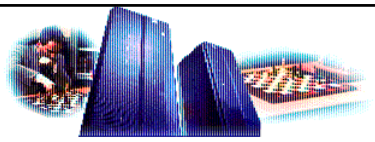
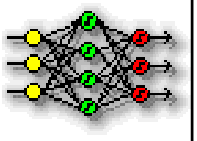




Sistemi Intelligenti
Reinforcement Learning: Policy iteration

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Sommario

Iterative policy evaluation.

Teorema del miglioramento della policy

Determinazione della policy ottima: policy iteration

Framework

Ambiente markoviano.
Policy stocastica.

Descrivo il reward a lungo termine tramite la Value function:

$$V^{\pi}(s)=\left[\sum_{a_j}\pi(a_j,s)\right]\sum_{k}P_{s\to s_k|a_j}\left[R_{s\to s_k|a_j}+\gamma V^{\pi}(s_k)\right] \qquad \begin{matrix} s_t = s \\ s_{t+1} = s_k \end{matrix}$$

Una rappresentazione alternativa è rappresentata dalla Q function:

$$Q^{\pi}(s,a)=\sum_{k}P_{s\to s_k|a}\left[R_{s\to s_k|a}+\gamma V^{\pi}(s_k)\right]$$

Policy Evaluation

Problemi con orizzonte temporale infinito.

$$V^{\pi}(s)=\left[\sum_{a_j}\pi(a_j,s)\right]\sum_{s'}P_{s\to s'|a_j}\left[R_{s\to s'|a_j}+\gamma V^{\pi}(s')\right]$$

Bellman's equation

Supponiamo di avere una policy prefissata: π(s, a)

Problema di policy evaluation.

Come mai posso determinare la Value function per la policy π(), se questa si basa sul reward che riceverò negli istanti futuri?

Sistema lineare in |S| incognite (|S| è la cardinalità dello stato).

Iterative policy evaluation

Evoluzione del sistema da s(t=0) a {s'(t = T)} utilizzando la policy $\pi(s,a)$, prefissata.

Quanto valgono gli stati?

Parto da $V(s(t=0))_{k=0}$ arbitraria, otterrò una value function per ogni stato che sarà funzione di V(s(t=0)).

Devo migliorare, come?

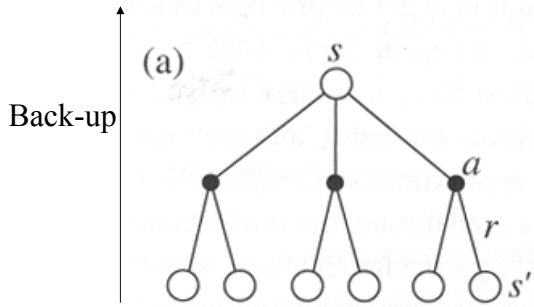
Utilizziamo l'informazione sul **passato**.

Fondamenti del metodo

• Supponiamo di essere all'istante t. In questo istante t, si può passare ad un certo insieme di stati: $\{s'_{t+1}\}$.

•Analizziamo un solo passo: cosa succede nella transizione da t a t+1.

Tecnica full-backup



Analizziamo la transizione da s(t) -> {s'(t+1)}
Calcoliamo un nuovo valore di s: $V_{k+1}(s(t))$

Calcolo della Value Function

Per ogni stato s, estratto a caso, analizziamo una singola transizione.

Equazione di Bellman per "iterative policy evaluation":

$$V_{k+1}(s) = \left[\sum_{a_j} \pi(a_j, s)\right] \sum_{s'} P_{s \to s'|a_j} \left[R_{s \to s'|a_j} + \gamma V_k(s')\right]$$

$$\lim_{k \to \infty} \{V_k(s)\} = V^{\pi}(s)$$

Algoritmo per "iterative policy evaluation"

Partiamo da una politica $\pi(s,a)$ data.
Inizializziamo $V(s) = 0\ \forall s$, compreso gli stati finali.
Repeat
{ $\Delta = 0$.
for s = 1 : N
{ $Value_k = V(s)$;

$$V_{k+1}(s) = \sum \pi(s,a_j) \sum P^{a_j}_{s->s'} \left[R^{a_j}_{s->s'} + \gamma V(s') \right]$$

$\Delta = \max(\Delta, | Value_k - V_{k+1}(s) |)$
}
Until (Δ < threshold);

Esempio

•L'agente evolve esplorando gli stati 1-14. TS sono gli stati terminali.

•L'agente può spostarsi: {dx, sx, alto, basso}

• $\pi(s,a)$ è equiprobabile.

• R = -1 per ogni transizione, tranne quando s' = TS (R = 0).

• $\gamma = 1$.

TS	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	TS

Sommario

Iterative policy evaluation.

Teorema del miglioramento della policy

Determinazione della policy ottima: policy iteration

Miglioramento della policy

Tutti gli stati sono valutati in funzione di una policy data.

Condizioni di funzionamento dell'agente:
Policy deterministica: $a = \pi(s)$.
Ambiente stocastico.

Cosa succede se cambiamo la policy per un certo stato s? $a' \neq \pi(s)$.
Cosa viene influenzato?

Effetto del cambiamento della policy

Cambia, a, cambiano i possibili stati successivi ad s:

$$Q^{\pi}(s,a_{new}) = E_{\pi}\left\{r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) \mid s_t = s, a_t = a_{new} \neq \pi(s)\right\} =$$

$$\sum_{s'} P_{s->s'}^{a_{new}}\left[R_{s->s'}^{a_{new}} + \gamma V^{\pi}(s')\right]$$

?

$$Q^{\pi}(s,a_{new}) >=< Q^{\pi}(s,a=\pi(s)) = V^{\pi}(s)$$

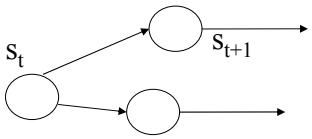
Enunciato del teorema del miglioramento della policy

$$Q^{\pi}(s,a) = \sum_{k} P_{s\to s_k|a}\left[R_{s\to s_k|a} + \gamma V^{\pi}(s_k)\right]$$

Ipotesi: $Q^{\pi}(s, \pi'(s)) \geq V^{\pi}(s)$

$$Q^{\pi}(s,a_{new} = \pi(s,a)) = \sum_{k} P_{s\to s_k|a_{new}}\left[R_{s\to s_k|a_{new}} + \gamma V^{\pi}(s_k)\right]$$

Tesi: π' è meglio di π. Cioè: $V^{\pi'}(s) >= V^{\pi}(s)$ $\forall$**s.**



Dimostrazione del teorema del miglioramento della policy

Analizziamo la seguente condizione:

$\pi' = \pi \ \forall s$ tranne che per s_m per il quale si applica l'azione:

$$a_{new} = \pi'(s_m)$$

Risulta che a è migliore di $a = \pi(s)$.

Tesi: π' è meglio di π. Cioè: $V^{\pi'}(s) >= V^{\pi}(s) \ \forall s$.

Dimostrazione del teorema del miglioramento della policy

$V^{\pi}(s) <= Q^{\pi}(s, \pi'(s))$

$$= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) \mid s_t = s\}$$

$$<= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma Q^{\pi}(s_{t+1}, \pi'(s_{t+1})) \mid s_t = s\}$$

$$<= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma E_{\pi'}(r_{t+2} + \gamma V^{\pi}(s_{t+2})) \mid s_t = s\}$$

$$= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 V^{\pi}(s_{t+2})) \mid s_t = s\}$$

Sostituisco ancora $Q^{\pi}*(.)$

$$<= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + ... \mid s_t = s\}$$

$$V^{\pi}(s) <= V^{\pi'}(s)$$

Sommario

Iterative policy evaluation

Teorema del miglioramento della policy

Determinazione della policy ottima: policy iteration

Politica ottima

Miglioramento della politica per tutti gli stati.

$$\pi'(s_k) = \arg\max_a Q^\pi(s,a)$$

$$= \arg\max_a Q^\pi(s,a)$$

$\forall s$

$$= \arg\max_a E\{r_{t+1} + \gamma V^\pi(s') \mid s_t = s, a_t = a\}$$

$$= \arg\max_a \sum_{s'} P^a_{s->s'} \left[R^a_{s->s'} + \gamma V^\pi(s')\right]$$

Si può estendere al caso di comportamento stocastico dell'agente nel qual caso: $\pi(s,a)$ è una probabilità.

Policy iteration

Iterazione tra:

- Calcolo della Value function
- Miglioramento della policy

Algoritmo (progetto per esame)

1. Initialization

   $V(s) \in \Re$ and $\pi(s) \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily for all $s \in \mathcal{S}$

2. Policy Evaluation

   Repeat

   $\Delta \leftarrow 0$

   For each $s \in \mathcal{S}$:

   $v \leftarrow V(s)$

   $V(s) \leftarrow \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^{\pi(s)} \left[\mathcal{R}_{ss'}^{\pi(s)} + \gamma V(s') \right]$

   $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$

   until $\Delta < \theta$ (a small positive number)

3. Policy Improvement

   policy-stable $\leftarrow$ true

   For each $s \in \mathcal{S}$:

   $b \leftarrow \pi(s)$

   $\pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^{a} \left[\mathcal{R}_{ss'}^{a} + \gamma V(s') \right]$

   If $b \neq \pi(s)$, then *policy-stable* $\leftarrow$ false

   If *policy-stable*, then stop; else go to 2

Esercizio: autonoleggio

2 locazioni di autonoleggio

In ogni locazione, se quando arriva un cliente l'auto è disponibile, si guadagnano 10 euro.

Se l'auto non è disponibile si perde la gestione della locazione.

Le auto diventano disponibili il giorno dopo che sono state restituite dopo il noleggio.

Si possono portare le auto da un autonoleggio all'altro di notte al costo di 2 Euro per ogni auto.

Supponiamo che il numero di auto richieste e restituite in ognuno dei 2 autonoleggi sia rappresentato da una distribuzione di Poisson (probabilità che vengano richieste n auto: $(\lambda^n / n!)e^{-\lambda}$, dove λ è il valore atteso (media) di auto richieste o restituite.

Supponiamo che non ci possano essere più di 20 auto in uno dei 2 atuonoleggi (ciascuna auto aggiuntiva viene inviata al centro di raccolta nazionale della compagnia).

Supponiamo anche che un massimo di 5 auto possa essere spostato in una singola notte.

Questo problema is può formulare con un MDP dove lo stato è rappresentato dal numero di auto presenti in ciascuno dei 2 autonoleggi al termine di una giornata e le azioni il numero di auto che vengono spostate durante la notte.

Consideriamo $\gamma = 0.9$. Il reward sarà il reward accumulato durante il giorno + notte.

Partiamo dalla policy $\pi(s,a) = 0$: nessuna auto viene mossa. Siamo in grado di migliorarla? Come?

Sommario

Iterative policy evaluation.

Teorema del miglioramento della policy

Determinazione della policy ottima: policy iteration