



# L'intelligenza visiva Dal 2D al 3D e viceversa

Alberto Borghese  
Università degli Studi di Milano  
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)  
Dipartimento di Scienze dell'Informazione  
Università degli studi di Milano  
[borgnese@dsi.unimi.it](mailto:borgnese@dsi.unimi.it)



## Sommario

### **Il modello proiettivo.**

#### La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



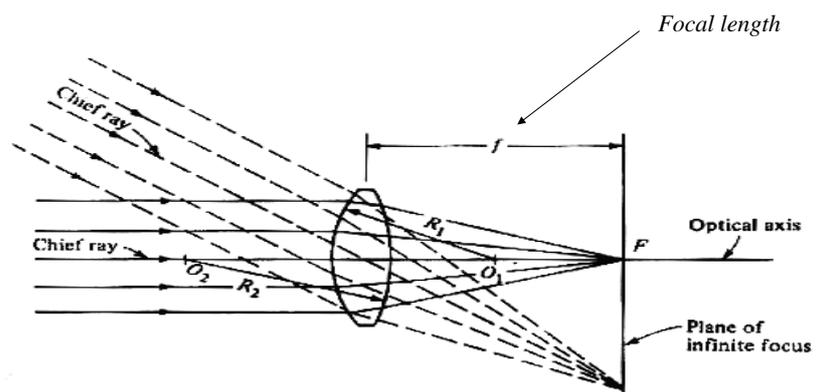
## Calibration

2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).



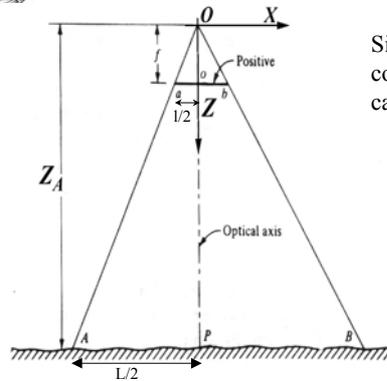
## Interior parameters (geometrical)



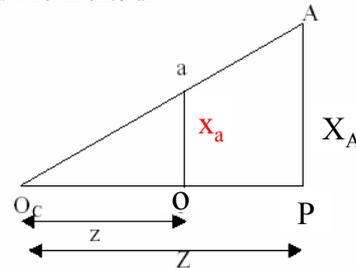
Focal distance  $f$  + principal point,  $F$



## Trasformazione prospettica semplice



Sistema di riferimento esterno orientato come il sistema di riferimento di camera



Per similitudine fra i triangoli aOb e AOB:  $f : Z_A = x_a : X_A$

da cui:

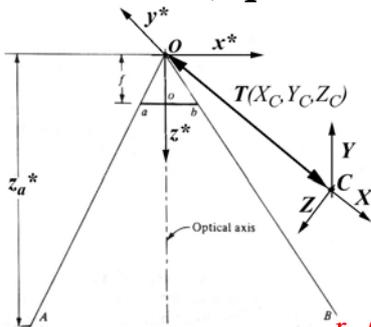
e analogamente:

$$a(x_a; y_a; z_a) \rightarrow \begin{aligned} x_a &= X_A f / Z_A \\ y_a &= Y_A f / Z_A \\ z_a &= f \end{aligned}$$

Si ipotizza  $P(0,0,0)$  e  $o(0,0)$ .



## La trasformazione prospettica completa (equazioni di collinearità)



$$P^3 \rightarrow P^3 \rightarrow p^2 \rightarrow p_m^2$$

$$P' = R(P - T)$$

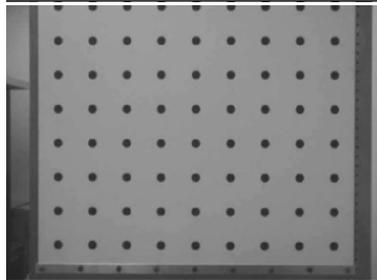
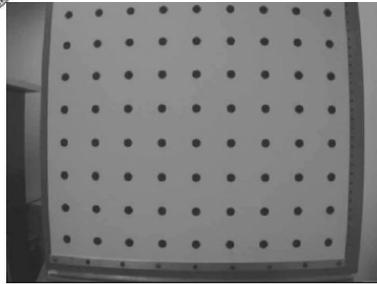
$$a(x_a; y_a; z_a) \rightarrow \begin{aligned} x_a &= X_A f / Z_A \\ y_a &= Y_A f / Z_A \\ z_a &= f \end{aligned}$$

$$x_m - x_o = x_A f / z_A = f \frac{r_{11}(X_A - X_O) + r_{12}(Y_A - Y_O) + r_{13}(Z_A - Z_O)}{r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)}$$

$$y_m - y_o = y_A f / z_A = f \frac{r_{21}(X_A - X_O) + r_{22}(Y_A - Y_O) + r_{23}(Z_A - Z_O)}{r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)}$$



## Interior parameters (distortions)



Excellent for special effects, not so good for measurements....

Cameras are not metric.

A.A. 2004-2005

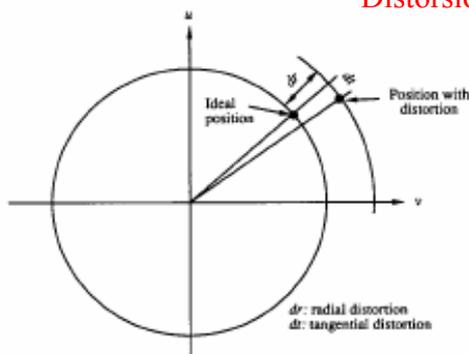
8/72



## Modello generale delle distorsioni



$$\text{Distorsione} = \Delta r + \Delta t = (\Delta r^2 + \Delta r'^2) + \Delta t$$



Radial

Decentering +  
Thin prism

trascuro infinitesimi di ordine  
 $O(p^4)$  sulle distorsioni.

$$x_m(p) = x(p) + dx(p) = (g_1 + g_3)x^2 + g_1y^2 + g_4xy + k_1x(x^2 + y^2) + \lambda x$$

$$y_m(p) = y(p) + dy(p) = (g_2 + g_4)y^2 + g_2x^2 + g_3xy + k_1y(x^2 + y^2)$$

A.A. 2004-2005

8/72





## Tassonomia dei parametri



$P^3 \rightarrow P^2$

Interior parameters

Focal length,  $f$

Principal point  $(x_0, y_0)$

$P^3 \rightarrow P^3$

Exterior parameters

Orientation  $(\omega, \phi, \kappa)$

Position  $(X_0, Y_0, Z_0)$

$P^2 \rightarrow P^2_m$

Distortion parameters:  $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$   
 $(f(x, y, x_0, y_0); g(x, y, x_0, y_0))$

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

A.A. 2004-2005

11/72



## Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

### 3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D:  $\{X, Y, Z\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine  $\{x, y\}$
- C) I parametri  $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, \kappa), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

### 3 problemi:

- A) + B)  $\rightarrow$  Determinazione dei parametri del modello proiettivo.
- B) + C)  $\rightarrow$  Ricostruzione (ray intersection).
- A) + C)  $\rightarrow$  Proiezione

A.A. 2004-2005

12/72



## Sommario

Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

### La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



## In che cosa consiste la calibrazione

Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- Parametri esterni:  $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k)$ .
- Parametri interni:  $x_0, y_0, f$ .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi):  $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1,$   
.....

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

Quale problema intravedete?



## Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.



## Calibrations



- 2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).
- 3D calibration (estimate of the exterior parameters).



## Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).



A.A. 2004-2005



## Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.  
Ho  $9 + D$  parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di  $(9 + D) / 2$  punti di controllo.

A.A. 2004-2005

18/72



## Sommario

Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

**Il bundle-adjustment.**

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Inizializzazione.

Calibrazione sul campo.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



## La calibrazione come problema di stima

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$$

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$$

**Dati:**

I punti nello spazio 3D:  $\{X, Y, Z\}$

I punti misurati sul piano immagine  $\{x, y\}$

**Dobbiamo determinare:**

I parametri  $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

Cosa serve?



## Impostazione della Calibrazione



$$\begin{aligned} x &= F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) \\ y &= G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) \end{aligned}$$

- Per ogni punto immagine (x,y) ho 2 equazioni di collinearita'
- Combinando le equazioni per M punti di controllo ho un sistema di 2M equazioni non-lineari.

### INPUT:

- coordinate 2D di punti misurati sulle immagini
- coordinate 3D dei punti di controllo.

### OUTPUT (incognite):

- parametri d'orientamento interno e esterno
- parametri aggiuntivi (AP)



## Visione statistica della determinazione dei parametri



$$\begin{aligned} x &- F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x \\ y &- G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y \end{aligned}$$

Osservazioni

Modello

$$e_x = e_x^s + e_x^r$$

$$e_y = e_y^s + e_y^r$$

Errore randomico  
(di misura)

Errore  
totale

Errore sistematico  
(di modellazione)

Minimizzo  $e_x^2 + e_y^2$   
Minimo per  $e_x^s = e_y^s = 0$ .



## Minimizzazione dell'errore



$$x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$$

$$y - G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$$

Minimizzo  $e_x^2 + e_y^2$

Minimizzo la differenza tra le osservazioni misurate ed i valori predetti dal modello per uno stesso punto (X,Y,Z).

Minimizzo

$$(x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 + (y - G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2$$

rispetto a che cosa?



## Visione gemetrica della determinazione dei parametri (**bundle adjustment**)



Minimizzo

$$(x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 + (y - G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2$$

Misure

Proiezione prospettica

Regolazione dei parametri che determinano il fascio di rette retro-proiettate sul piano immagine attraverso il centro di proiezione.

**Bundle-adjustment. Minimizzazione dell'errore di retro-proiezione.**



## Sommario

Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

**Soluzione del bundle-adjustment.**

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

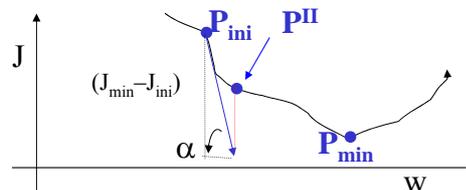
Ricostruzione 3D (ray-intersection).



## Minimizzazione tramite gradiente

**Minimizzo**  $J(\cdot)$  rispetto ai parametri.

Tecnica del gradiente applicata alla minimizzazione di funzioni non-lineari di **una variabile**:  $J = J(w|\dots)$ .



**La derivata, mi dà due informazioni:**

- 1) In quale direzione di  $w$ , la funzione decresce.
- 2) Quanto rapidamente decresce.

Definisco uno spostamento arbitrario lungo la pendenza: maggiore la pendenza maggiore lo spostamento. Mi muovo lungo la direzione della pendenza, arrivo in  $P^{II}$ . Calcolo  $J(w^{II})$ .

Da qui riparto fino a quando non arrivo in  $P_{min}$ .



## Minimizzazione di funzioni di più variabili



$\min(J\{\mathbf{w}\} | \dots)$  funzione costo od errore

Gradiente:

$$\frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_1} \frac{w_1}{|w_1|} + \frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_2} \frac{w_2}{|w_2|} +$$

$$\frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_3} \frac{w_3}{|w_3|} + \frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_4} \frac{w_4}{|w_4|} + \dots$$

Modifico il valore dei pesi di una quantità proporzionale alla pendenza della funzione costo rispetto a quel parametro.

Estensione della tecnica del gradiente a più variabili.

Serve un' **approssimazione iniziale** per i pesi  $W_{ini} = \{w_j\}_{ini}$ .



## Minimizzazione tramite gradiente nel bundle adjustment



$$(x - F(X, Y, Z | X_c, Y_c, Z_c, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))$$

È la mia funzione da ottimizzare. Ne faccio lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine:

$$x - = F(\cdot | W) + \sum_{j=1}^w \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial w_j} \Big|_t * dw_j + \dots$$

= 0

Da qui ricavo un sistema lineare da cui ricavo i  $dw_j$



## Esempio di applicazione tecnica del gradiente per funzioni di 1 variabile



Supponiamo che il modello da noi considerato sia semplice:  $y = ax^2$

Consideriamo di avere stimato  $a = 2$  e di avere misurato  $y = 3$  per  $x = 1$ . Possiamo modificare il parametro  $a$  in modo tale che il modello fitta i dati ( $x=1$  e  $y=3$ ).

Linearizziamo il modello e scriviamo:  $(y - ax^2) - \left[ \frac{d}{da}(ax^2) \right] da$

Sostituendo i valori otteniamo:  $da = (3 - 2 \cdot 1) / (2 \cdot 2 \cdot 1) = 1/4$

$$a = 2 + 1/4 = 2.25.$$

$$da = (3 - 2.25 \cdot 1) / 4.5 = 1/6$$

$$a = 2.25 + 0.166 = 2.415.$$

$$da = -(3 - 2.42 \cdot 1) / 4.84 = 0.11$$

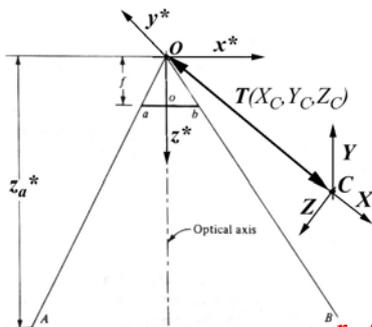
$$a = 2.415 + 0.11 = 2.52.$$

$$da = -(3 - 2.52 \cdot 1) / 5.04 = 0.1 \dots$$

Avendo più di una misurazione dobbiamo “mediare” tra gli incrementi  $dx$  calcolati per ogni misurazione.



## Equazioni di collinearità



$$x_m = F(P(X, Y, Z) | \{w\})$$

$$y_m = G(P(X, Y, Z) | \{w\})$$

$$x_m - x_o = x_A f / z_A = f \frac{r_{11}(X_A - X_O) + r_{12}(Y_A - Y_O) + r_{13}(Z_A - Z_O)}{r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)}$$

$$y_m - y_o = y_A f / z_A = f \frac{r_{21}(X_A - X_O) + r_{22}(Y_A - Y_O) + r_{23}(Z_A - Z_O)}{r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)}$$



## Minimizzazione dei residui (problema di minimo non lineare)



$$\min(x - F(P(X,Y,Z)|\{w\}))^2 + (y - G(P(X,Y,Z)|\{w\}))^2 = \min(F^* + G^*)$$

$F^*$ ,  $G^*$  sono i residui delle equazioni di collinearità

Il minimo della funzione  $F^*|G^*$  sarà  $\neq 0$  (errore di modellazione + errore di misura).

Linearizzazione (sviluppo di Taylor del primo ordine)

$$F^*(t+1) = F^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial F^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

$$G^*(t+1) = G^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial G^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

A.A. 2004-2005

31/72



## Risoluzione della Calibrazione



Equazioni non-  
lineari.  $x = F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$   
 $y = G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$

Definisco  $W = [X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}]$

**STRATEGIA DI SOLUZIONE: stima ai minimi quadrati iterativa.**

Parti da un valore iniziale dei parametri.

*Ripeti:*

A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione con il set di parametri corrente.

B) Linearizza le equazioni di collinearità per il punto  $P_k$  ed i parametri  $\{W^t\}$ .

C) Determina un valore incrementale delle incognite che migliora la soluzione, cioè diminuisce l'errore di retro-proiezione ( $W^{t+1} = W^t + dW^t$ )

*Fino a quando l'incremento dei parametri non diventa trascurabile.  $dW^t \cong 0$*



## A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione (residuo)



Per ogni punto,  $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$ ,

Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}))$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}))$$

**Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità  $[v_{xk}, v_{yk}]$ :**

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}) - y_k$$

NB Il residuo contiene sia l'errore di modellazione che l'errore di misura. Se i parametri sono quelli "reali", il residuo sarà uguale solo all'errore di misura.



## B) Linearizzazione della funzione da minimizzare (errore di retro-proiezione, o residui)



Per ogni punto,  $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$ ,

Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$F^* = (x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}))^2 +$$

$$G^* = (y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}))^2$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) +$$

$$\left. \frac{\partial F^*()}{\partial X_o} \right|_{W^t|P_k} dX_o + \left. \frac{\partial F^*()}{\partial Y_o} \right|_{W^t|P_k} dY_o + \left. \frac{\partial F^*()}{\partial Z_o} \right|_{W^t|P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial F^*()}{\partial \omega} \right|_{W^t|P_k} d\omega + \dots$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\})) +$$

$$\left. \frac{\partial G^*()}{\partial X_o} \right|_{W^t|P_k} dX_o + \left. \frac{\partial G^*()}{\partial Y_o} \right|_{W^t|P_k} dY_o + \left. \frac{\partial G^*()}{\partial Z_o} \right|_{W^t|P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial G^*()}{\partial \omega} \right|_{W^t|P_k} d\omega + \dots$$



## B) Sviluppo in serie di Taylor (forma matriciale)



$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dx_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dy_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dz_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} d\omega + \dots)$$

$$(y_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dx_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dy_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dz_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} d\omega + \dots)$$

**A x = b** M punti e N parametri di calibrazione.

**A** (2\*m x n) - Matrice di disegno (contiene le derivate **parziali**).

**x** (n) – Vettore delle incognite (gli incrementi dei parametri di calibrazione).

**b** (2\*m) – Residuo o errore di retro-proiezione.



## Determina l'incremento dei parametri



$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dx_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dy_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dz_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} d\omega + \dots)$$

$$(y_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dx_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dy_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} dz_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^t|P_1|P_2} d\omega + \dots)$$

**A x = b** Stima ai minimi quadrati.

$$A' * A x = A' * b \quad \rightarrow \quad x = (A' * A)^{-1} A' * b$$



## Sommario

Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

**Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).**

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).

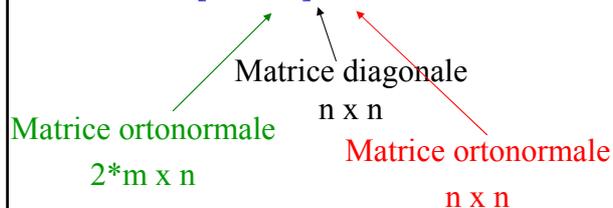


## Condizionamento della matrice $C = A^*A$

$c_{ij}$  – contiene la somma dei prodotti delle derivate della funzione proiettiva rispetto al parametro  $i$  e  $j$  calcolate per tutti i punti.

Per evitare di ottenere elementi troppo grandi che rendono la norma della matrice  $C$  vicina alla precisione della macchina, si preferisce utilizzare la Singular Value Decomposition per risolvere il sistema lineare.

$$A x = b \rightarrow [U \ W \ V]x = b \rightarrow U^*U \ W \ Vx = U^*b \rightarrow Vx = W^{-1}U^*b$$



- La matrice  $C$  non viene formata.
- $W^{-1}$  contiene i reciproci degli elementi di  $W$ .



## Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti



$$x = (A' * A)^{-1} A' * b$$

$$x = V' W^{-1} U' b$$

Se A è rank-deficient, A' \* A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W.

In questo caso il problema è sovrapparametrizzato.



## Valutazione della bontà della stima



$$x = (A' * A)^{-1} A' * b$$

**Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità  $[v_{xk}, v_{yk}]$ :**

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}) - x_k$$

Errore di misura Gaussiano a media nulla  $e(0, \sigma^2)$

$$\langle v_{xk} \rangle = \langle v_{yk} \rangle = 0$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

Errore di retro-proiezione = rumore di misura.



## Valutazione della bontà della stima del singolo parametro e della loro correlazione



$$x = (A' A)^{-1} A' b \quad \hat{\sigma}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

$$x = C^{-1} A' b \quad C^{-1} \text{ è chiamata anche matrice di covarianza.}$$

Chiamiamo  $u$  e  $v$  le variabili casuali associate all'errore sui parametri e all'errore di retro-proiezione, rispettivamente. Si suppone errore a media nulla e Gaussianamente distribuito.

$$x + u = C^{-1} A' (b + v)$$



$$u = C^{-1} A' v$$



## Impostazione del calcolo della correlazione tra i parametri



$$u = C^{-1} A' v$$

Vogliamo individuare la correlazione tra due parametri  $r$  ed  $s$ . Devo quindi determinare il valore atteso di  $u_r * u_s$ .

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_W \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_W u_1 & u_W u_2 & \dots & u_W^2 \end{bmatrix}$$

$$u = C^{-1} A' v \quad \Rightarrow \quad u' = v' A (C^{-1})'$$

$u u' = C^{-1} A' v v' A (C^{-1})'$   $\Rightarrow$  Applicando l'operatore di media, si ottiene:

$$\langle u u' \rangle = C^{-1} A' \langle v v' \rangle A (C^{-1})'$$

Dato che  $v$  sono i residui, e sono indipendenti, e tutte i punti di controllo hanno lo stesso tipo di errore di misura, si avrà che  $\langle v v' \rangle = I \sigma_0^2$ .



## Calcolo della correlazione tra i parametri



$$\langle uu' \rangle = C^{-1} A' I A (C^{-1})' \sigma_0^2 = C^{-1} \sigma_0^2$$

Da cui si giustifica il nome di matrice di covarianza per  $C^{-1}$ .

Segue che:  $\sigma^2(u_{ij}) = c_{ij}^{-1} \sigma_0^2$       Varianza sulla stima del parametro.

Esempi di correlazione elevata:

$f \leftrightarrow Z, Z_0$        $x_0, y_0 \leftrightarrow X, Y, X_0, Y_0$

$$-1 \leq r_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\sqrt{\langle u_i \rangle^2 \langle u_j \rangle^2}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_i c_j}} \leq +1$$

Indice di correlazione tra il parametro  $i$  ed il parametro  $j$

(empiricamente si scartano parametri quando la correlazione è superiore al 95%)

Vanno rapportati alle dimensioni dei parametri coinvolti.



## Proprietà del bundle-adjustment



Con punti di controllo di coordinate note può essere utilizzato per calibrare una fotocamera.

Nella calibrazione di più fotocamere che guardano lo stesso pattern di calibrazione, si possono inserire anche punti di coordinate non note (deve valere la relazione:

$$2*(M+K)*N \geq 3*K + N * (9 + AP)$$

$N$  – numero di video-camere.

$M$  – numero di punti di controllo di coordinate note.

$K$  – numero di punti di controllo di coordinate non-note.

$AP$  – parametri addizionali.

Esempio: 3 video camere, 4 parametri addizionali.  $\rightarrow 2M + K \geq 13$ .

Diverse combinazioni di punti di controllo (posizione nota e non nota).



## Sommario

Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

**Tecniche di calibrazione.**

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



## Attenzioni nella calibrazione

- At least over two planes (to minimize the impact of the correlation between  $Z_0$  and  $c$ ).
- Good coverage of the working volume (extrapolation fails): good distribution of the control points over each image, and of the images inside the working volume.
- Extract good features from the images (weighting of the observations may apply).
- Analysis of the geometrical model parameterization (weak-perspective or paraperspective instead of perspective projection).
- Analysis of the adequacy of the distortion model parameterization (number of distortion parameters).

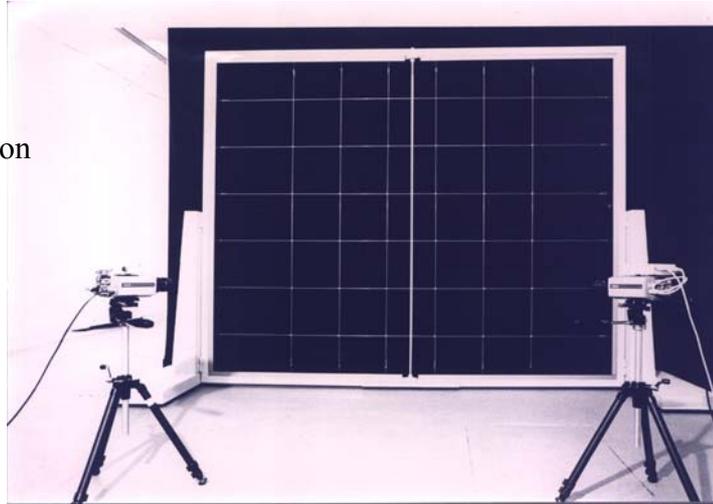


## Calibration with points of known 3D position



*3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.*

Grid  
Calibration

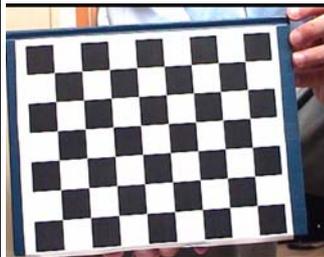


A.A. 2004-2005

47/72

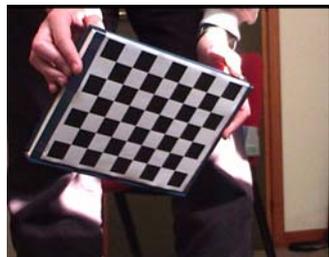


## Calibration through a chessboard



Estimated  
parameters:

Distortions  
Internal  
External



<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>

A.A. 2004-2005

48/72



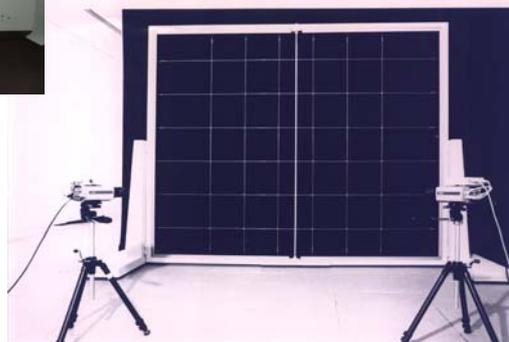
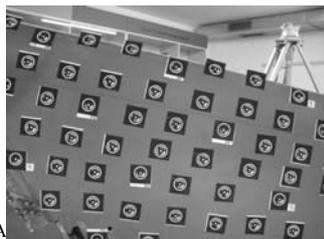
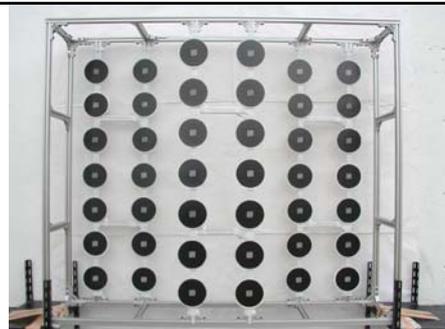
# Calibrazione a barra



Da SMART



## Test field (Known control points)



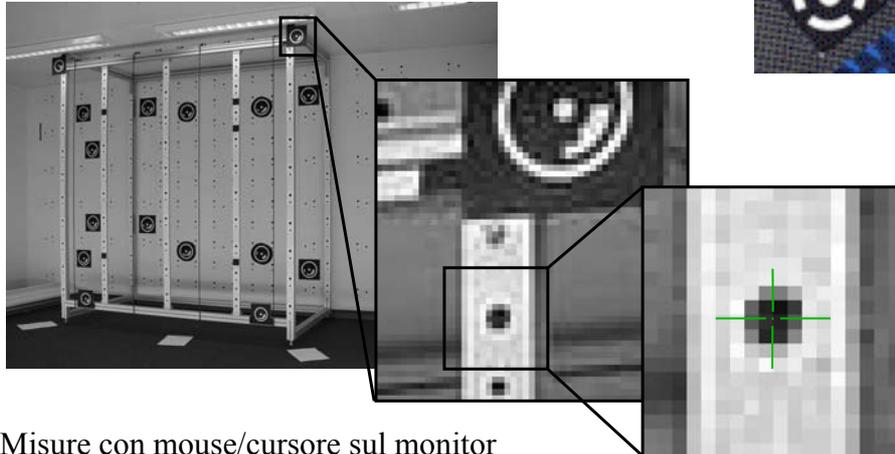
A



## Misurazione manuale dei punti di controllo



Coded target



Misure con mouse/cursore sul monitor  
Precisione: 1/4 - 1/8 Pixel

A.A. 2004-2005

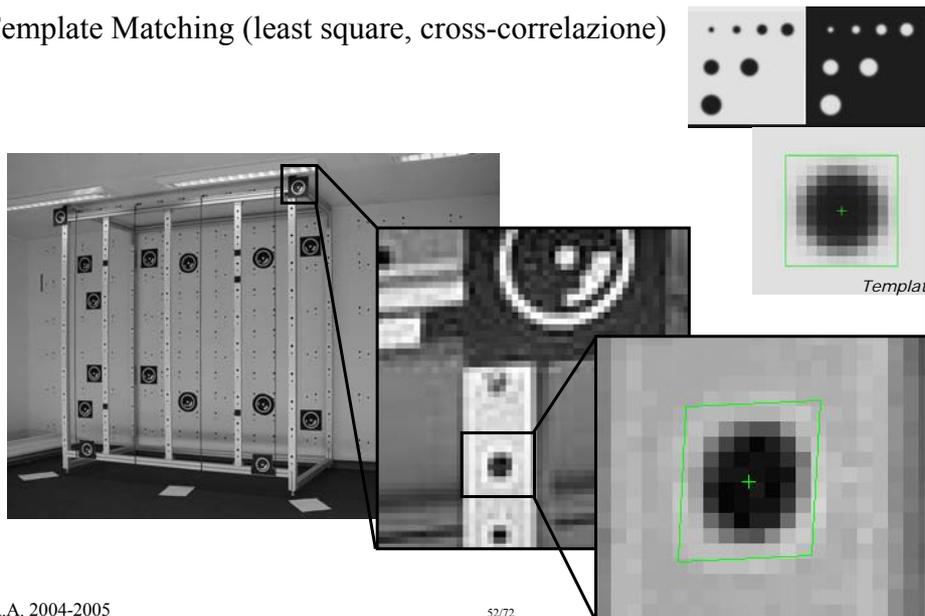
51/72



## Misurazione automatica dei control points



Template Matching (least square, cross-correlation)



A.A. 2004-2005

52/72



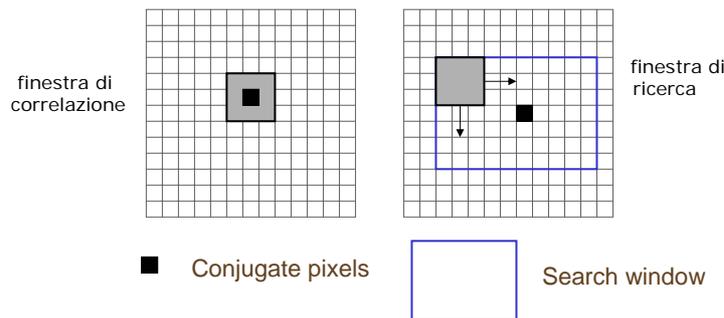
## Cross-correlazione



Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

$$\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{nm-1}} \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{nm-1}} \quad \sigma_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$



## Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

**Calibrazione sul campo.**

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



## Set-up

Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras).

### *Set-up requires:*

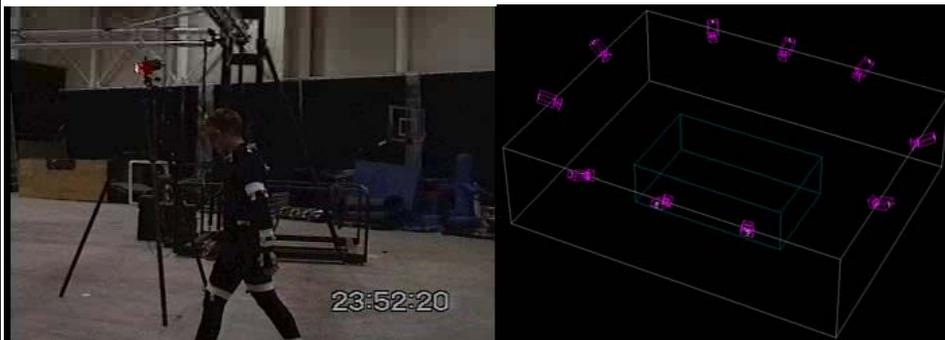
- Cameras position
- Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time  
and/or  
Multiple cameras are used.**



## Motion Capture for animation



- Passive markers + flash coaxial with the cameras.
- Large working volume (10m x 8m x 4m).
- Redundant set of cameras (>10).

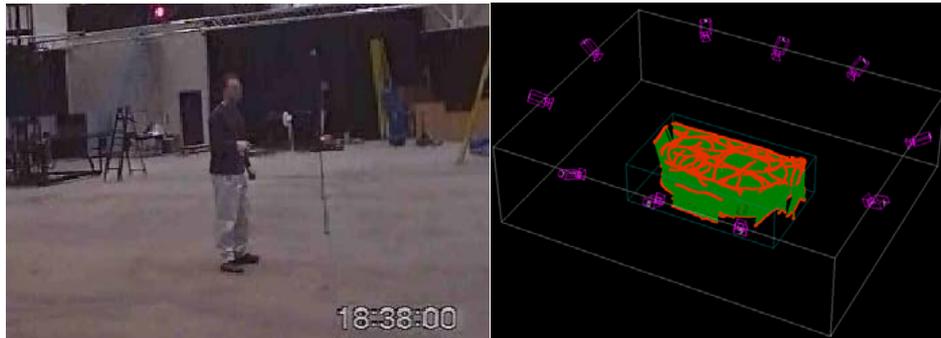


## Wand Calibration



2 steps:

- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.



Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor).



## Errore di ricostruzione





## Errore di registrazione



## Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

**Inizializzazione del bundle-adjustment.**

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



## Inizializzazione dei parametri

Soluzione determinata con Bundle Adjustment.

=> linearizzazione delle equazioni collinearita'

=> **approssimazioni iniziali** delle incognite

Interior parameters: Focal length,  $f$ , Principal point  $(x_o, y_o)$ .

Exterior parameters: Orientation  $(\omega, \phi, \kappa)$  and Position  $(X_o, Y_o, Z_o)$ .

Distortion parameters:  $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$

Inizialization with distortion parameters set equal to 0.



## Approssimazione mediante DLT

*Collinearita':*

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

*DLT:*  
*(Direct*  
*Linear*  
*Transform)*

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$
$$y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$

I parametri esterni ed interni sono rappresentati con gli 11 coefficienti  $L_i$



## DLT ed equazioni di collinearità



$$L_1 = \frac{x_0 \cdot r_{31} - f_x \cdot r_{11}}{D}; \quad L_2 = \frac{x_0 \cdot r_{32} - f_x \cdot r_{12}}{D}; \quad L_3 = \frac{x_0 \cdot r_{33} - f_x \cdot r_{13}}{D};$$

$$L_4 = \frac{x_0 + f_x \cdot (r_{11} \cdot X_0 + r_{12} \cdot Y_0 + r_{13} \cdot Z_0)}{D};$$

$$L_5 = \frac{y_0 \cdot r_{31} - f_y \cdot r_{21}}{D}; \quad L_6 = \frac{y_0 \cdot r_{32} - f_y \cdot r_{22}}{D}; \quad L_7 = \frac{y_0 \cdot r_{33} - f_y \cdot r_{23}}{D};$$

$$L_8 = \frac{y_0 + f_y \cdot (r_{21} \cdot X_0 + r_{22} \cdot Y_0 + r_{23} \cdot Z_0)}{D};$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}; \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}; \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}; \quad 11 \text{ PARAMETRI da trovare} \Rightarrow$$

$$D = -(r_{31} \cdot X_0 + r_{32} \cdot Y_0 + r_{33} \cdot Z_0) \quad \text{Richiede almeno 6 control points di coordinate note}$$

-> stima ai minimi quadrati non iterativa

Trovati gli 11 parametri  $L_i$ , ricavo i parametri interni ed esterni, che utilizzo come approssimazione iniziale per il bundle adjustment



## I vanishing points (punti di fuga)



- Sull'immagine, linee parallele nello spazio 'oggetto' si possono intersecare.
- Trasformate nello spazio 'immagine' attraverso la trasformazione prospettiva della camera.



Nelle immagini ci sono molti indizi di tridimensionalità.

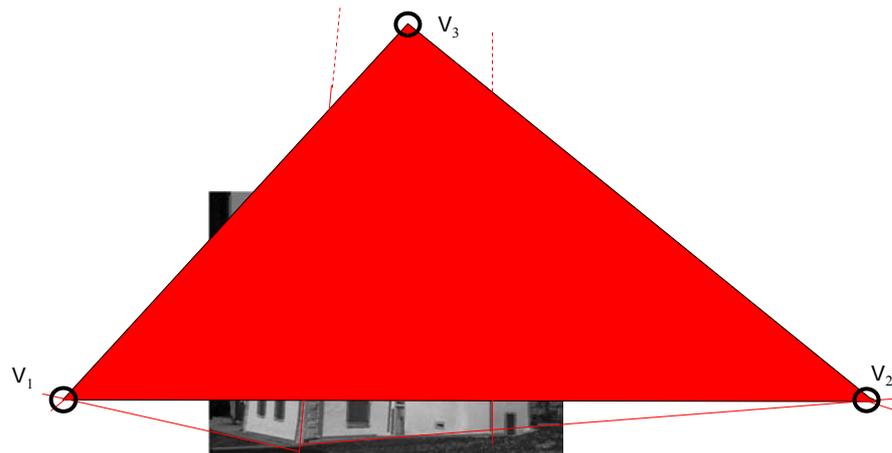
Linee rette, angoli, distanze e parallelismi possono essere usati per ricavare utili informazioni sulla collocazione degli oggetti nello spazio.



## Inizializzazione dei parametri interni tramite vanishing points



Intersezione di linee parallele nello spazio 'oggetto' trasformate nello spazio 'immagine' da una trasformazione prospettiva della camera.

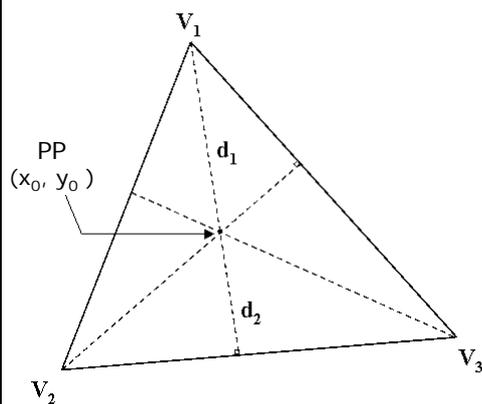


A.A. 2004-2005

65/72



## Stima del punto principale



**PP:** ortocentro del triangolo

$$c = \sqrt{d_1 * d_2}$$

*Problemi:*

- Quali linee estrarre?
- Come trovarle (autom/manual)?
- Come trovare i 3 vertici del triangolo?

A.A. 2004-2005

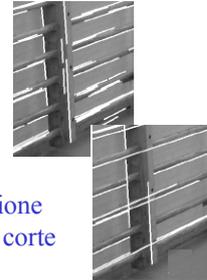
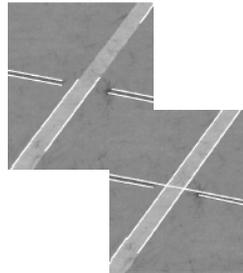
66/72



## Algoritmo per determinare i vanishing points



- Estrazione automatica di edges/linee con operatore di Canny.
- Aggregazione delle linee piu' corte usando la loro pendenza e distanza reciproca.
- Per ogni linea, calcolare pendenza e distanza dal centro dell'immagine.
- Plottare pendenza e distanza.
- Classificazione delle linee in 3 gruppi (di solito  $<40^\circ$ ; ca  $90^\circ$ ;  $>140^\circ$ ).
- Intersezione delle linee di ciascun gruppo per calcolare il punto all'infinito (pto di fuga).
- Calcolo di PP e focale.



Aggregazione delle linee corte



## Sommario



### Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

#### La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

#### Ricostruzione 3D (ray-intersection).



# Dal 2D al 3D

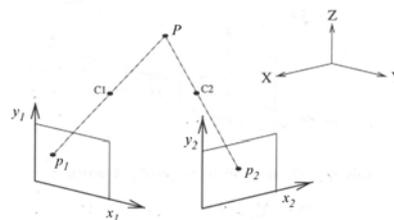
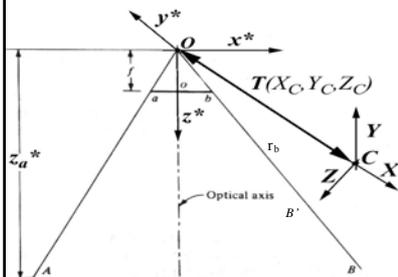


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Nello spazio 3D esistono  $\infty^1$  punti compatibili con  $p_b$

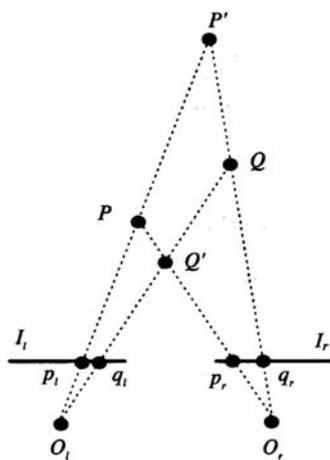
Soluzione: Stereoscopia



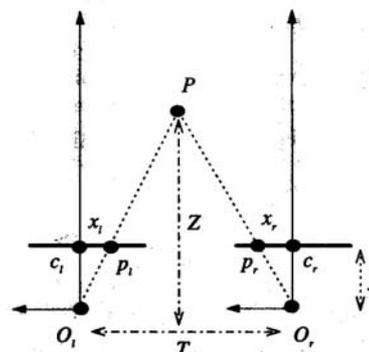
# 3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $x_l - x_r = \text{stereo disparità}$



(a)



(b)

$$T / Z = d / f$$



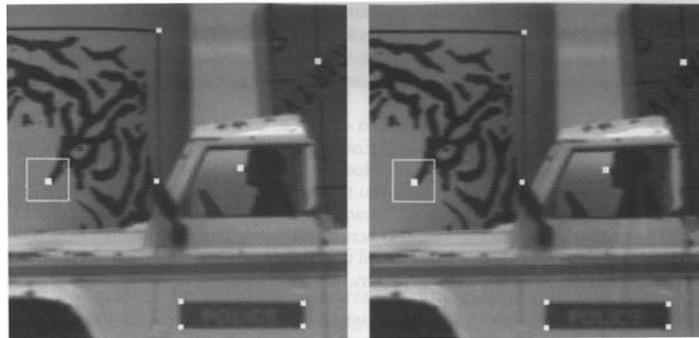
# Problemi



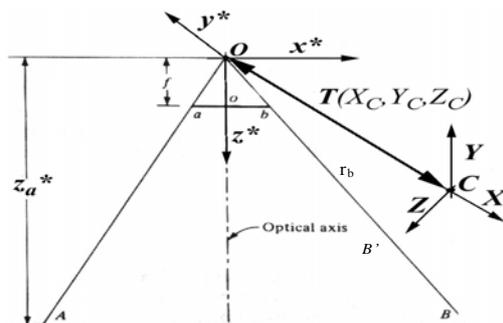
- Corrispondenza.
- Ricostruzione posizione 3D.
- Classificazione.

Low-level processing

High-level processing



# Dal 2D al 3D



Invertiamo le  
Equazioni di collinearità  
 $P(X, Y, Z) \Rightarrow p(x, y, f)$   
 ----->  
 $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$x_a = x_0 + f * \frac{m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$y_a = y_0 + f * \frac{m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$z_a = f$$



## Dal 2D al 3D



- Equazioni inverse  $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$[m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)] * (x_a - x_0) = f[m_{11}(X - X_c) + m_{12}(Y - Y_c) + m_{13}(Z - Z_c)]$$

$$[m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)] * (y_a - y_0) = f[m_{21}(X - X_c) + m_{22}(Y - Y_c) + m_{23}(Z - Z_c)]$$

Sono equazioni lineari in  $X, Y, Z$ :

- $[m_{31}(x_a - x_0) - fm_{11}] X + [m_{32}(x_a - x_0) - fm_{12}] Y + [m_{33}(x_a - x_0) - fm_{13}] Z = [m_{31}(x_a - x_0) - fm_{11}] X_c + [m_{32}(x_a - x_0) - fm_{12}] Y_c + [m_{33}(x_a - x_0) - fm_{13}] Z_c$
- $[m_{31}(y_a - y_0) - fm_{21}] X + [m_{32}(y_a - y_0) - fm_{22}] Y + [m_{33}(y_a - y_0) - fm_{23}] Z = [m_{31}(y_a - y_0) - fm_{21}] X_c + [m_{32}(y_a - y_0) - fm_{22}] Y_c + [m_{33}(y_a - y_0) - fm_{23}] Z_c$

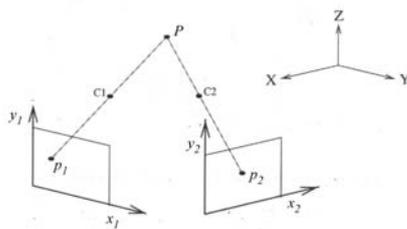
Identificano due piani:

- $a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = d_1$  // asse y
- $a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = d_2$  // asse x

Intersezione di due piani individua una retta nello spazio 3D (raggio della video-camera, camera ray). Retta per il punto sul piano immagine ed il centro di prospettiva.



## Ricostruzione stereoscopica



$$\{p_1(x, y) \iff p_2(x, y)\}$$

$$[p_1(xy) \mid p_2(xy)] \Rightarrow P(XYZ).$$

Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

**Equazioni di collinearità per due video-camere:**

- $a_{1TV1} X + b_{1TV1} Y + c_{1TV1} Z = d_{1TV1}$
- $a_{2TV1} X + b_{2TV1} Y + c_{2TV1} Z = d_{2TV1}$
- $a_{1TV2} X + b_{1TV2} Y + c_{1TV2} Z = d_{1TV2}$
- $a_{2TV2} X + b_{2TV2} Y + c_{2TV2} Z = d_{2TV2}$

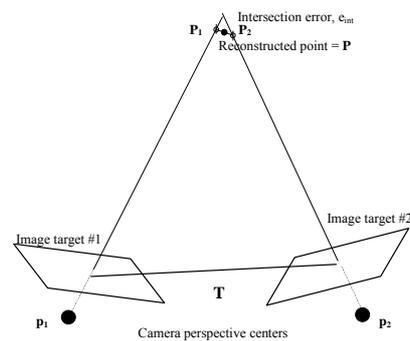


## Ricostruzione - matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale:  $A P = B \Rightarrow P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura.
- Quando non ammette soluzioni?



A.A. 2004-2005

75/72



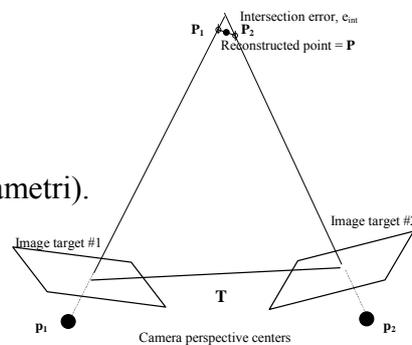
## Ricostruzione - Ray intersection

- *Altra soluzione*: equazioni in forma parametriche delle due rette:

$$\begin{aligned} X_1 &= Xc_1 + a_1 k & X_2 &= Xc_2 + a_2 h \\ Y_1 &= Yc_1 + b_1 k & Y_2 &= Yc_2 + b_2 h \\ Z_1 &= Zc_1 + c_1 k & Z_2 &= Zc_2 + c_2 h \end{aligned}$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).



A.A. 2004-2005

76/72



## Sommario

Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).