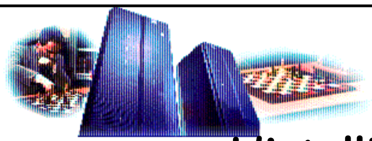
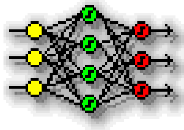




L'intelligenza visiva
Lezione di azzeramento: introduzione alla geometria analitica

Alberto Borghese
Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

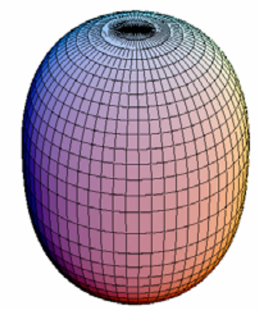
Lucidi in parte tratti dalla pagina WEB:
http://klee.usr.dsi.unimi.it/~dan/PGL/doc/slides/
Del prof. D. Marini

Sommario

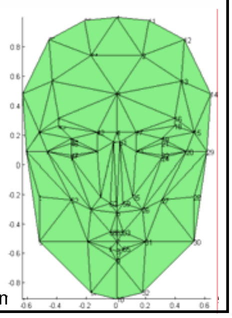
- Rappresentazione di forme
- Trasformazione di forme geometriche
- La trasformazione proiettiva

Descrizione analitica di forme geometriche

Descrizione parametrica (e.g. Linee, Piani, Cubi, Parallelepipedi. Quadriche....), rappresentazione sotto forma di funzioni parametrizzate. La superficie è funzione de valore dei parametri.



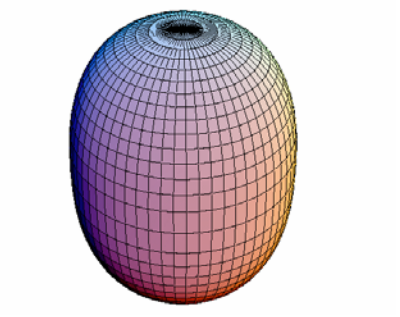
Descrizione non parametrica. Mesh, descrizione per punti. Insieme di punti + connettività (e.g. VRML). La superficie è determinata dalla posizione 3D dei vertici della mesh.

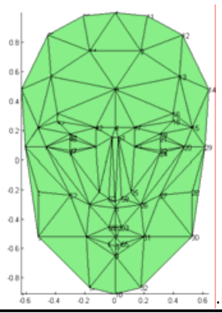


Descrizione semi-parametrica. Combinazione lineare di funzioni di base. La superficie è determinata dai parametri delle funzioni di base e dai loro pesi.

Descrizione del movimento

- Punto materiale: **P** = **P**(t) – 3 dof
- Corpo rigido: 6 dof [**R**(t), **T**(t)].
- Corpo deformabile: N dof **G**(t)

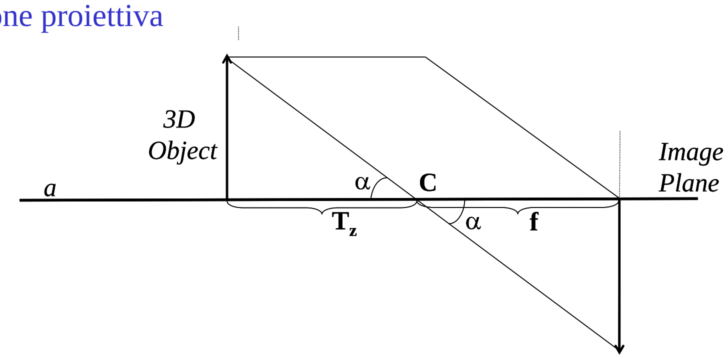




Misura delle forme e del movimento

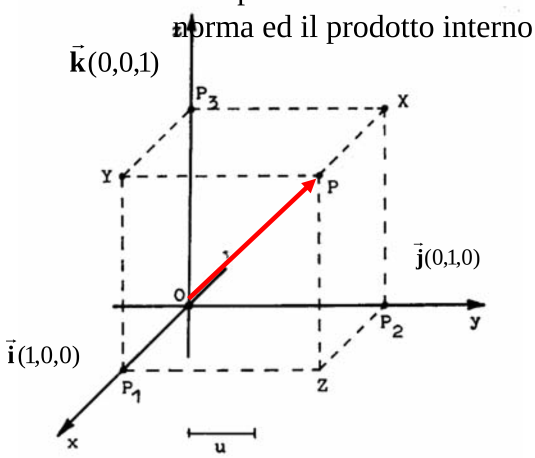
La misura viene effettuata su superfici, generalmente piane (piano immagine).

Trasformazione proiettiva



La rappresentazione analitica di un punto

Spazi Euclidei sono spazi di Hilbert: viene definita una metrica, una norma ed il prodotto interno (scalare).



$P_x = \mathbf{P} \bullet \mathbf{i}$

$P_y = \mathbf{P} \bullet \mathbf{j}$

$P_z = \mathbf{P} \bullet \mathbf{k}$

$$\vec{\mathbf{P}} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = [P_x \;\; P_y \;\; P_z] = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

Un punto è descritto dal vettore che lo congiunge all'origine di un sistema di riferimento ortogonale.

Proprietà del segno del prodotto scalare

- se $V.W > 0$ l'angolo α è: –90° < α < 90°
- se $V.W = 0$ l'angolo α è: –90° o 90°
- se $V.W < 0$ l'angolo α è: 90° < α < 270°

il prodotto scalare si può quindi usare per valutare l'orientamento di 2 vettori.

Il prodotto scalare è nullo se i vettori sono ortogonali (condizione di perpendicolarità).

Dato un prodotto scalare, quanti sono gli orientamenti relativi possibili di due vettori?

NB $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Condizione di ortogonalità: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Prodotto vettore (cross product)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_y V_z - U_z V_y) \\ (U_z V_x - U_x V_z) \\ (U_x V_y - U_y V_z) \end{bmatrix}$$

Il risultato è un vettore a sua volta.

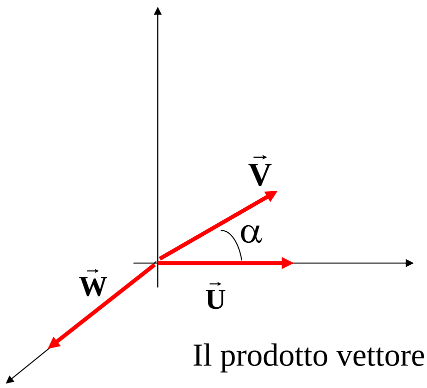
$\mathbf{U} = \mathbf{i}$

$\mathbf{V} = \mathbf{j}$

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} (00 - 00) \\ (00 - 00) \\ (11 - 00) \end{bmatrix} = [0\ 0\ 1] = \vec{\mathbf{k}}(0,0,1)$$

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}}$$



Vettore normale al piano identificato da **U** e **V**

$$|\,\mathbf{W}\,| = |\,\mathbf{U}\,||\,\mathbf{V}\,|\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = |(\vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}})\,| \,/ (|\,\mathbf{U}\,||\,\mathbf{V}\,|)$$

Il prodotto vettore è nullo se i vettori sono paralleli

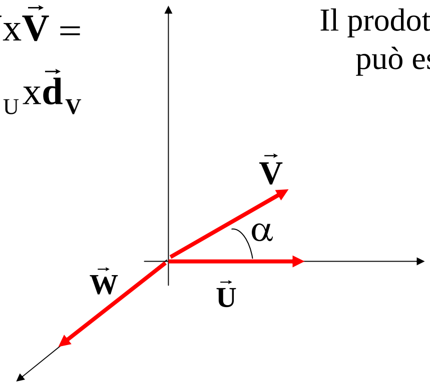
Il verso è coerente con la "regola della mano destra"

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} =$$

$$(\mathrm{UV})\vec{\mathbf{d}}_U \mathrm{x} \vec{\mathbf{d}}_V$$

Il prodotto vettore (*cross product*) si può esprimere con i versori.



$$i = (1,0,0)$$

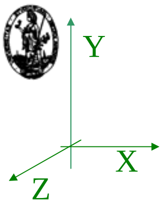
$$j = (0,1,0)$$

$$k = (0,0,1)$$

$$V = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$U = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

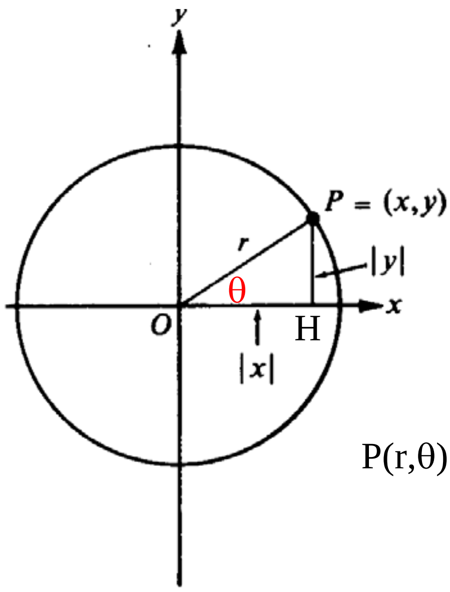
$$\mathbf{W} = (v_2 u_3 - v_3 u_2)\mathbf{i} + (v_1 u_3 - v_3 u_1)\mathbf{j} + (v_1 u_2 - v_2 u_1)\mathbf{k}$$



Lo spazio Euclideo

- Lo spazio può essere orientato in due modi:
  - mano destra: avvolgete la mano all'asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a destra e y va verso l'alto (terna destrorsa).
  - mano sinistra: avvolgete la mano all'asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a sinistra e y va verso l'alto.
- Questo definisce il *world coordinate system* in cui sono definiti gli oggetti.

Le coordinate polari

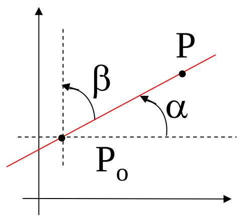


$x = r \cos(\theta) = OH$

$y = r \sin(\theta) = PH$

P(r,θ) sono le coordinate polari.

Rette orientate nel piano



$r = |P - P_o|$

3 parametri liberi: P_o e α

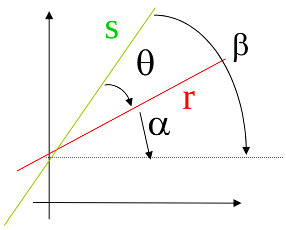
P(X,Y) = $X_o + r\cos(\alpha)$
$Y_o + r\cos(\beta) = Y_o + r\cos(90-\alpha) = Y_o + r\sin(\alpha)$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

Relazione di ortogonalità -> 1 parametro libero

(coefficiente angolare = $tg(\alpha)$)

Angolo tra 2 rette orientate



Coseni direttori di s: s_x, s_y; angolo β.
Coseni direttori di r: r_x, r_y; angolo α.
$\beta = \theta + \alpha$

$\cos(\theta) = \cos(\beta - \alpha) =$
$\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) =$
$r_x s_x + r_y s_y$

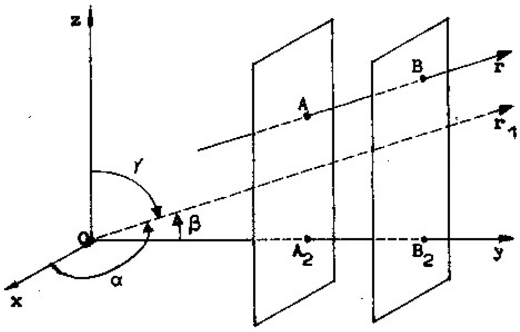
$\cos(\theta) = r \bullet s = r_x s_x + r_y s_y$

(prodotto scalare dei versori delle due rette è il coseno dell'angolo tra le stesse)

Condizione di parallelismo in 3D: $\cos(\theta) = 1 \rightarrow r_x = s_x, r_y = s_y, r_z = s_z$

Condizione perpendicolarità in 3D: $\cos(\theta) = 0 \rightarrow r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z = 0$
(prodotto scalare nullo)

Rette orientate (coseni direttori)



$r = |AB|$

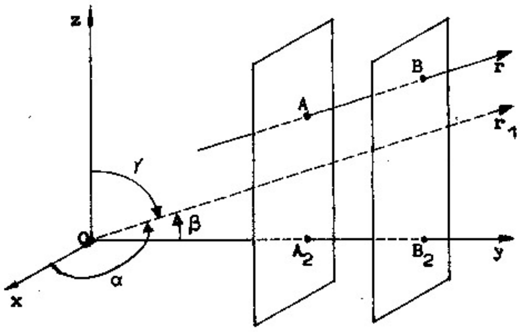
$$B(X,Y,Z) = \begin{matrix} X_o + r\cos(\alpha) \\ Y_o + r\cos(\beta) \\ Z_o + r\cos(\gamma) \end{matrix}$$

$$\cos(\alpha) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{i}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_x / |BA|$$

$$\cos(\beta) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{j}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_y / |BA|$$

$$\cos(\gamma) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{k}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_z / |BA|$$

Rette orientate (coseni direttori)



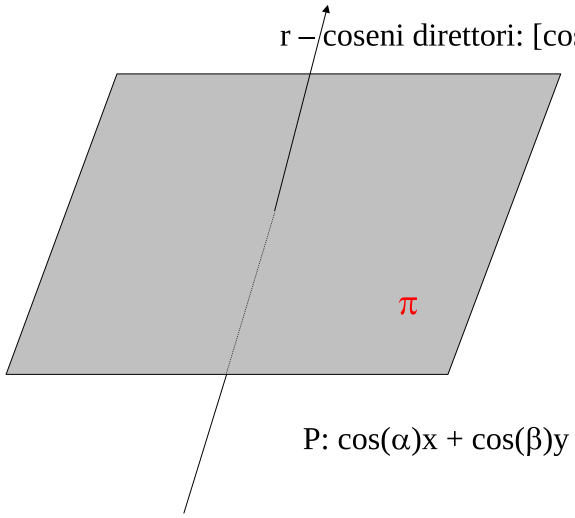
Vale la relazione:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
relazione di ortogonalità
-> 2 parametri

La retta nello spazio è identificata da 5 parametri indipendenti.

I piani nello spazio

r – coseni direttori: $[\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)]$



$ax+by+cz = d$

P: $\cos(\alpha)x + \cos(\beta)y + \cos(\gamma)z = d$

Un piano è identificato dalla direzione della sua normale.

Rappresentazione di forme semplici

Definizione di una base (vettoriale) per lo spazio Euclideo (versori degli assi).

Descrizione degli elementi geometrici in questo spazio mediante numeri che specificano una posizione o una direzione (in generale i parametri).

Sommario

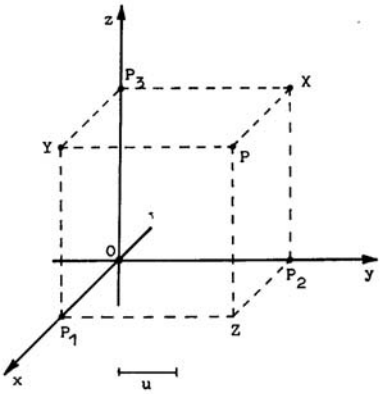
- Rappresentazione di forme
- Trasformazione di forme geometriche
- La trasformazione proiettiva

Trasformazioni

Trasformo **P** in **P’**

Cambia il sistema di riferimento

Cambia la posizione del punto



Coordinate omogenee

Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate carteziane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo *w*:

$$V(x, y, z) \text{ corrisponde a :}$$
$$V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X / w$$
$$y = Y / w$$
$$z = Z / w$$

solitamente si sceglie $w=1$

w = 0 identifica il punto all'∞ sulla retta per l'origine, passante per V.
I coseni direttori saranno x/|V|, y/|V|, z/|V|.

Trasformazioni 3D

Traslazione – tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione – tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all'asse.

Scala – variazione della dimensione lungo un asse.

Traslazione in coordinate omogenee

Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

Traslazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x + 0 + 0 + T_x)$$
$$y' = (0 + y + 0 + T_y)$$
$$z' = (0 + 0 + z + T_z)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^t = x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x$$
$$y^t = y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y$$
$$z^t = z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z$$

coord. cartesiane

Scala in coordinate omogenee

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x.S_x + 0 + 0 + 0)$$
$$y' = (0 + y.S_y + 0 + 0)$$
$$z' = (0 + 0 + z.S_z + 0)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^s = x'/w' = (x.S_x)/1$$
$$y^s = y'/w' = (y.S_y)/1$$
$$z^s = z'/w' = (z.S_z)/1$$

coord. cartesiane

Traslazione + Scala

$$V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione | Scala

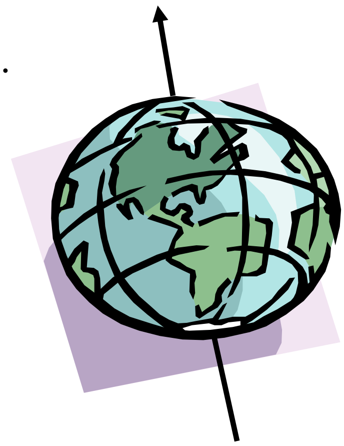
$$V'' = S(TV) = (ST)V = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fayttorizzazione delle trasformazioni: rappresentazione della trasformazione in un’unica matrice.

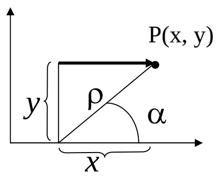
Traslazione + Scala

La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

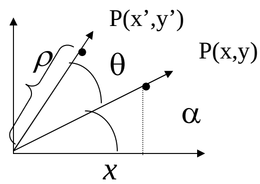


La rotazione attorno a *z (caso piano)*



$x = \rho \cos\alpha$

$y = \rho \sin\alpha$



$$x' = \rho\cos(\alpha+\theta) = \boxed{\rho\cos\alpha}\cos\theta + \boxed{\rho\sin\alpha}\sin\theta$$

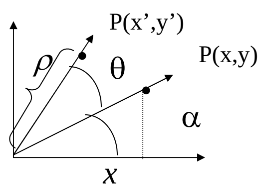
$$= x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = \rho\sin(\alpha+\theta) = -\rho\cos\alpha\sin\theta + \rho\sin\alpha\cos\theta$$
$$= -x\sin\theta + y\cos\theta$$

La rotazione attorno a *z (forma matriciale)*

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

P' = RP



Matrice di rotazione

$$\sum_{i=1}^{3} m^2_{ij} = 1$$

det(M) = 1

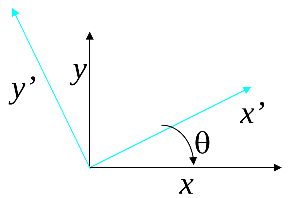
$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} m_{jk} = 0 \quad i \neq k$$

Matrice ortonormale

Significato geometrico della matrice di rotazione

Ruotiamo il sistema di riferimento xy in x'y' di un angolo -θ.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

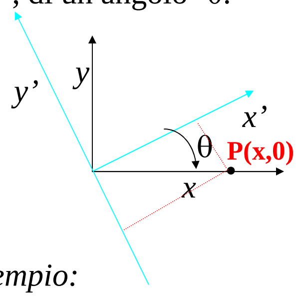
M contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y'.

Significato geometrico della matrice di rotazione

Consideriamo che il punto P -> P' sia un punto appartenente all'asse x, P(x,0) e che P' appartenga ad un asse x', ottenuto ruotando il sistema di riferimento xy in x'y', di un angolo -θ.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



M contiene la proiezione degli assi (dei versori) del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y'.

Esempio:

x' = | P | cos(-θ) = xcos(-θ)

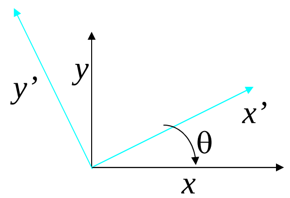
y' = | P | cos[-(90+θ)] = xsin(θ)

Si può estendere a punti che non giacciano su uno dei due assi coordinati.

Matrice di rotazione e basi

Ruotiamo il sistema di riferimento xy in x’y’ di un angolo -θ.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

x’ = a **x** + b**y** x’ ha componenti solo lungo x’

y’ = c**x** + d**y** y’ ha componenti solo lungo y’

z’ = **z** z’ ha componenti solo lungo z’

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

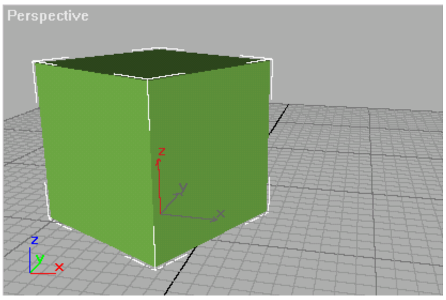
$$x' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0)$$
$$y' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0)$$
$$z' = (0 + 0 + z + 0)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

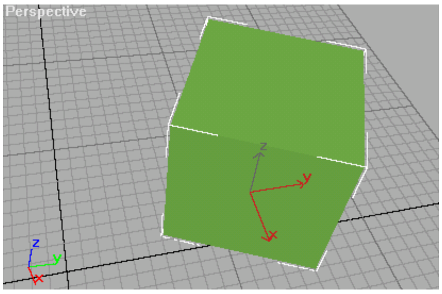
coord. omogenee

$$x^{R_z} = x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1$$
$$y^{R_z} = y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1$$
$$z^{R_z} = z'/w' = (z.1)/1$$

coord. cartesiane

Orientamento di un corpo rigido nello spazio



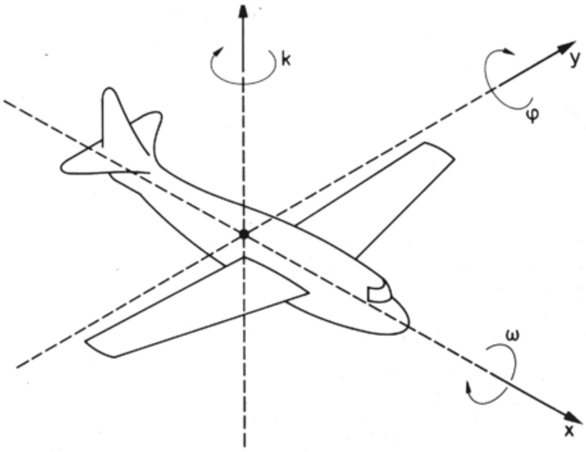


Tre parametri: tre rotazioni indipendenti.

Angoli di orientamento nello spazio 3D

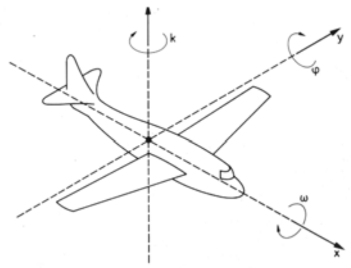
Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.



Rotazione attorno ad un singolo asse

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

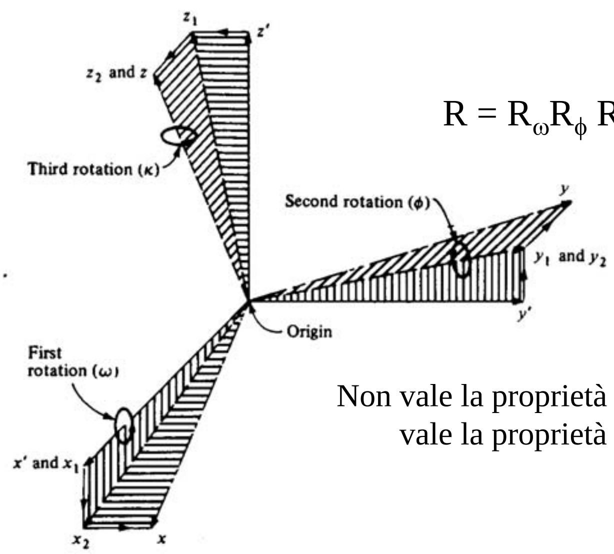


$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni sequenziali



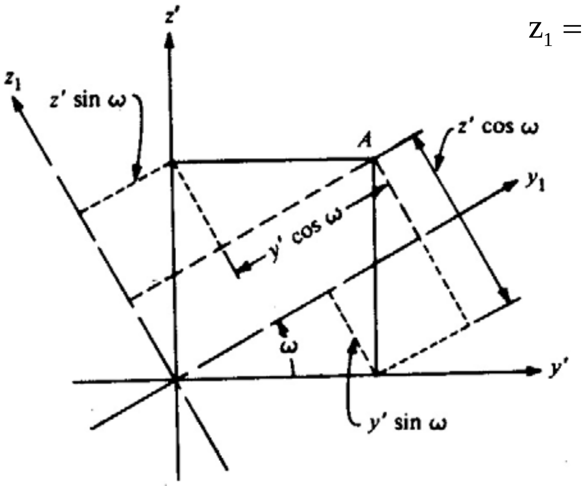
$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa$$

Non vale la proprietà commutativa,
vale la proprietà associativa.

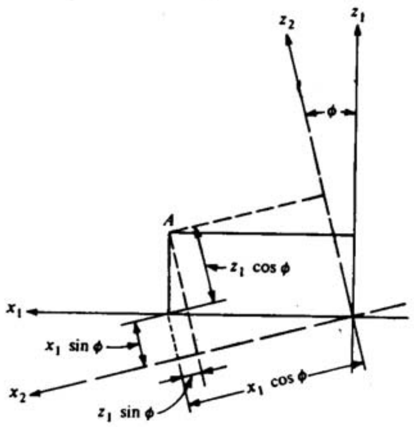
Ciascuna rotazione avviene su uno dei piani coordinati.

I) Rotazione attorno all’asse x (roll)

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_1 = -y'\sin\omega + z'\cos\omega$$



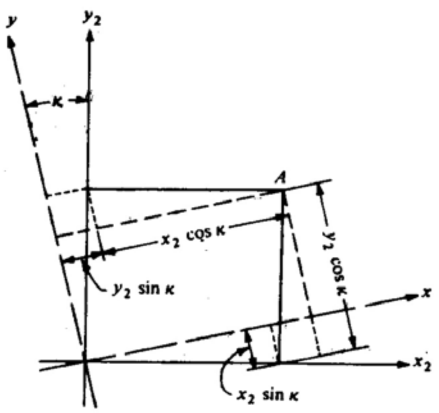
II) Rotazione attorno all’asse y (pitch)



$$x_2 = x_1\cos\phi - z_1\sin\phi$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = +x_1\sin\phi + z_1\cos\phi$$

$$x_2 = x'\cos\phi - (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi$$
$$y_2 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_2 = +x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

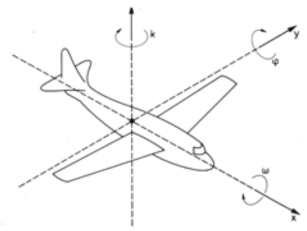
III) Rotazione attorno all'asse z (yaw)



$$x_3 = x_2 \cos k + y_2 \sin k$$
$$y_3 = -x_2 \sin k + y_2 \cos k$$
$$z_3 = z_2$$

$$x_3 = [x'\cos\phi - (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\cos k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\sin k$$
$$y_3 = -[x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\sin k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\cos k$$
$$z_3 = +x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

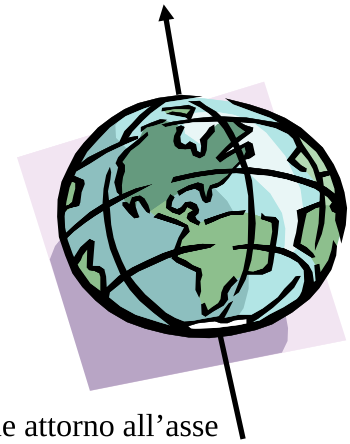
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos k & \sin\omega\sin\phi\cos k + \cos\omega\sin k & -\cos\omega\sin\phi\cos k + \sin\omega\sin k \\ -\cos\phi\sin k & -\sin\omega\sin\phi\sin k + \cos\omega\cos k & \cos\omega\sin\phi\sin k + \sin\omega\cos k \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni "*semplici*" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

Quaternioni

Rappresentazione della rotazione mediante: 1 vettore + 1 scalare

Asse di rotazione Angolo di rotazione



Si può dimostrare che data una rotazione attorno all'asse identificato dal versore **n**, di un angolo $-\pi <= \theta <= \pi$, questa può essere rappresentata dal quaternione: $q=(\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$

Trasformare gli oggetti

- i vertici dell'oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate)
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna ***V***.
- ***R, D*** e ***S*** sono matrici associate a rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene come:

$V'=V+D$ traslazione, ***D*** è un vettore di traslazione

$V'=SV$ scala, ***S*** è una matrice di scala

$V'=RV$ rotazione, ***R*** è una matrice di rotazione

La rototraslazione in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

  $V''=A_2A_1V = A_2(A_1V) =(A_2A_1)V$

  - la trasf. A_1 viene applicata per prima!

- ricordiamo che il prodotto di rotazioni <u>non è *commutativo*</u>: $R_2R_1 \neq R_1R_2$, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1V) =(A_2A_1)V$.

- ***Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice.***

Trasformazioni inverse

- Denotiamo le inverse come le matrici affini: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.
- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il *reciproco* dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa} \;\Rightarrow\; R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$

La rototraslazione inversa in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R^T R P = +R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P'$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i} \cdot \mathbf{T}$

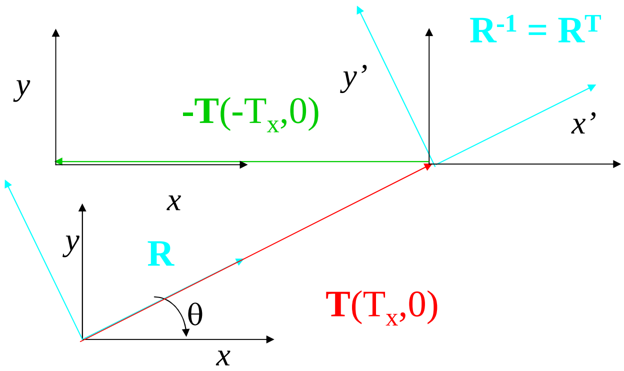
$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)

Perchè $-R^T T$?

Solo così applicando trasformata diretta ed inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.



$R^T T$ è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.

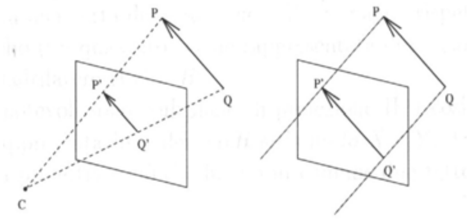
Trasformazioni affini

- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, scala e traslazione.

Sommario

- Rappresentazione di forme
- Trasformazione di forme geometriche
- La trasformazione proiettiva

Proiezione centrale verso proiezione ortogonale



P(X,Y,Z) viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto P'(X',Y'). Z è la distanza dal piano immagine.

1) 2)

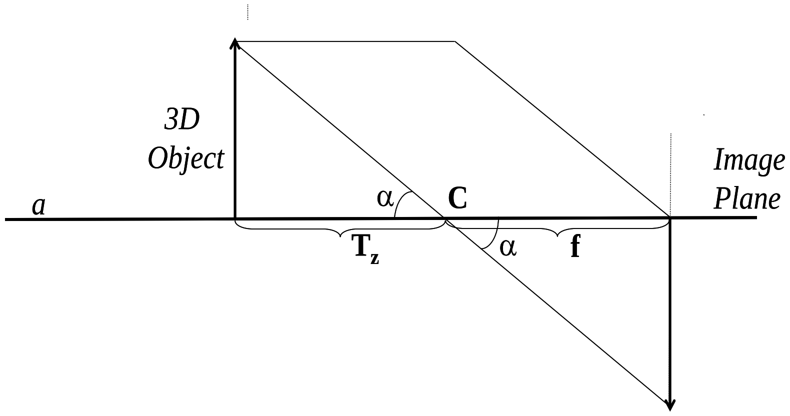
1) X' dipende da X **e** Z.
2) X' non dipende da Z, ma solo da X.

Proiezione centrale: centro di proiezione al finito.

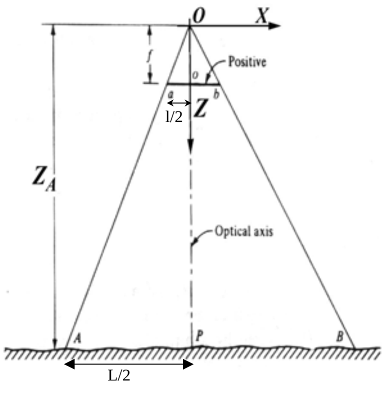
Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.

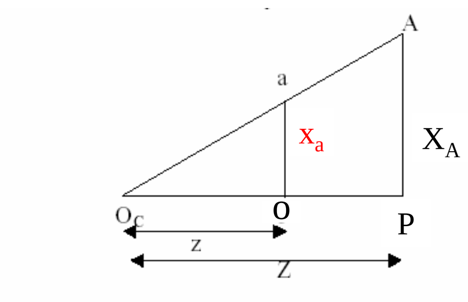
Schema di formazione di un’immagine per proiezione

Trasformazione proiettiva:



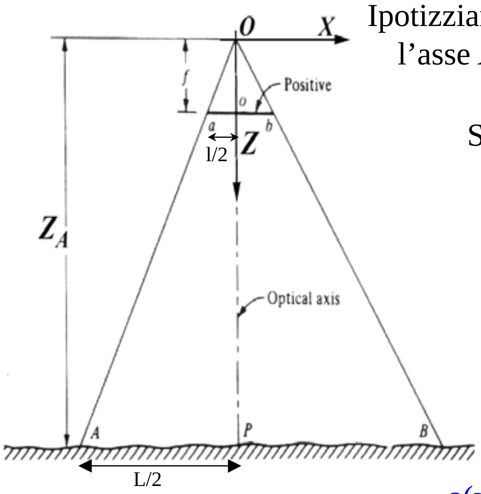
Raddrizzamento dell’immagine





Per similitudine fra i triangoli aOb e AOB: Oo : OP = ao : AP

Proiezione semplice



Ipotizziamo il sistema di riferimento con l'asse *X* parallelo ad ao e l'asse *Z* a PO

Si ipotizza O(0,0,0) e o(0,0).

Oo : OP = ao : AP

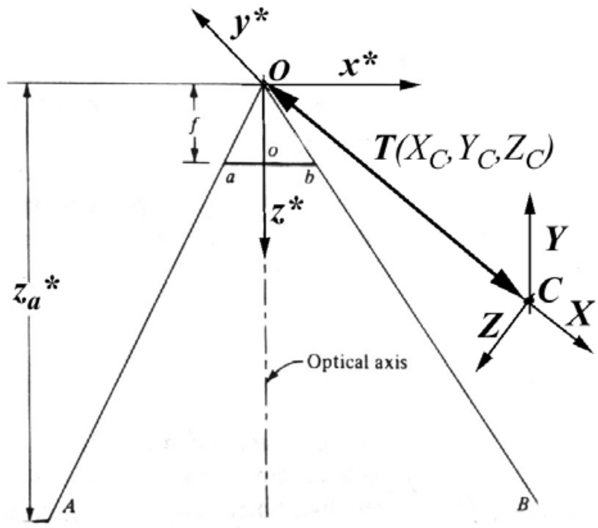
$$\Downarrow$$

$$f : Z_A = x_a : X_A$$

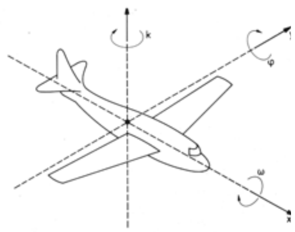
$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = X_A f / Z_A \\ y_a = Y_A f / Z_A \end{cases}$$

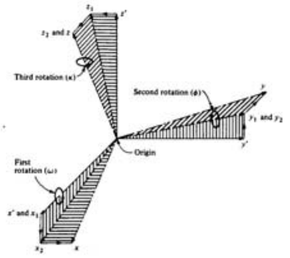
I parametri esterni

- ***Traslazione:*** 3 componenti: **T**(X_C, Y_C, Z_C).
- ***Rotazione*** $R_{3x3}(\omega, \phi, k)$



Dalle rotazioni alla matrice di rotazione

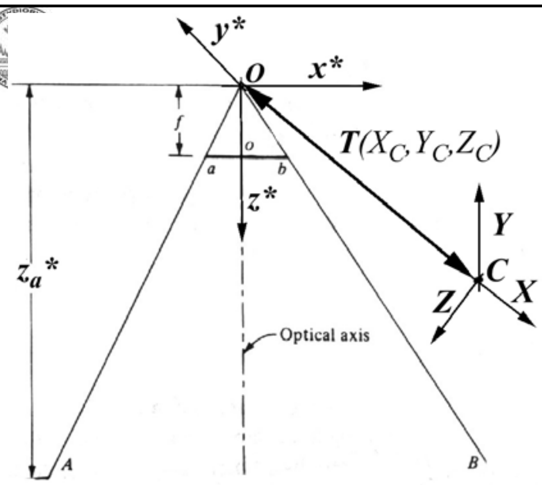




Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos k & \sin\omega\sin\phi\cos k + \cos\omega\sin k & -\cos\omega\sin\phi\cos k + \sin\omega\sin k \\ -\cos\phi\sin k & -\sin\omega\sin\phi\sin k + \cos\omega\cos k & \cos\omega\sin\phi\sin k + \sin\omega\cos k \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni "*semplici*" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

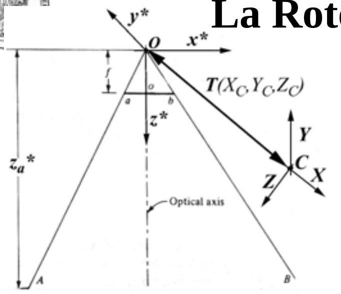


La Rotazione 3D

$x^*_A = X_A \cos(xx^*) + Y_A \cos(yx^*) + Z_A \cos(zx^*)$
$y^*_A = X_A \cos(xy^*) + Y_A \cos(yy^*) + Z_A \cos(xy^*)$
$z^*_A = X_A \cos(xz^*) + Y_A \cos(yz^*) + Z_A \cos(zz^*)$

In forma compatta: **P* = R P**

La Rototraslazione 3D



Traslazione: 3 componenti: $\mathbf{T}(X_C, Y_C, Z_C)$.
Rotazione: 3 componenti: $\mathbf{R}(\omega, \phi, k)$.

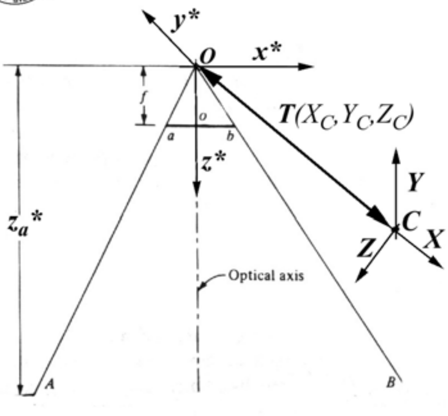
Matrice di rotazione con : ω, φ, k, è:

$$R\begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(k) & -\cos(\varphi)sin(k) & -sin(k) \\ \cos(w)sin(k) - sin(w)sin(\varphi)\cos(k) & \cos(w)\cos(k) + sin(w)sin(\varphi)sin(k) & -sin(w)\cos(\varphi) \\ sin(w)sin(k) + \cos(w)sin(\varphi)\cos(k) & sin(w)\cos(k) - \cos(w)sin(\varphi)sin(k) & \cos(w)\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

In forma compatta: $\mathbf{P^* = R\ (P - T)}$

I parametri esterni sono perciò 6.

Dal 3D al 2D

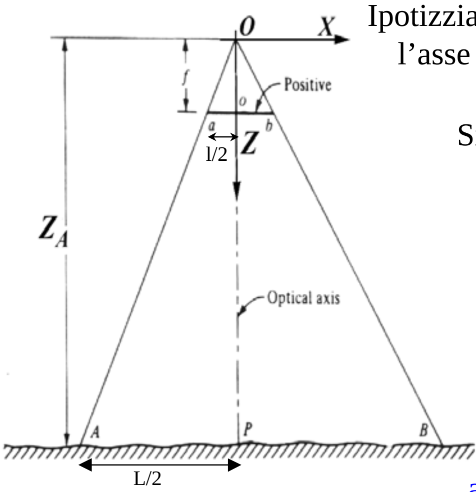


$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = X^*_A f / Z^*_A \\ y_a = Y^*_A f / Z^*_A \end{cases}$$

$\mathbf{P_A^* = R\ (P_A - T)}$

$P(X_A,Y_A,Z_A) \Rightarrow P^*_A(X^*_A, Y^*_A, Z^*_A) \Rightarrow a(x_a,y_a)$.

Proiezione semplice completa



Ipotizziamo il sistema di riferimento con l'asse *X* parallelo ad ao e l'asse *Z* a PO

Si ipotizza O(0,0,0) e $o(x_o,y_o)$.

Oo : OP = ao : AP

$$\Downarrow$$

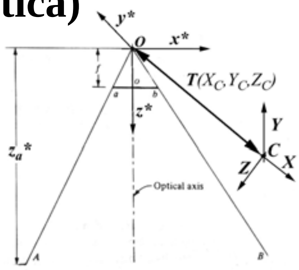
$$f : Z_A = (x_a-x_o) : X_A$$

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a-x_o = X_A f / Z_A \\ y_a-y_o = Y_A f / Z_A \end{cases}$$

Funzione di 3 parametri

Equazioni di collinearità (rappresentazione perspettica)

$$x^*_A = r_{11}(X_A-X_C) + r_{12}(Y_A-Y_C) + r_{13}(Z_A-Z_C)$$
$$y^*_A = r_{21}(X_A-X_C) + r_{22}(Y_A-Y_C) + r_{23}(Z_A-Z_C)$$
$$z^*_A = r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)$$



$$x_a - x_o = x^*_A\, f / z^*_A = f \, \frac{r_{11}(X_A-X_C) + r_{12}(Y_A-Y_C) + r_{13}(Z_A-Z_C)}{r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)}$$

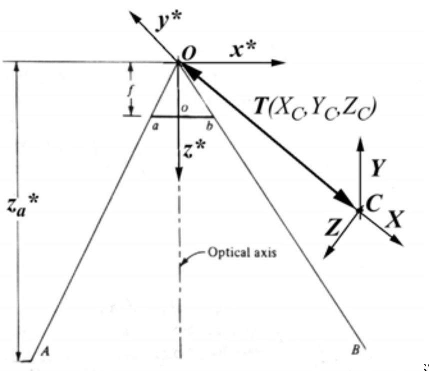
$$y_a - y_o = y^*_A\, f / z^*_A = f \, \frac{r_{21}(X_A-X_C) + r_{22}(Y_A-Y_C) + r_{23}(Z_A-Z_C)}{r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)}$$

Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.

Proiezione prospettica (in forma matriciale)

$$\begin{bmatrix} X^*_P \\ Y^*_P \\ Z^*_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parametri esterni



$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

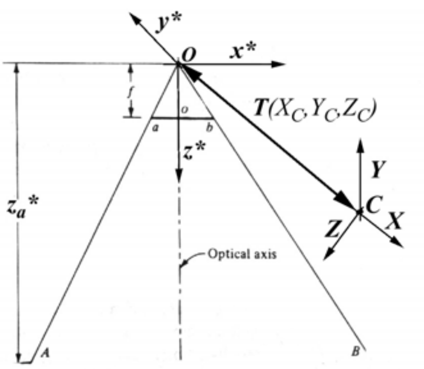
P* = A P

Proiezione prospettica (in forma matriciale)

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f & 0 & x_o \\ 0 & -f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^*_P \\ Y^*_P \\ Z^*_P \end{bmatrix}$$

Parametri interni

Quanto vale w_a?



$$\boldsymbol{a}(x_a; y_a) \quad \begin{cases} x_a - x_o = X^*_A f \\ y_a - y_o = Y^*_A f \\ w_a = Z^*_A \end{cases}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_o \\ 0 & f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione proiettiva in forma matriciale

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_o \\ 0 & f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

p = KMA P

Sommario

- Rappresentazione di forme
- Trasformazione di forme geometriche
- La trasformazione proiettiva