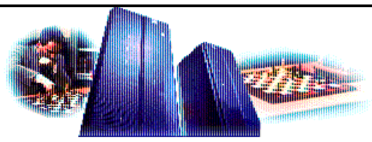
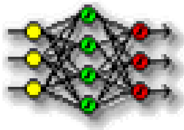
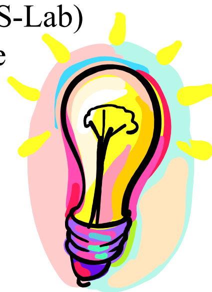




Sistemi Intelligenti Fondamenti di elaborazione dei segnali

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it



Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Gli spazi matematici

Spazi vettoriali.

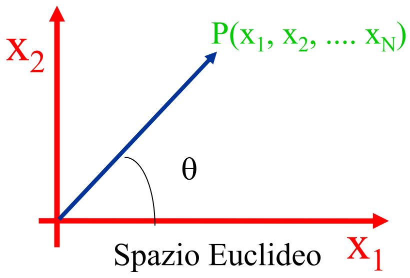
Spazi metrici.

Spazi vettoriali normati e metrici (Spazi di Banach).

Spazi vettoriali normati, metrici, dotati di prodotto interno (Spazi di Hilbert).

Spazi vettoriali

Corrispondenza tra n-ple di numeri reali $[x_1, x_2, ... x_N]$ e punti nello spazio n-dimensionale. **Vettore** è il segmento orientato che unisce l'origine con il punto $P(x_1, x_2, ... x_N)$.



X è spazio di elementi **{x}.**
Λ è un campo (e.g. Numeri reali).

X è uno spazio vettoriale rispetto a Λ se:
1) E' definita la somma tra gli elementi **{x}.**
2) E' definita l'operazione di moltiplicazione di un elemento di X per uno scalare di Λ.

Proprietà degli operatori sui vettori

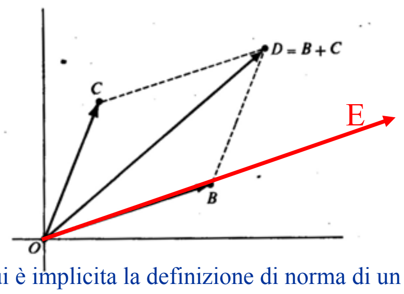
1) Somma: ad ogni coppia di elementi **x,y** ∈ X, deve corrispondere un elemento somma, **z** ∈ X. Devono valere:
   - Proprietà commutativa.
   - Proprietà associativa.
   - Esistenza dell'elemento neutro (o nullo), denominato 0.
   - Esistenza dell'elemento opposto.

2) Moltiplicazione: ad ogni elemento **x** ∈ X e λ ∈ Λ, deve corrispondere un elemento **z** ∈ X. Devono valere:
   - Proprietà commutativa.
   - Proprietà associativa.
   - Proprietà distributiva.
   - Esistenza dell'elemento neutro, denominato 1.

Descrizione di un elemento dello spazio vettoriale

Posso individuare un qualsiasi punto dello spazio, come somma opportuna di vettori.

D = **B** + **C**
D = **C** + ½ ***E**



NB Qui è implicita la definizione di norma di un vettore

Si dimostra che è possibile scegliere un vettore per ogni dimensione dello spazio ed ottenere un qualsiasi altro vettore come somma pesata dei **vettori di base** (combinazione lineare).

NB Non abbiamo ancora parlato esplicitamente di distanza o di misura.

Base di uno spazio vettoriale

N vettori linearmente indipendenti costituiscono una base, B, dello spazio vettoriale n-dimensionale, X.

$$B = [\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_N}]$$

Linearmente indipendenti: $\lambda_1\mathbf{b_1}+\lambda_2\mathbf{b_2}+ ...+\lambda_N\mathbf{b_N} = 0$, Iff $\lambda_1=\lambda_2=...= \lambda_N= 0$.

Qualsiasi vettore $\mathbf{x} \in X$, può essere rappresentato come combinazione lineare della base.

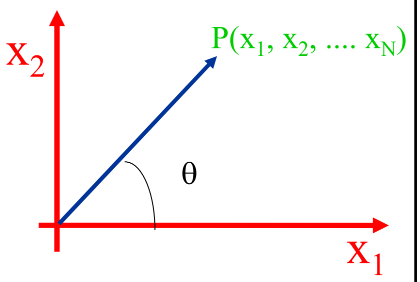
$$\boxed{\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{b_1}+\lambda_2\mathbf{b_2}+ ...+\lambda_N\mathbf{b_N}}$$

Spazio vettoriale: esempio

Il vettore $P(x_1, x_2, ... x_N)$ e' esprimibile mediante le sue coordinate. Cosa sono le sue coordinate?

Consideriamo dei vettori "unitari" allineati con gli assi (unità di misura).

Le coordinate sono la misura della posizione del punto lungo gli assi.



Possiamo scrivere: $\mathbf{P} = \lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2}$

Spazi metrici

Per ogni coppia di elementi di un generico spazio S: [**x**, **y**], viene definito un funzionale: d(**x**,**y**), detto ***distanza,*** tale che:

1) $d(x,y) \geq 0$ $\quad$ ($d(x,y) = 0$ sse $x = y$).
2) $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad$ (proprietà di simmetria).
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z, x)$ $\quad$ (proprietà triangolare).

Gli spazi S, sui quali è definita una metrica, sono chiamati spazi metrici. Questi spazi possono anche essere non vettoriali.

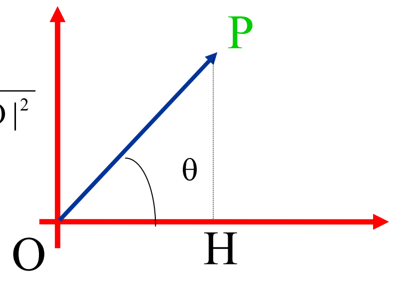
Ad esempio spazio delle città.

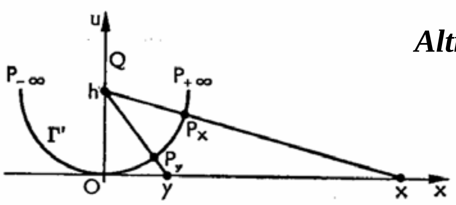
Esempi di metrica

d_1 : $d(x,y) = \sum_k |x_k - y_k| = |PH| + |HO|$

d_2 : $d(x,y) = \sqrt{\sum_k |x_k - y_k|^2} = \sqrt{|PH|^2 + |HO|^2}$

Norma utilizzata negli spazi Euclidei. Non è ancora il momento....





Altre metriche possibili:

$d(x,y) = \overline{P_x P_y}$

Spazi vettoriali normati

Viene definita una norma, || . ||, associata allo spazio vettoriale X. Per ogni elemento di X: **x,** ed ogni elemento λ di Λ, valgono:

1. $\| \mathbf{x} \| \geq 0$ ($\| \mathbf{x} \| = 0$ sse $\mathbf{x} = 0$).
2. $\| \lambda\mathbf{x} \| = |\lambda| \, \| \mathbf{x} \| \quad \forall\lambda, \forall\mathbf{x}$
3. $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$ (disuguaglianza triangolare).

Gli spazi vettoriali normati (e completi) sono detti spazi di Banach (1932)

Uno spazio vettoriale normato, può essere reso **metrico** scegliendo come **misura della distanza** tra due vettori, la **norma della differenza**:

$d(x, y) = \| x - y \|$ Che differenza c'è tra norma e distanza?

Spazi di Hilbert

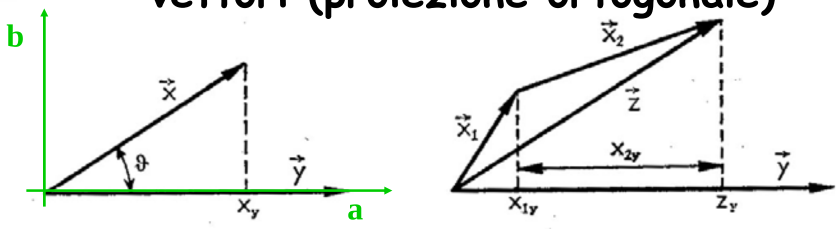
Partiamo da uno spazio vettoriale, H, non necessariamente normato. Introduciamo il **prodotto scalare**, tra due elementi, indicato con (**x**,**y**) o $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_k x_k y_k$

1. Il prodotto scalare è un funzionale lineare del primo fattore, cioè:
   $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$
   $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
2. Vale la proprietà pseudo-commutativa: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$.
3. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ sse $x = 0$.

Definisco come **norma** nello spazio vettoriale H: $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$
Segue che: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}$

Gli spazi di Hilbert sono spazi di Banach per i quali la norma (e quindi la misura della distanza) è derivata dalla definizione di prodotto scalare

Esempio di prodotto interno tra 2 vettori (proiezione ortogonale)



$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_a y_a + x_b 0 = |x_y||y| = |x|\cos(\theta)|y|$

Proprietà (pseudo-)commutativa: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

Annullamento del prodotto: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ sse $\mathbf{x} = 0$

Funzione lineare del primo fattore:

$(\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y} = |x_{1P}| + |x_{2P}|$

Lo scalare λ può essere inteso come coordinata lungo un asse **y** (versore).

Condizione di ortogonalità: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Lo spazio Euclideo

E' un esempio di spazio Hilbertiano. Con la definizione di prodotto scalare e norma si possono ricavare tutte le proprietà ben note dello spazio geometrico Euclideo.

La posizione di ogni punto è definita da un vettore rispetto all'origine e valgono tutte le proprietà di uno spazio vettoriale.

La norma di un vettore è definita come il modulo (=norma); questo può essere espresso come prodotto interno del vettore per sè stesso.

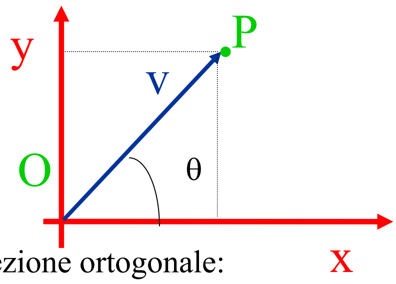
Se prendiamo come misura della distanza tra 2 vettori la radice quadrata del prodotto interno, ricaviamo il teorema di Pitagora (vedremo dopo).

Come base dello spazio vettoriale n-dimensionale, Hilbertiano Euclideo possono essere presi n vettori linearmente indipendenti. Solitamente si considerano vettori tutti ortogonali tra loro (i versori degli assi).

Espressione di un punto funzione della base dello spazio Euclideo

v = **(P – O)**
x, **y** base dello spazio

λ_x, λ_y coordinate.



Ottengo le coordinate per proiezione ortogonale:

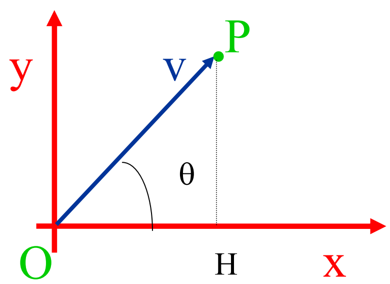
$\lambda_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$

$\lambda_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})$

Ricostruisco come combinazione lineare degli elmenti di base: $\mathbf{v} = \lambda_x\mathbf{x} + \lambda_y\mathbf{y}$.

Ipotesi implicita

Ortogonalità della base: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$



Vale il teorema di Pitagora.

$\| x \| = \sqrt{(x, x)}$
$d(x,y) = | x - y | = \| x - y \|$

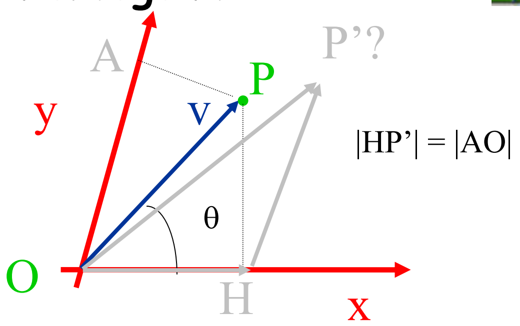
$$\| v \| = |v| = \sqrt{(P-O),(P-O)} = \sqrt{(\lambda_x\mathbf{x}+\lambda_y\mathbf{y}),(\lambda_x\mathbf{x}+\lambda_y\mathbf{y})} =$$
$$\sqrt{(\lambda_x\mathbf{x}),(\lambda_x\mathbf{x})+(\lambda_x\mathbf{x}),(\lambda_y\mathbf{y})+(\lambda_y\mathbf{y}),(\lambda_y\mathbf{x})+(\lambda_y\mathbf{y},\lambda_y\mathbf{y})} =$$
$$\sqrt{(\lambda^2{}_x\mathbf{x}^2+\lambda^2{}_y\mathbf{y}^2} = \sqrt{(P-H)^2+(H-O)^2} = \sqrt{\lambda_x{}^2+\lambda_y{}^2}$$

Base non ortogonale

Ortogonalità della base: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$

$\lambda_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \qquad \lambda_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})$

$\mathbf{v} \neq \lambda_x \mathbf{x} + \lambda_y \mathbf{y}.$



Solo con basi ortogonali si ottengono i coefficienti per proiezione sulla base e la ricostruzione come combinazione lineare dei coefficienti per la base (ritorneremo quando parleremo di geometria)**.**

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Spazio vettoriale e funzioni continue

Sia f(x) una funzione disceta tra a e b.

$X = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \ \ldots \ \xi_N\}$ $\qquad 0 \leq \xi_\kappa \leq N$ è un vettore.

Guardando ad ogni valore della funzione: $x(\xi)$, $a \leq \xi \leq b$, possiamo considerare il caso continuo come un passaggio al limite, $k \to \infty$, del caso discreto:

$X = x(\xi) \qquad a \leq \xi \leq b$

Spazio vettoriale delle funzioni continue: proprietà

Sia f(**x**) una funzione continua tra a e b, (f(**x**) $\in C^0$).

1) Somma: ad ogni coppia di elementi **x,y** $\in C^0$, deve corrispondere un elemento somma, **z** $\in C^0$. Devono valere:
   - Proprietà commutativa.
   - Proprietà associativa.
   - Esistenza dell'elemento neutro (o nullo), denominato 0, [f(**x**) $\equiv$ 0], .
   - Esistenza dell'elemento opposto.

2) Moltiplicazione: ad ogni elemento **x** $\in X$ e $\lambda \in \Lambda$, deve corrispondere un elemento **z** $\in X$. Devono valere:
   - Proprietà commutativa.
   - Proprietà associativa.
   - Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.
   - Esistenza dell'elemento neutro, denominato 1, [$\lambda \equiv 1$], .

Funzioni continue e base spazio vettoriale

E' possibile definire una base per rappresentare le funzioni in C^0 (a,b) (continue).

Passaggio dal discreto, n dimensioni, al continuo n->∞ dimensioni => infinite basi, una per ogni x $\in$[a b].

Preso un valore associato a ciascuna delle infinite basi, cosa si ottiene?

Ottengo una funzione. $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k b_k(x)$

Si dimostra che posso quindi esprimere la mia funzione in C^0 come combinazione lineare di un numero (in)finito di basi (nel caso dello sviluppo in serie di Taylor, come numero infinito di funzioni potenza; le funzioni potenza costituiscono la base del mio spazio).

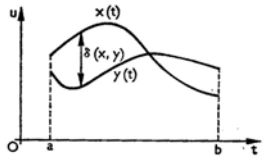
Possibili metriche per uno spazio funzionale normato (non necessariamente vettoriale)

Nello spazio vettoriale la distanza era definita, ad esempio, come:

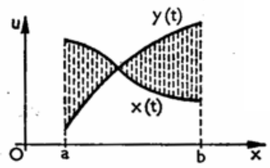
$$X - Y = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \quad = \; |PH| + |HO|$$

Per n ->∞ cosa succede alla somma?

Possibili metriche per uno spazio funzionale normato (non necessariamente vettoriale)



Metrica del massimo (o Lagrangiana, spazio L^{oo}):
d(x,y) = max |x(t) – y(t)|



Metrica integrale di ordine 1 (spazio L^1): è

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$

associato alla teoria della misura in un insieme.

Metrica integrale di ordine 2 (spazio L^2): $d_2(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}$

Metrica integrale di ordine p (spazio L^p): $d_p(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt}$

Spazi funzionali di Hilbert

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \int_T x(P)y(P)dP$$

Definisco il prodotto interno

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\,x\,|\,|\,y\,| \cos(\theta) = |\,x_y\,|\,|\,y\,|$$

Differente dallo spazio discreto, ma con le stesse proprieta'.

$$||\mathbf{x}|| \overset{\Delta}{=} \sqrt{\int_T x(P)x(P)dP}$$

Quando il prodotto interno è = 0?

Basi funzionali ortogonali

Ortogonalità della base: **x ⊥ y** (x,y) = 0 (e.g. Assi ortogonali)

Le basi della serie di potenze non sono ortogonali: $\int_T x^p(x) y^q(x) dx \neq 0$

Se le basi non sono ortogonali, non si possono calcolare i coefficienti per proiezione.

Le funzioni trigonometriche sono basi ortogonali:

Funzioni trigonometriche: $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx$ p e q interi

$$\int_0^{2\pi} \cos(qx)\cos(px)dx = \int_0^{2\pi} 1/2\{\cos((p-q)x) + \cos((p+q)x)\}dx$$
$$= 1/(p-q)[-\sin[(p-q)x]_0^{2\pi} + 1/(p+q)[-\sin[(p+q)x]_0^{2\pi}$$

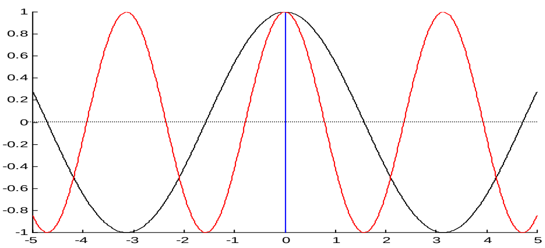
q = p = 0	2π
q = p > 0	π
q ≠ p	0

Base circolare o trigonometrica

y = cos(ωx) = cos(2πfx)

y=cos((2π/T) t)
T=2π f = 1/(2π)

y=cos(2 * (2π/T) t)
T=2π/2 = π f = 1/(2π/2).

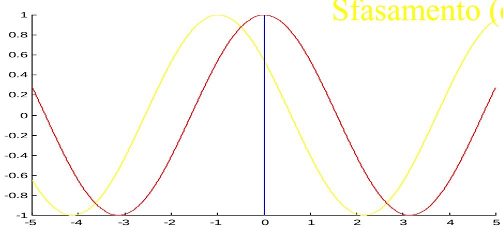


<------------ T ------------>

"Due periodi al prezzo di uno": Se n è intero, le frequenze sono multiple, "tutte le cosinusoidi iniziano dallo stesso punto".

y=cos(t-1)
T=2π f = 1/(2π)
Fase φ = -1

Sfasamento (ϕ)



La forma più generale è:
y = cos(nt + φ)

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

.

Rappresentazione in serie di Fourier

Rappresento una funzione periodica di periodo T, come serie di funzioni trigonometriche:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \qquad \text{Periodo } 2\pi / n.$$

Moti circolari, ondulatori......

Condizioni di Dirichelet. La funzione deve avere al massimo un numero finito di punti di discontinuità (nei quali può anche non essere definita), e appartiene allo spazio L^1.

Se la funzione è definita su un generico periodo T.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nx)] = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]$$

T = periodo $\qquad 2\pi/T = \omega_o =$ armonica fondamentale

Calcolo dei coefficienti della Serie di Fourier (per proiezione)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(\omega_o nx) + b_n \sin(\omega_o nx)]$$

$$(f(x),\cos(w_o kx)) = ((\sum_{n=0}^{\infty}[a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]),(\cos(w_o kx))$$

Calcolo di a_0 (k = 0)

$$(f(x),1) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx = \int_{-T/2}^{+T/2} a_o dx \quad \Rightarrow a_o = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx$$

Valore medio nel periodo

Calcolo di a_k (b_k) per k ≠ 0

Parto da: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(\omega_o nx) + b_n \sin(\omega_o nx)]$

Proietto su: $\cos(\omega_o kx) \Rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(\omega_o kx)dx = \int_{-T/2}^{+T/2} a_o \cos(w_o kx)dx +$$

= 0 per k ≠ 0
Funzione pari

$$\sum_{n=1,n\neq k}^{\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} [a_n \cos(\omega_o nx) + b_n \sin(\omega_o nx)](\cos(\omega_o kx)dx +$$

= 0 per ortogonalità

$$\int_{-T/2}^{+T/2} [a_k \cos(\omega_o kx) + b_k \sin(\omega_o kx)](\cos(\omega_o kx)dx$$

= T/2 * a_k

$$a_k = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(\omega_o kx)dx$$

Analisi Armonica

Rappresentazione della serie di Fourier mediante modulo e fase

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(\omega_o nx + \phi_n)$$

Difficile da trattare analiticamente

Formule di prostaferesi sulla n-esima armonica

$A_n*\cos(\phi_n)*\cos(nw_o x) + A_n*\sin(\phi_n)*\sin(nw_o x) = a_n\cos(nw_o x) + b_n\sin(nw_o x)$.

$a_n = A_n*\cos(\phi_n)$

$b_n = A_n*\sin(\phi_n)$

$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2$

$b_n / a_n = \tan(\phi_n)$

$[a_k, b_k]$ o $[A_k, \phi_k]$ commenti

Possiamo quindi “isolare” l’armonica con contenuto in frequenza k, semplicemente proiettando sulla base coseno (seno).

$a_k^2 + b_k^2 = A_k^2$ rappresenta il contenuto di energia del nostro segnale di partenza associata all’armonica k.

$b_k / a_k = \tan(\phi_k)$ rappresenta la fase (sfasamento rispetto all’origine) dell’armonica k.

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Rappresentazione in serie di potenze

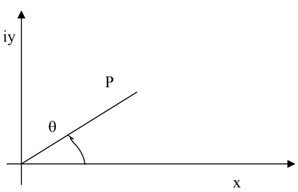
$$e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!}$$

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!}$$

$$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!}\ldots.$$



$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n)}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!}\ldots.$$

$$sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e^{iz} = cos(z) + isin(z).

Forma trigonometrica combinata della serie di Fourier

Possiamo scrivere l'esponenziale complessa in funzione di sin(z) e cos(z):

e^{iz} = cos(z) + isin(z).

Se **z = $nw_o x$,** reale, risulta: $e^{in\omega_o x}$ = cos($nw_o x$) + isin($nw_o x$).

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]$$

Dimostriamo che:

$$a_k \cos(kw_o x) + b_k \sin(kw_o x) = c_k e^{jkw_0 x} + c_{-k} e^{-jkw_0 x}$$

Ponendo: $a_n = c_n + c_{-n}$ $\quad b_n = i(c_n - c_{-n})$

$$(c_n + c_{-n}) \frac{e^{inw_0 x} + e^{-inw_0 x}}{2} + i(c_n - c_{-n}) \frac{e^{inw_0 x} - e^{-inw_0 x}}{2i} = c_n e^{inw_o x} + c_{-n} e^{-inw_o x}$$

Posso determinare i coefficienti come: $\boxed{c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx}$

Serie di Fourier - riassunto

1) Una funzione con supporto finito o periodica, appartenente agli spazi L^1 (assolutamente integrabile, con un numero finito di discontinuità), può essere rappresentata come combinazione lineare di funzioni di base circolari (Serie di Fourier).

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n sin(w_o nx)]$$

2) Per via dell'ortogonalità delle basi, i coefficienti delle basi possono essere calcolati proiettando la funzione sulle basi stesse.

$$a_n = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \cos(nw_o x) dx \qquad b_n = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \sin(nw_o x) dx$$

3) I coefficienti rappresentano l'ampiezza e lo sfasamento delle cosinusoidi che costituiscono la funzione. La Serie di Fourier fa l'analisi in frequenza della funzione.

$$f(x) = c_o + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(w_o nx + \phi_n)$$

4) Utilizzando le funzioni esponenziali complesse (fasori) si può scrivere la serie di Fourier in modo compatto come:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$

Importanza della serie di Fourier

Qualsiasi (ipotesi di Direchelet) segnale (immagine,...) può essere rappresentato come somma di funzioni trigonometriche (analisi armonica).

Per analizzare cosa succede ad un segnale che entra in un sistema, possiamo analizzare quello che succede a ciascuna armonica.

Ciascuna armonica può:
aumentare di ampiezza
diminuire di ampiezza
modificare la fase.

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Trasformata di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx \qquad w_o = 2\pi/T$$

Numeri complessi

f(x) definita tra –∞ e +∞, assolutamente integrabile (T → +∞).

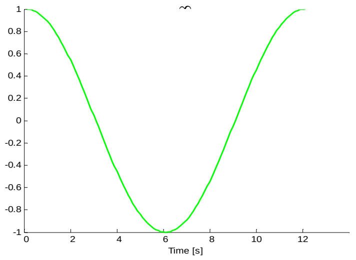
$$f(x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(jw) e^{jwx} dw \qquad F(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jwx} dx$$

Le frequenze da numerabili, diventano infinite.

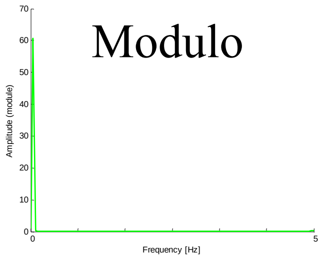
Esempio di rappresentazione grafica

$$F(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jwx} dx$$

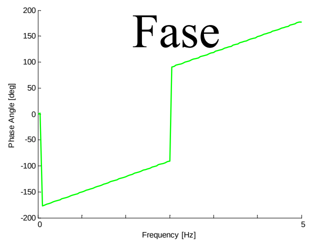
E' una funzione complessa: modulo + fase



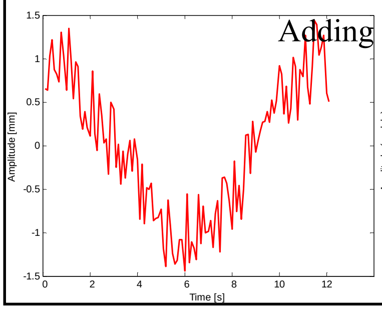
Modulo

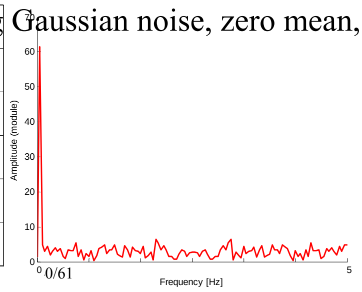


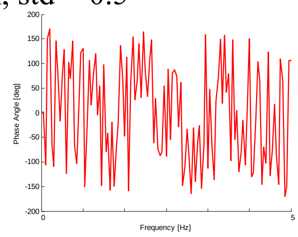
Fase



Adding Gaussian noise, zero mean, std = 0.5







Teorema di Parseval

La Trasformata di Fourier mantiene la norma L_2 di un segnale ovverosia l'energia.

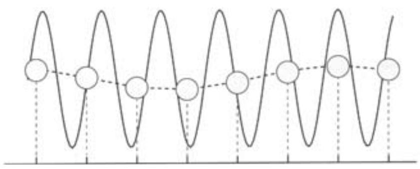
$$\sqrt{\int x(P)x(P)dP} = \sqrt{\int X(w)X(w)dw}$$

$$X(\omega) = F(x(P))$$

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Segnali campionati e DFT



Perchè si utilizzano i segnali campionati?

Segnali periodici

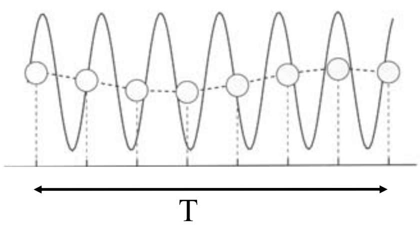
*Si introduce la Trasformata Discreta di Fourier (**DFT**):*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \quad \Rightarrow \quad f(x_k) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{j(nw_o)x_k}$$

Osservo che $jnw_o x_k$ e $-jnw_o x_k$ hanno la stessa frequenza. Posso riscrivere:

$nw_o = n\, 2\pi / T$ $\quad f(x_k) = \sum_{n=0}^{+m} c'_n e^{j(n2\pi/T)x_k}$ $\quad$ Quanto vale m?

DFT



Supponiamo che in T abbiamo N campioni

<u>Teorema di Whittaker-Shannon o del campionamento</u>. Condizione sulla frequenza: $\nu_{max} < \nu_S/2$ ($\nu_S = N/T$). Questo vuol dire che nel periodo T (frequenza fondamentale $1/T = \nu_o$), la massima frequenza sarà: $< (N/2)/T$.

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{+m} c'_n e^{j(n2\pi/T)x_k}$$

$(n2\pi/T) = [(N-1)/2 \cdot 2\pi/T]$

Determino m: $m = (N-1)/2$

$$\boxed{f(r) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c'_n e^{j(nw_o/T)r}}$$

$0 \le r \le (N-1)/2$ frequenze distinte

Ponendo: $\Delta T = 1$

$$f(r) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c'_n e^{j(nw_o/N)r}$$

DFT – forma finale

Dalla forma: $$f(r) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c'_n \, e^{j(nw_o/N)r}$$

Vogliamo ricondurci a: $$f(x_k) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{j(nw_o)x_k}$$

Ho sempre (N-1)/2 frequenze distinte $$f(r) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} c_n e^{j(nw_o/N)r}$$ Problemi per N pari

I fasori sono periodici di periodo 2π quindi:

$$e^{j(-(N-1)/2)2\pi/N)r} = e^{j(-(N-1)/2+N)2\pi/N)r}$$

DFT $$\boxed{f(r) = \sum_{0}^{(N-1)} c_n e^{j(n2\pi/N)r}}$$

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Filtraggio

Input → Filtro → Output

Il filtro è un dispositivo che modifica quanto riceve in ingresso (per noi segnali).

Ad esempio, filtro audio:
•Ricevo in ingresso un segnale audio, corrotto da rumore (fruscio).
•Voglio produrre il segnale audio ripulito dal rumore (filtraggio del rumore).

Esempi: equalizzatore audio, filtri applicati sulle immagini, filtraggio operato dai cavi di comunicazione...... Ma anche dispositivi meccanici (filtri antipolline, filtri per le lavatrici.....).

Un filtro può essere progettato per ottenere un certo effetto, o può rappresentare le caratteristiche di un sistema attraverso cui il segnale di input deve passare.

Definizione di filtro

Ogni sistema fisico può vedersi come un "filtro"

Considereremo filtri lineari e tempo-invarianti.

Definisco un filtro (sistema) S(f(t)) Lineare e Tempo-Invariante, un sistema descritto dall'operatore S(.) che trasforma f(t) in modo tale che valgano queste proprietà:

- Lineare: $S(f(t)+g(t)) = S(f(t))+S(g(t))$ e $S(a*f(t)) = a*S(f(t))$
- Tempo invariante: $S(f(t))=g(t)$ implica $S(f(t-t_0))=g(t-t_0)$ (invariante alla traslazione).

- Il rapporto ingresso/uscita di ogni filtro (ovvero il suo "comportamento") è descrivibile con una funzione lineare o non-lineare, continua, discreta.....

Filtraggio lineare e convoluzione

Input → (Linear) System = Filter – h(x) → Output

Il filtraggio è ottenuto mediante convoluzione

$$out(x_k) = 1/M \sum_{n=0}^{M} h(x_n) input(x_n - x_k) = h(.) * input(.)$$

Convoluzione, caso discreto

$$out(x) = \int h(\tilde{x}) input(x - \tilde{x}) d\tilde{x} = h(x) * input(x)$$

Convoluzione, caso continuo

Cosa succede se ho come input un impulso?

(input(x_k) = $\delta(x_k)$ = 1 sse x = x_k, input(x_k) = 0 altrove)?

Identifico la funzione che descrive il filtro (sistema)

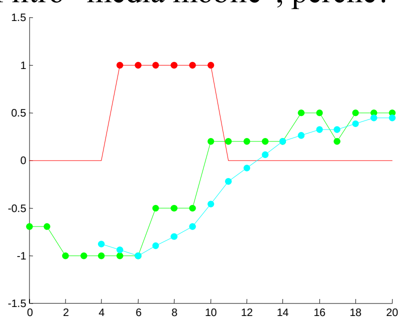
System Identification

Prodotto di convoluzione (visualizzazione grafica)

Input → (Linear) System = Filter – h(x) → Output

$$out(x_k) = 1/M \sum_{n=0}^{M} h(x_n) input(x_n - x_k) = h(x) * input(x)$$

Filtro "media mobile", perchè?



Il segnale "scorre" verso destra e sinistra rispetto al filtro al variare del valore di x_n".

In ogni posizione viene effettuata la somma dei prodotti dei campioni del segnale e del fiotro.

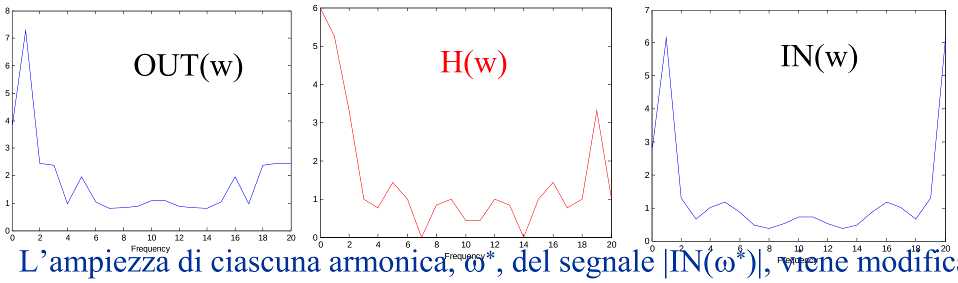
Il primo valore di uscita si ha per x_n = 5 pari all'ampiezza del filtro.

Rappresentazione nel dominio delle trasformate

Input → (Linear) System = Filter – H(w) → Output

La convoluzione nel dominio dello spazio equivale ad un prodotto nel dominio delle frequenze

$$out(x) = \int h(\tilde{x}) input(x - \tilde{x}) d\tilde{x} \qquad OUT(w) = H(w) * IN(w)$$

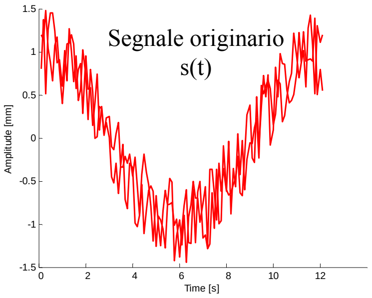


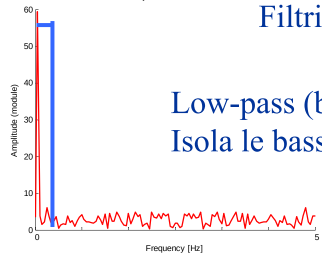
L'ampiezza di ciascuna armonica, ω*, del segnale |IN(ω*)|, viene modificata selettivamente a seconda dell'ampiezza di |H(ω*)|.

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e Prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

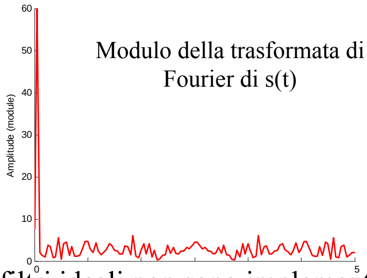
Filtraggio nel dominio delle frequenze
(E.g. Separazione delle armoniche di segnale da quelle di rumore)

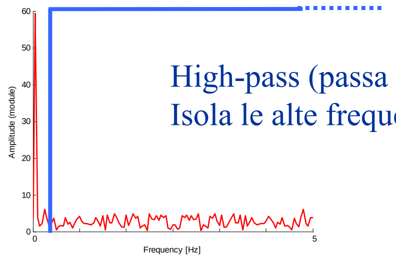




Filtri ideali

Low-pass (bassa basso)
Isola le basse frequenze.

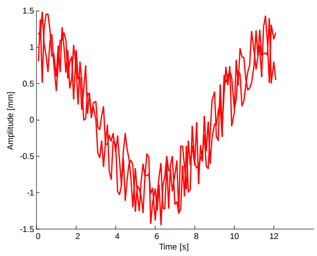


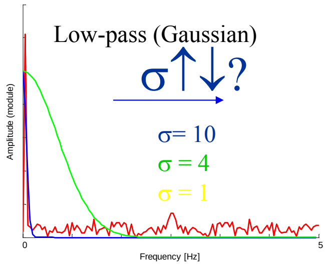


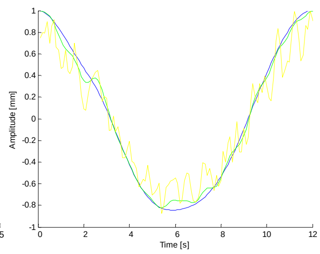
High-pass (passa alto)
Isola le alte frequenze.

A. I filtri ideali non sono implementabili in tempo finito su un segnale non-periodico.

Filtraggio reale passa-basso Gaussiano







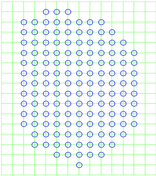
Consideriamo il filtro Gaussiano: $h(x;x_c) = g(x - x_c;\sigma) = e^{-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma^2}}$

La posizione della Gaussiana è definita da x_c, la sua ampiezza da σ.

La sua Trasformata di Fourier è ancora una Gaussiana: $H(w) = e^{-1/4\sigma^2 w^2} e^{-2\pi j v x_c}$

$\left|H(w)\right| = e^{-1/4\sigma^2 w^2}$ A parità di ω, l'ampiezza cresce con il decresce di σ.
σ regola l'ampiezza della banda passante del filtro.

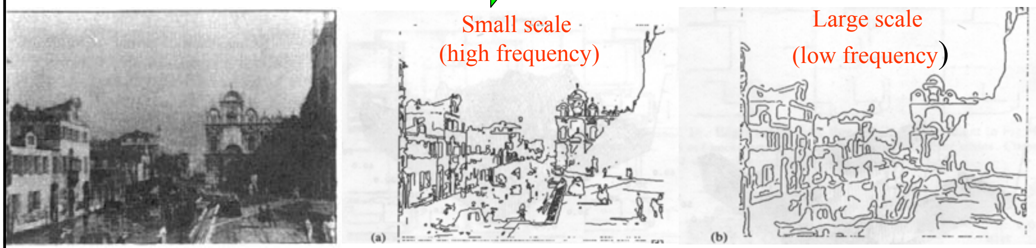
Role of the scale σ

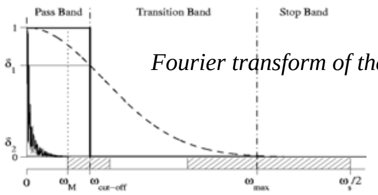


Linear filter
(low-pass)

$$S(P)=\sum_k^M S_k G(P-P_k \mid \sigma)$$

σ – Scale of the filter (bandwidth)





Fourier transform of the Gaussian is a Gaussian: $\Im\left(G(P_k;\sigma)\right)=e^{-\pi^2 w^2 \sigma^2 \nu^2}$

Setting σ, we set the spatial frequency of the reconstruction.

Caratteristiche spaziali o temporali di un filtro

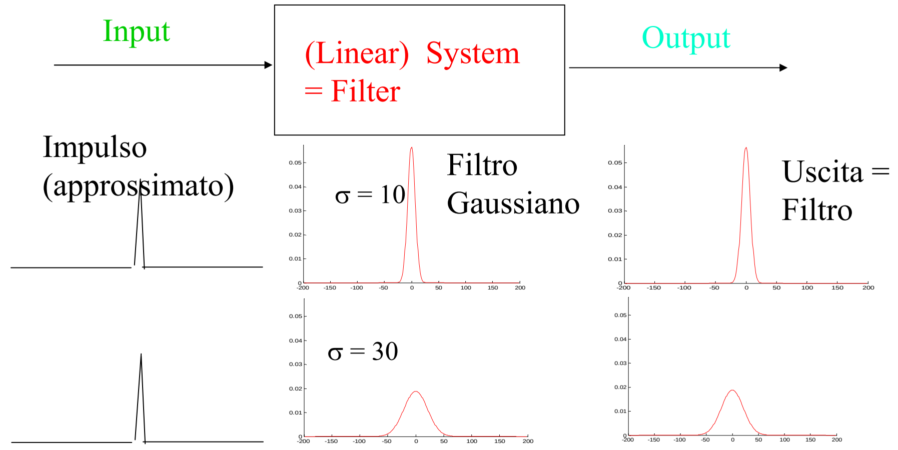
Per analizzare il comportamento di un filtro si utilizzano due particolari input:

Impulso: definito matematicamente come una distribuzione con dominio infinitesimo, codominio infinito ed area finita. Consente di analizzare quanto rapidamente un sistema torna al suo stato iniziale.

Scalino: definito matematicamente come una discontinuita’ del primo ordine. Consente di analizzare quanto rapidamente un sistema segue delle variazioni brusche in ingresso.

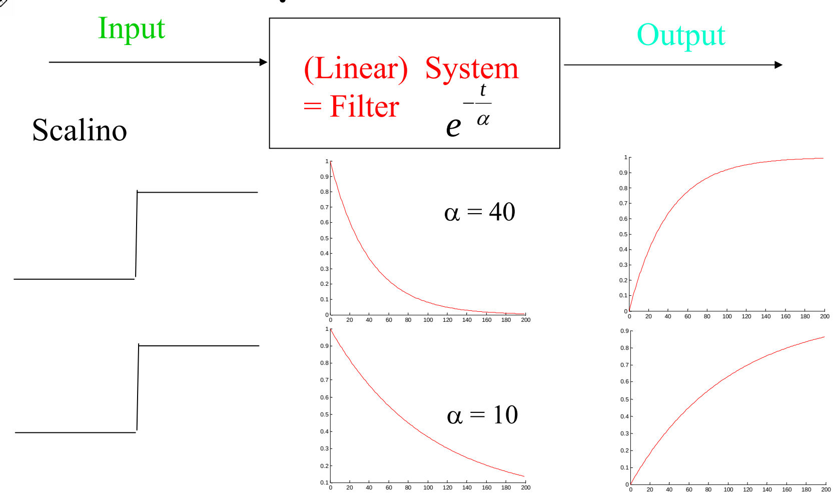
Sinusoide. Analisi armonica.

Risposta all'impulso



L'uscita di un sistema lineare, sollecitato da un impulso, è equivalente al filtro stesso. Maggiore è la capacità filtrante, maggiore è la dispersione nello spazio, e la velocità di ritorno a zero, minore è l'ampiezza della risposta (l'area è la stessa).

Risposta ad uno scalino



L'uscita di un sistema lineare, sollecitato da uno scalino, è tanto più veloce e segue tanto più fedelmente lo scalino, tanto minore è la costante di tempo (1/α). Tanto minore è la costante di tempo, tanto maggiore la banda passante del filtro.

I concetti principali

Ogni sistema che riceve un input e produce un output può essere rappresentato come un filtro.

L'operazione di filtraggio, nei sistemi lineari, si esprime come prodotto di convoluzione nel dominio dello spazio (tempo) e come prodotto nel dominio delle frequenze.

La banda passante di un filtro, determina quali frequenze vengono riprodotte in uscita. Maggiore è la banda passante, maggiore la fedeltà al segnale di partenza e la rapidita' di risposta, ma minore e' la capacita' di filtrare rumore.

Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Trasformata di Fourier discreta e segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

Riflessioni

Qual'è l'effetto di utilizzare una norma p = 1 o p = 2 o p = 10 in uno spazio di Lebegue?

Quali sono i problemi introdotti da segnali che non hanno supporto infinito (immagini)?

Provare ad identificare l'effetto di filtri semplici, definiti a tratti, quali: [0 1 1 0]; [0 1 0].

Trasformata di Fourier del filtro di cui sopra? Quali sinusoidi sono presenti?