi che caratterizzano l’oggetto.

•E’ possibile associare ad un insieme fuzzy una misura di entropia che rappresenta il rapporto tra la misura della violazione della legge di non contraddizione e del terzo escluso.

Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

$\theta' \backslash \theta$	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Breve storia

Max Black (1937). Applico' i principi della logica fuzzy a liste di elementi o simboli. Sviluppo' la prima funzione di appartenenza fuzzy e chiamo' l'incertezza dell'appartenenza **vaghezza** (vagueness).

Lofti Zadeh (1965). "Fuzzy sets" sviluppo' una teoria sugli insiemi fuzzy ed una logica (fuzzy) in grado di lavorare su questi insiemi.

Ebrahim Mamdani (1974) dimostrò come utilizzare la logica fuzzy per risolvere problemi applicativi (inferenza fuzzy).

Dal 1985 ad oggi applicazioni tecnologiche con successo crescente in campi più diversi, dal controllo, alla ricerca nei data base, all'elaborazione delle immagini alla classificazione. Vediamo di capirne i fondamenti del successo.

Funzionamento di un sistema fuzzy

Expert system:
•E' basato su regole in parallelo (legate da AND e OR) che rappresentano la conoscenza.
•Funziona mediante un motore inferenziale che lavora sulle regole. Il motore è del tipo: IF ..... THEN ..... ELSE (*reasoning engine*).
•La risposta T / F (modalità del tipo winner-take-all). Eventualmente più di una risposta Crisp.

Systema fuzzy:
•Vengono utilizzate più regole in parallelo (legate da AND e OR) che rappresentano la conoscenza.
•L'uscita di ogni regola (attivata) è considerata con un certo grado di membership o verosimiglianza. L'uscita e' ottenuta pesando il grado di attivazione delle regole. Mappa un ipercubo n-dimensionale in un inpercubo p-dimensionale: $S : I^n \rightarrow I^p$

➔ **FAM** (*Fuzzy Associative Memories*).

Fuzzy Associative Memory (FAM)

Una FAM **trasforma** una spazio di input in uno spazio di output.
1) Spazi continui.
2) Spazi fuzzy.

Matematicamente una FAM opera la seguente trasformazione:
$I^n \rightarrow I^p$ dove n è il numero di classi della variabile fuzzy di ingresso e p è il numero di classi della variabile fuzzy di uscita.

Dato un insieme fuzzy A $\in I^n$, viene definito un insieme B $\in I^p$, che gli corrisponde (notazione alternativa (A,B))

E.g.	Traffico:	I^n = [Assente, leggero, medio, pesante].
	Durata semaforo verde:	I^p = [breve, media, lunga]

e.g. (Traffico_leggero, Durata_semaforo_media)

Descrizione di una FAM

Una FAM **trasforma** una spazio di input in uno spazio di output.

1) Spazi continui.
2) Spazi fuzzy.

Dato un insieme fuzzy A $\in I^n$, viene definito un insieme B $\in I^p$, che gli corrisponde (notazione alternativa (A,B)).

La trasformazione da A a B, può essere descritta mediante l'insieme della trasformazioni (***regole***) degli insiemi che costituiscono A e B $\{(A_i,B_j)\}$; $1 \le i \le n$; $1 \le j \le p$.

E.g. Traffico: I^n = [Assente, leggero, medio, pesante].
Durata semaforo verde: I^p = [breve, media, lunga]

E.g. (Traffico_leggero, Durata_semaforo_lunga) -- (A_2,B_3)

Come si definisce la trasformazione codificata in una FAM?

La FAM traduce delle definizioni linguistiche.

Le associazioni sono tra A e B. Ovverosia ad ogni insieme (fuzzy) di A (input), viene associato un insieme (fuzzy) di B (output). E.g. Se il traffico è leggero, regola la durata del verde a media.

Fino qui siamo nel dominio della logica classica. Qual'è il problema?

- L'associazione è tra 2 classi (A_i,B_j). Ma l'evento (densità di traffico) può appartenere a due classi diverse, che sono assocaite a due uscite diverse. Cosa facciamo?
- Le due classi rappresentano un intervallo di valori, come lo trattiamo?

Esempio di costruzione di una FAM

Controllore di un semaforo.

Ingresso: misura del traffico. 3 classi fuzzy: SCARSO, MEDIO, PESANTE.

Uscita: durata verde: 2 classi fuzzy: BREVE, LUNGO.

$I^3 \rightarrow I^2$

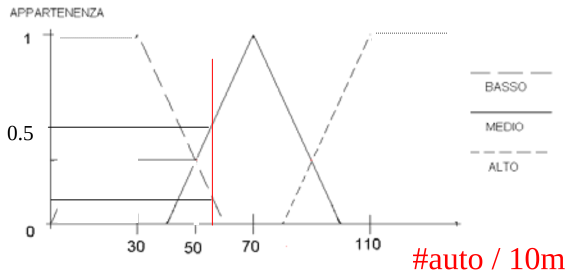
(regola 1) IF (SCARSO) THEN (BREVE)
(regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
(regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)

FAM

Fuzzyficazione: dalla misura alle classi fuzzy

Misuriamo la portata del traffico e vogliamo un controllore che generi una lunghezza in secondi.

Necessità di tradurre l'approccio linguistico in numeri.



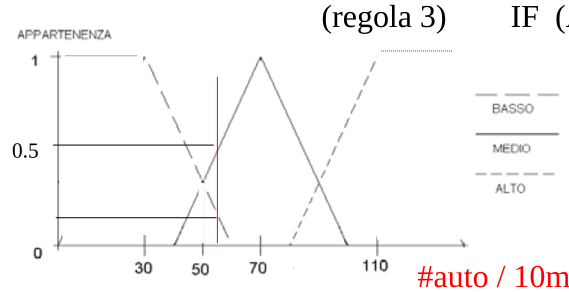
Fuzzyficazione viene risolta con le funzioni di membership: 55 auto/10min è un traffico *Scarso* con grado di fit 0.2 *Medio* con grado di fit 0.5.

#auto / 10m : densità di traffico

m(A) = (0.2, 0.5, 0)

Utilizzo della FAM

(regola 1) IF (BASSO) THEN (BREVE)
(regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
(regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)



m(A) = (0.2, 0.5, 0)

#auto / 10m : densità di traffico.

Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.

If (A_1) then B_1 Se è basso allora breve, grado 0.2
If (A_2) then B_2 Se è medio allora lungo, grado 0.5

→ Durata?

Possibili criteri di defuzzyficazione.

$$Uscita = Y = \frac{\sum F_i * c_i}{\sum F_i}$$

F_i peso della regola i attivata
Ci azione associata alla regola (A_i,B_i)

$$Y = \max_{1 \le j \le k} m_B(y_j)$$

Maximum fit among output fuzzy classes.

This does not take into account the shape of the membership function and the integral measure is preferred:

$$Y = \frac{\int y m_B(y) dy}{\int m_B(y) dy}$$

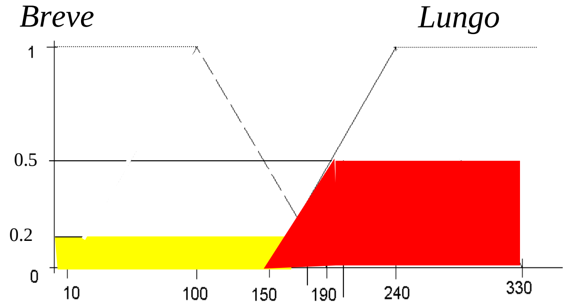
Gli integrali diventano una sommatoria per membership function semplici.

Dalla misura dell'output alle classi fuzzy

L'output viene mappata in classi fuzzy analogamente all'input.

Breve = 80s

Lungo = 260s



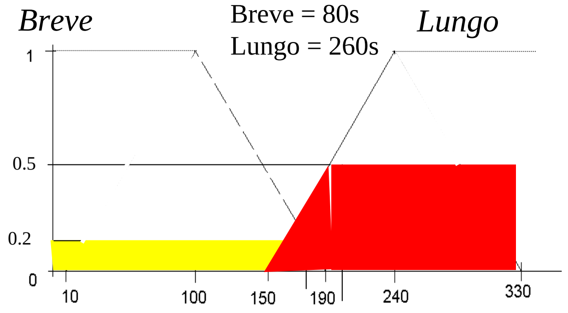
Defuzzyficazione mediante il metodo del centroide

Ogni regola viene troncata in base al suo grado di attivazione.
L'uscita troncata di ogni regola viene sommata.

$$Uscita = \frac{\sum F_i * c_i}{\sum F_i}$$

Il peso F_i può essere associato all'area.

Breve = 80s
Lungo = 260s



Per l'appartenenza alla classe BREVE: 172*0,2+18*0,2/2= 36,2
Per l'appartenenza alla classe LUNGA: (330-195)*0,5+45*0,5/2= 78,75

Il verde del semaforo rimarrà acceso per (36,2 * 80 + 78,75 * 260)/(36,2 + 78,75)s = 203,3s.

I passi per la prgettazione di un sistema fuzzy

1) Identificazione delle variabili del sistema (input e output).
2) Definizione del range delle variabili.
3) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy.
4) Definizione della corrispondenza tra classi di input e di output (FAM)

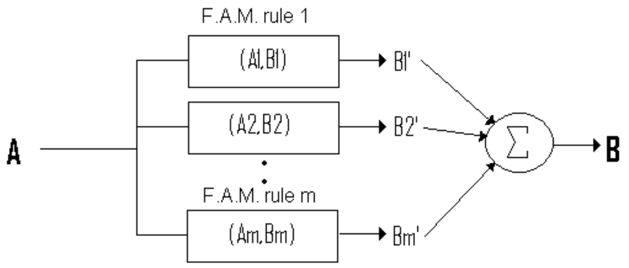
FAM basate sull'analisi di più variabili

Più regole attivate contemporaneamente.
1. IF ... AND ... AND ... AND .... THEN
2. IF ... AND ... OR ... AND .... THEN

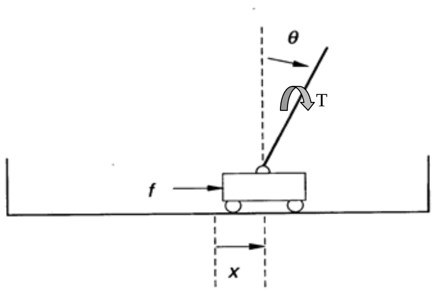
.....

Un dato di input avrà una certa fit rispetto alle classi fuzzy in cui viene suddivisa ciascuna variabile.

Le fit vengono combinate con AND (minimo) e OR (massimo.



Cart-pole



Input: A{θ(t), θ'(t), x(t), x'(t)}

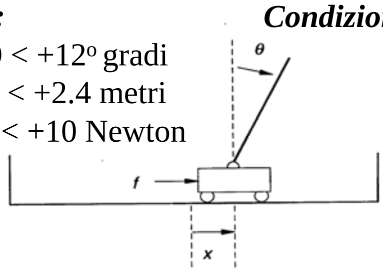
Output: B{F(t), T(t)}

Scopo del sistema di controllo è non fare cadere il bastone e mantenere il carrello sulla rotaia.

Parametri del sistema Cart-pole completo (Mathematica!)

Vincoli:
- $-12^o < \theta < +12^o$ gradi
- $-2.4 < x < +2.4$ metri
- $-10 < F < +10$ Newton

Condizioni iniziali: $\theta(0) = \theta'(0), x(0), x'(0) = 0$



Parametri:

g 9.8m/s
m 1.1kg (massa carrello + palo)
m_p 0.1kg (massa del palo)
l 0.5m distanza della cerniera dal centro di massa del palo.
Δt 0.02s (intervallo di campionamento e di controllo).

Equazioni del moto:

$\theta(t+1) = \theta(t) + \theta'(t)\,\Delta t$

$x(t+1) = x(t) + x'(t)\,\Delta t$

$$\vartheta'(t+1) = \vartheta(t) + \frac{mg\sin(\vartheta(t)) - \cos(\vartheta(t))\left(f(t) + m_p l(\vartheta'(t)\pi/180)^2 \sin(\vartheta(t))\right)}{(4/3)ml - m_p l\cos^2(\vartheta(t))}\Delta t$$

$$x'(t+1) = x(t) + \frac{f(t) + m_p l\left((\vartheta'(t)\pi/180)^2 \sin(\vartheta(t)) - \vartheta''(t)\pi/180\cos(\vartheta(t))\right)}{m}\Delta t$$

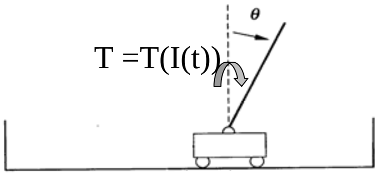
FAM per il cart-pole semplificato

Consideriamo solamente il pendolo inverso semplificato:

1a) ***Identificazione delle variabili del sistema:***
Input: A: {θ(t), θ'(t)}   Output: B: {T(t)}

1b) ***Definizione dei range delle 3 variabili:***

θ(t)	range	[-90 +90]gradi
θ'(t)}	range	(-∞ +∞)gradi/s
I(t)	range	[-10 +10]A



FAM per il cart-pole: classi fuzzy

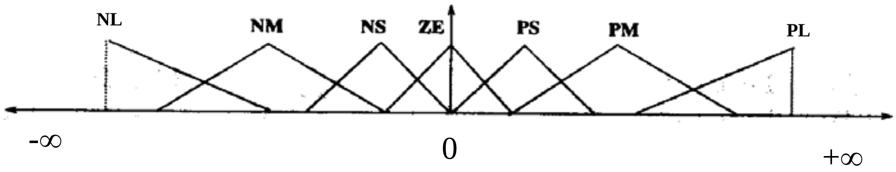
2) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy:
a) Definizione delle classi fuzzy.
b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza.

Esempio di classi fuzzy:

NL:	Molto negativo (“negative large”)
NM:	Mediamente negativo
NS:	Poco negativo (“negative small”)
ZE:	Zero
PS:	Poco positivo
PM:	Mediamente positivo
PB:	Molto positivo

FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza

2b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza per ciascuna variabile fuzzy (di input e di output).



Le regioni sono solitamente triangolari o trapezoidali.
Sovrapposizione, empiricamente 25%.

NB Le regioni sono più strette intorno allo 0, per avere una maggiore risoluzione e precisione.

FAM per il cart-pole: costruzione della relazione I/O

La trasformazione della FAM è costituita da 3 variabili: $(A_1^{\theta}, A_2^{\theta'}; B^F)$.

Una delle possibili ***regole*** della FAM può essere: (NM, ZE; PM).

if <l'orientamento del pendolo è negativa media> ***and***
<la velocità di rotazione è circa nulla>
allora
<il motore dovrà fornire una coppia positiva media>

Possiamo anche scrivere la trasformazione della FAM come:
$(\theta, \theta'; F = \text{funz}(\theta, \theta'))$. $I^2 \to I$.
La funzione di controllo è una superficie in R^3.

Le singole varibili non possono essere analizzate singolarmente, ma deve essere analizzata una loro combinazione.

FAM per il cart-pole: costruzione grafica della relazione I/O

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Vengono codificate solamente 15 regole.

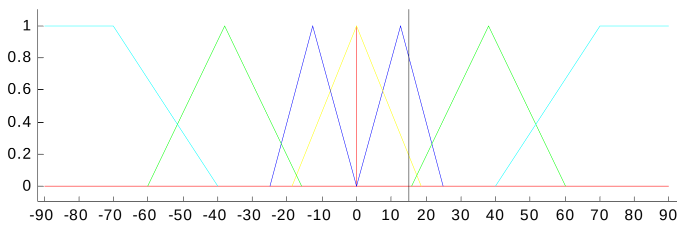
La tabella rappresenta una superficie in R^3.

Riduciamo la matematica ad un **discorso linguistico intuitivo**. Questo è particolarmente interessante quando si vuole trasferire della **conoscenza**, che di per sé viene espressa in **termini linguistici** (e non matematici)!

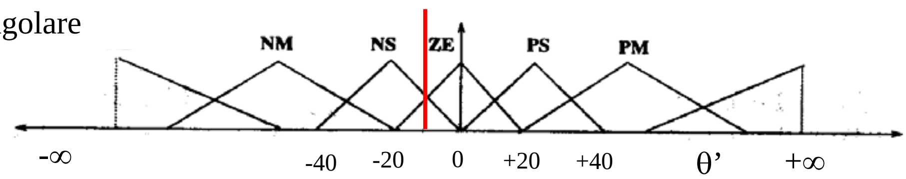
FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per posizione e velocità

Input: (θ = 15, θ' = -10)

Orientamento

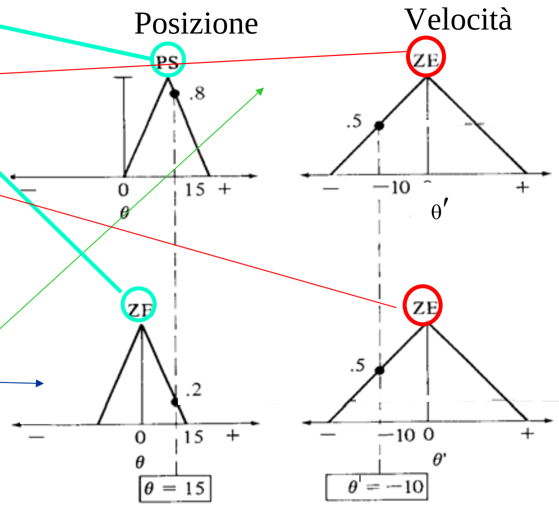


Velocità angolare



FAM per il cart-pole: le regole fuzzy attivate

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

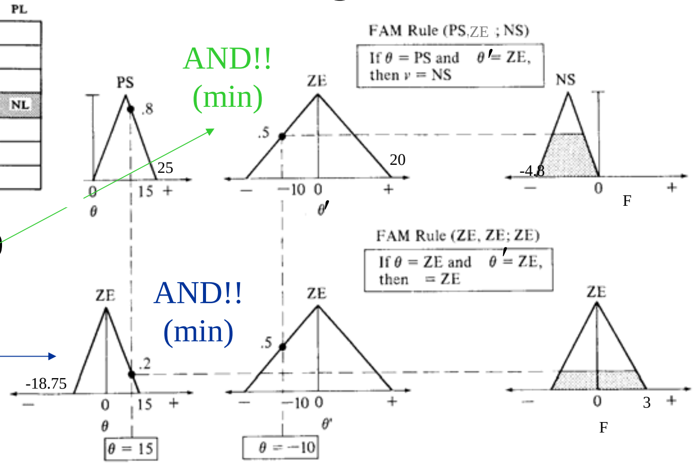


Input: (θ = 15, θ' = -10)

Regole attivate:
(PS,ZE; NS) (grado 0.5)
(ZE,ZE; ZE) (grado 0.2)
(PS,NS; NS) (grado 0.5)
(ZE,NS; PS) (grado 0.2)

FAM per il cart-pole: output prodotto dalle prime due regole

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			



Input: (θ = 15, θ' = -10)

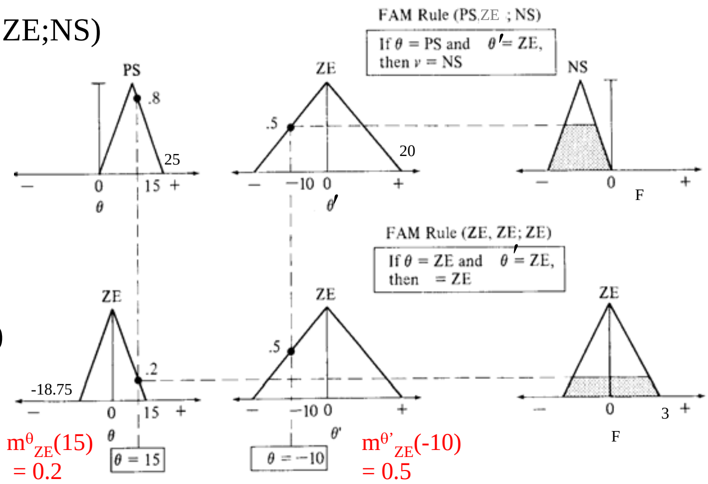
Insiemi attivati:
(PS,ZE) **(ZE,ZE)**
(PS,NS) (ZE,NS)

Regole FAM attivate:
(ZE,ZE;ZE) (PS,NS;NS)
(PS,ZE;NS) (ZE,NS;PS)

Pesatura delle regole (prime due)

(θ, θ')=(-15, 10) ➔ (PS,ZE;NS)
Grado di appartenenza
di F a NS: 0.5

(-15, 10) ➔ (ZE,ZE;ZE)
Grado di appartenenza
di F a ZE: 0.2

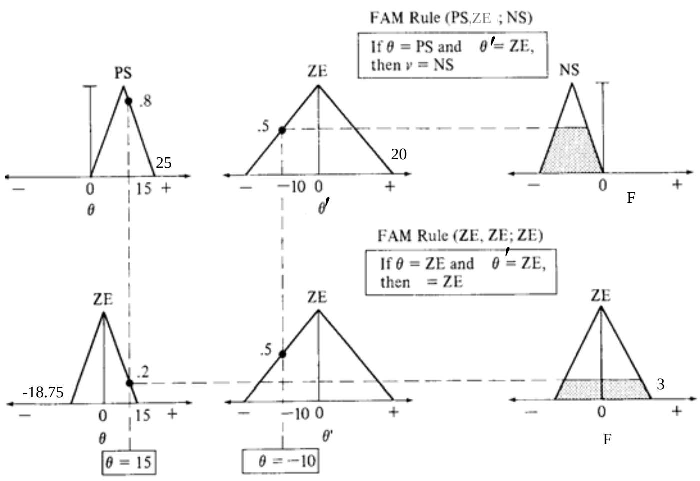


$m^{\theta}_{ZE}(15) = 0.2$

$m^{\theta'}_{ZE}(-10) = 0.5$

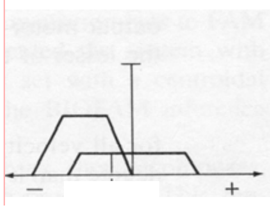
Ciascuna regola dà un contributo secondo la logica fuzzy (AND fuzzy = min).

Insiemi attivi di uscita (prime due regole)

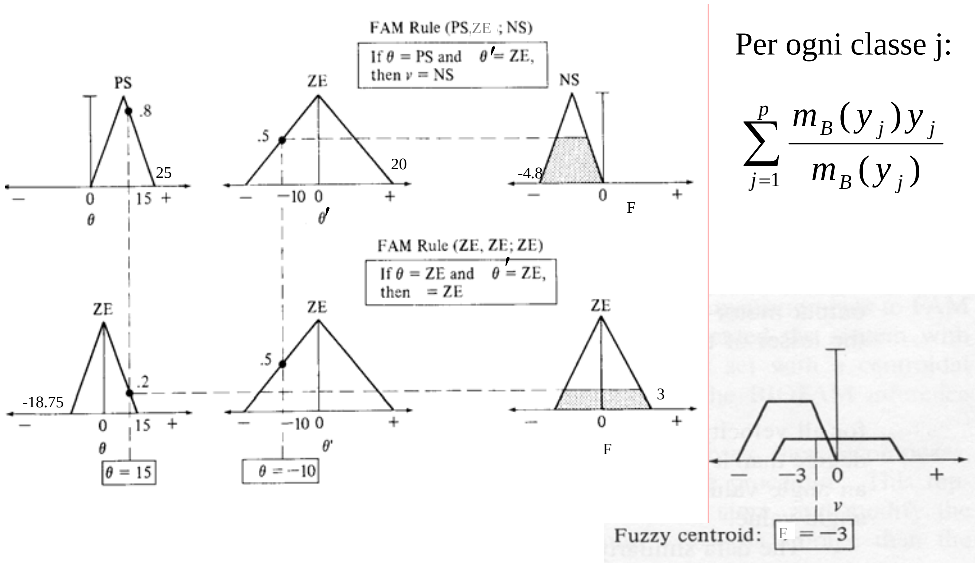


Devo combinare i due insiemi fuzzy di uscita.

Media pesata con l'area nell'insieme di uscita).



Defuzzyficazione (prime due regole)



Per ogni classe j:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{m_B(y_j)\,y_j}{m_B(y_j)}$$

Banco di FAM

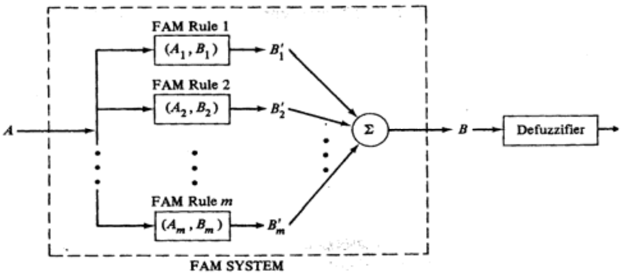
Generalizzazione naturale ai sistemi multi-output.
Ciascuna variabile di uscita è generata da una FAM diversa.

Esempio relativo al cart-pole.
Sia A l'input (stato del sistema, 4 variabili), e B l'output (la forza, ed il momento, 2 variabili), avremo 2 FAM del tipo: (A_i, B_i), dove ciascuna FAM ha 4 variabili di ingresso e 1 di uscita. Ciascuna FAM implementa le sue regole indipendenti.

Queste FAM parziali sono dette ***elementari o minime.***

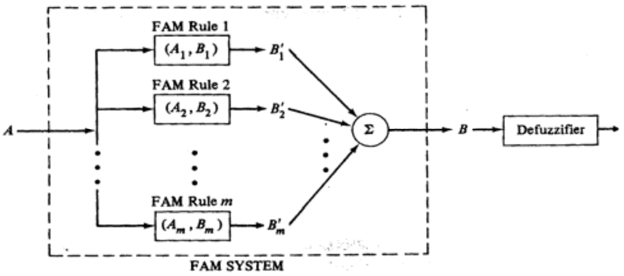
Il numero di FAM cresce velocemente con il numero di variabili in uscita (e così il numero di regole).

Riassunto: struttura



1) Identificazione delle variabili del sistema e del loro range (A e B).
2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere.
3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy di input è possibile definire una classe di output (FAM).

Riassunto: funzionamento



4) Identificazione delle regole attivate da un certo insieme fuzzy in ingresso.
5) Valutazione del grado di fit della regola.
6) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti.
7) Calcolo del centroide degli insiemi risultanti (defuzzyficazione).

Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

Riflessioni

- Da dove viene la conoscenza?
- Come si può tradurre la conoscenza in regole?
- Come si possono tarare le membership function?
- Implementazione di un controllore di temperatura che agisce su un fornello.
- Quale vantaggio c'è a defuzzyficare utilizzando la media pesata con l'integrale invece che la massima fit nel calcolo dell'uscita di un sistema fuzzy?