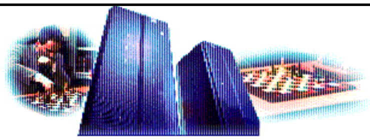
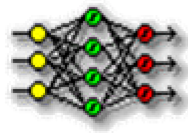




Sistemi Intelligenti
I fuzzy system

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

B. Kosko, Neural Networks and Fuzzy Systems, Prentice Hall.

I Fuzzy set

Nella logica classica A $\cap$ A^c = Ø. A = T (True) $\Leftrightarrow$ A^c = F (False). A = [T, F].

Nella teoria fuzzy, tutto è questione di gradazione.

Dal punto di vista matematico, fuzzy e' equivalente ad una proposizione logica che puo' assumere un numero infinito di valori tra vero e falso.

La funzione verita' generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy o $\mathbf{L_1}$.

La funzione verità fuzzy

La funzione verita' generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy o $\mathbf{L_1}$.

$A \cap A^c \neq \varnothing$ Viene violata la legge di non contraddizione.

$A \cup A^c \neq X$ Viene violata la legge del terzo escluso.

Esempio di Fuzzy set

Costruiamo una montagnetta di granelli di sabbia, S.

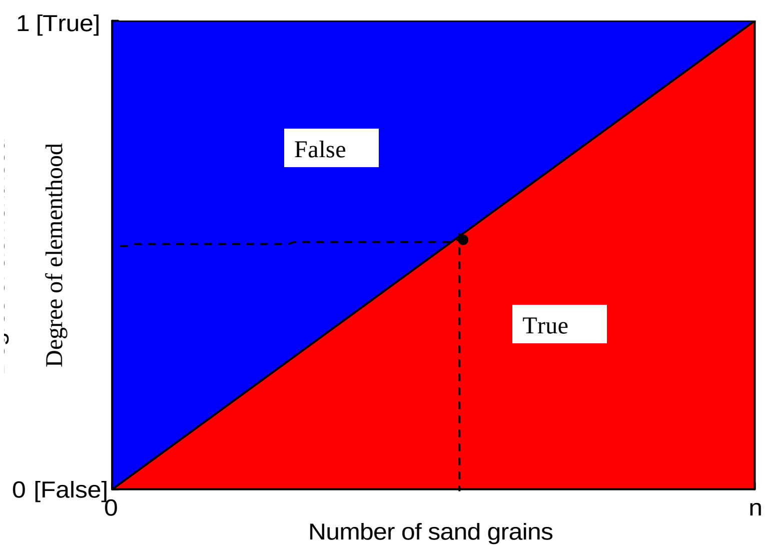
Non esiste un particolare granello per cui S = T diventi S = F.

Supponendo di avere una montagnetta di n granelli di sabbia, possiamo scrivere: $T(S_{n-m}) = 1 - d_{n-m}$. $T(S_n) = 1$ $T(0) = 0$. d esprime un margine di dubbio. (cf. l'esperimento di Moravec: the prosthetic brain).

Vale la relazione $0 \le d_n \le d_{n-1} \le d_{n-2} \le d_{n-3} \le \ldots\ldots \le d_1 \le d_0 \le 1$.

Nulla e' detto ancora sulla forma della funzione che passa da 0 ad 1.

La funzione di appartenenza (membership function)



$S(d_n) = T$
$S(0) = F$

Fuzzyness versus probability

La **fuzzyness** descrive l'ambiguità insita in un evento.
La **probabilità** descrive l'incertezza che l'evento avvenga.

Che un evento accada o meno è una questione di probabilità, in quale misura accada è un questione di fuzzyness.

Esempio: "C'è il 20% di probabilità che domani ci sia pioggia leggera".

Ma anche: "Errori piccoli", "Clienti soddisfatti", "paesi in via di sviluppo", "segnali affetti da rumore",….

Una soluzione potrebbe essere definire meglio i confini degli insiemi. E' possibile? Quale vantaggio se ne trarrebbe?

Fuzzyness versus Probabilità (esempi)

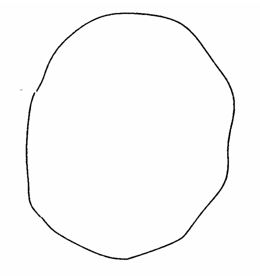
•Propongo un libro ad un editore (che può rispedirlo al mittente o chiederne la revisione, problema di royalities!).

•Apro il frigorifero in cui trovo una mezza mela (bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto).

•Parcheggio la mia automobile (non è previsto che venga parcheggiata a cavallo delle strisce: si rischia la contravvenzione).

Dopo che un evento è avvenuto, la sua probabilità svanisce.

Fuzzy versus probabilità (formalmente)



Ha più senso dire che questo è un ellisse fuzzy o che è proabilmente un ellisse?

Pur essendoci tutti gli elementi dell'evento, l'incertezza rimane. A cosa è dovuta?

Possiamo scrivere che: $m_A(x) = \text{Prob}\{x \in A\}$ true?

Gli operatori logici fuzzy

T(A **AND** B) = ***min***(**T**(A), **T**(B))

T(A **OR** B) = ***max***(**T**(A), **T**(B))

T(**NOT-**A) = 1 – **T**(A)

Lukasiewicz, 1969.

Segue che: **T**(A **AND** A^c) + **T**(A **OR** A^c) = 1 (dimostrare!).

Rapporto con gli operatori della logica classica?

Valgono se vale il principio di mutua esclusione e del terzo escluso.

Esempio sugli operatori logici fuzzy

Oggetto: temporale forte (A), temporale leggero (B).
Classi fuzzy: pioggia pesante, molti fulmini, pioggia leggera, vento forte.

A = (1. .8 0. .5)
B = (.4 .4 .7 .7)

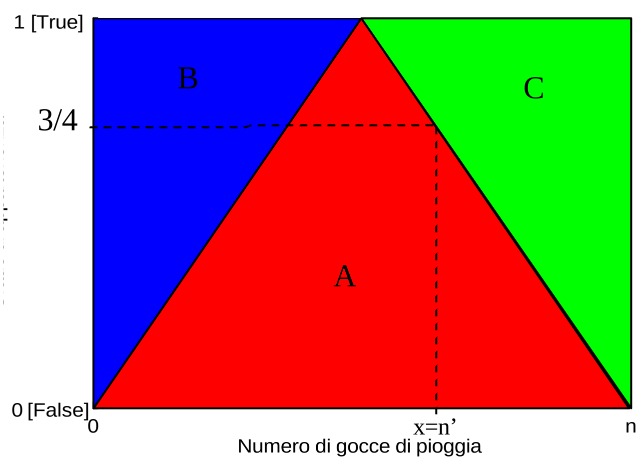
$A \cup B =$ (1. .8 .7 .7)
$A \cap B =$ (.4 .4 0. .5)

Insiemi fuzzy

$A^c =$ (0 .2 1. .5)
$A \cap A^c =$ (0 .2 0. .5)
$A \cup A^c =$ (1 .8 1. .5)

A Ç A^c ¹ Æ
A È A^c ¹ X

Verso l'entropia fuzzy



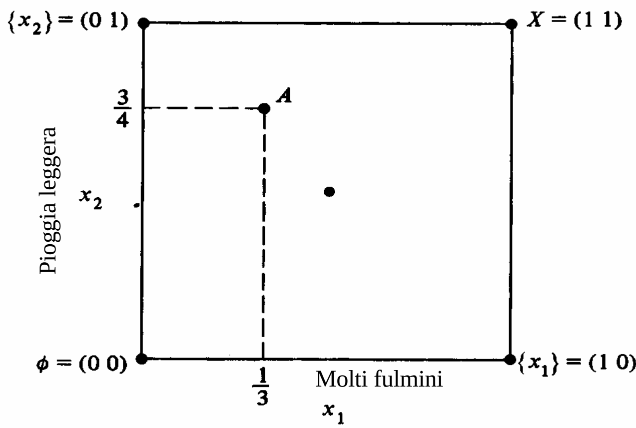
Tre insiemi fuzzy
(e.g. pioggia):

A) Pioggia leggera.
B) Qualche goccia.
C) Pioggia intensa.

Esempio: $m_A(x=n') = 3/4$

Sta piovendo in modo leggero?

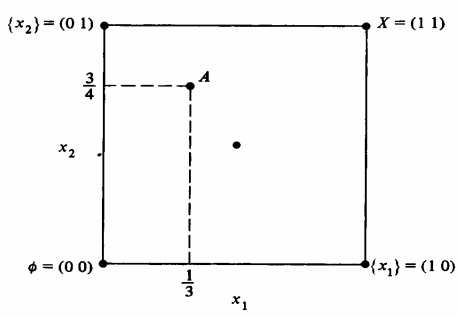
Cosa succede quando si considerano più classi (e.g. Temporale)?



Rappresentazione geometrica di 2 classi fuzzy.

Un certo insieme fuzzy (di fulmini e gocce di pioggia) è un punto in un ipercubo di dimensioni $I_2 = [0,1]x[0,1] = [0,1]^2$, *in generale,* $I_n = [0,1]^n$.

Proprietà dello spazio fuzzy (I)

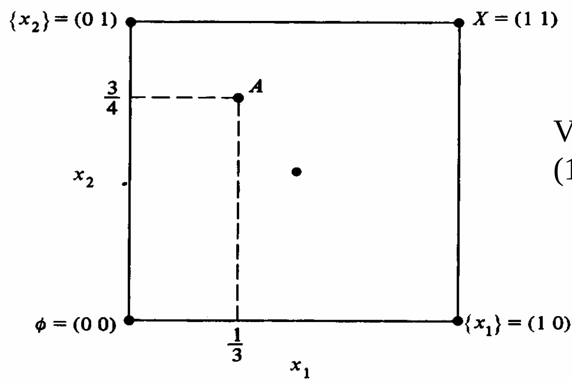


I vertici dell'ipercubo cosa rappresentano?

NF = {Ø, X, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$}.

Questi 4 elementi rappresentano i 4 insiemi non fuzzy dello spazio fuzzy definito dalle 2 classi: pioggia leggera e molti fulmini.

Proprietà dello spazio fuzzy (II)



Valore di **fit** di A = (1/3 3/4).

Dove troviamo la massima fuzzyness?

Al centro: $A \cup A_c = A \cap A_c$

Paradossi associati al centro

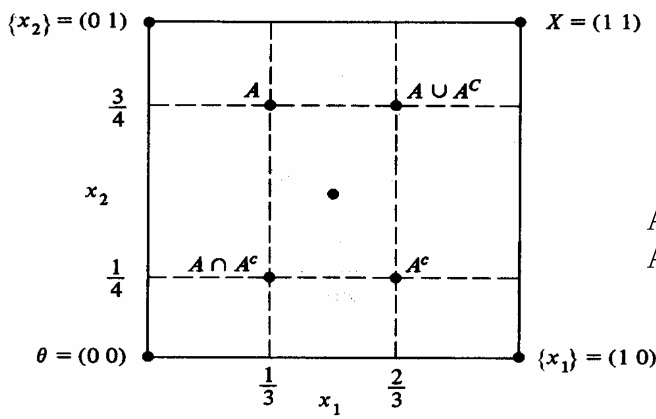
Il bugiardo di Creta che diceva che tutti a Creta erano bugiardi.

Il barbiere di Bertrand Russell. Fuori dal suo negozio era appeso un cartello che diceva: “il barbiere taglia la barba solamente a tutti quelli che non se la tagliano da soli”. Chi taglia la barba al barbiere?

Prendiamo una carta che dice su un lato: “Quello che è riportato sull’altro lato è vero” e sull’altro: “Quello che è riportato sull’altro lato è falso”.

Bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto.

Ipercubo fuzzy interno.

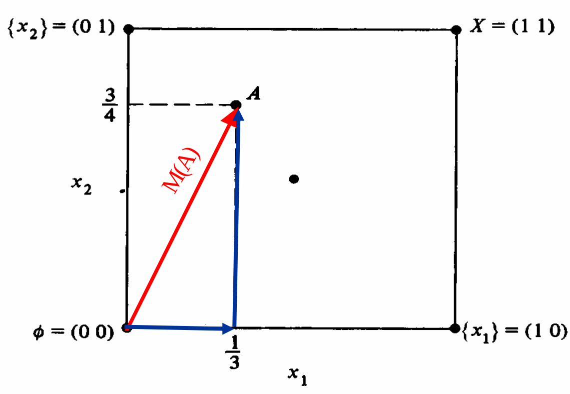


A = (1/3 3/4)
A^c = (2/3 1/4)

$A \cup A^c$ = (2/3 3/4)
$A \cap A^c$ = (1/3 1/4)

•Dipende da A.
•Può degenerare se una proprietà è massimamente fuzzy. Se sono fuzzy sia x_1 che x_2: $A \cup A^c = A \cap A^c = (1/2 \quad 1/2)$.

Ampiezza di un insieme fuzzy



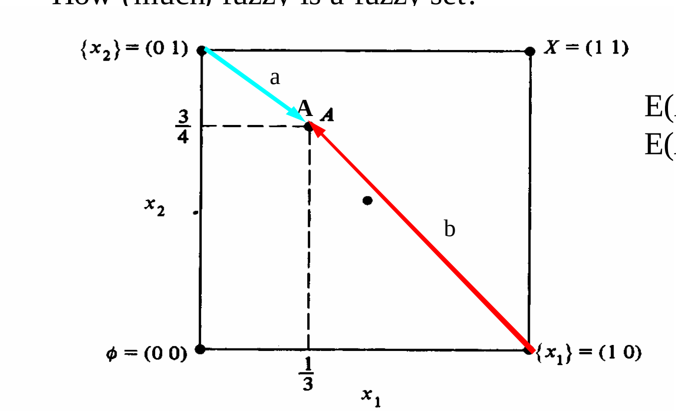
$$M(A) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |m_A(x_i)|^p}$$

Per p = 2 misuriamo la lunghezza del vettore A – O.
Per p = 1 cosa misureremmo in logica classica?

Distanza fuzzy di Hamming ***-> l_1*** M(A) = 1/3+3/4 = 13/12
Distanza euclidea. ***-> l_2*** M(A) = $\sqrt[2]{97/144}$

Entropia fuzzy

How (much) fuzzy is a fuzzy set?

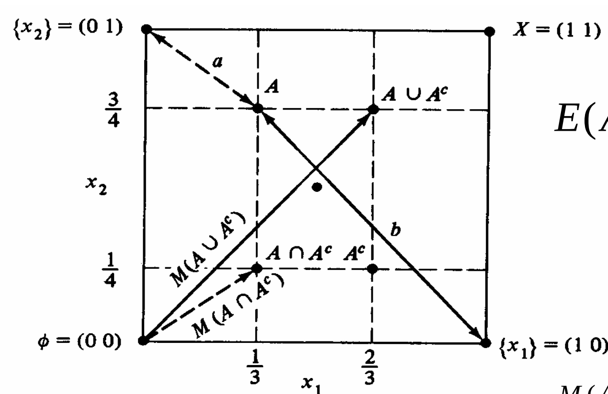


E(A) = 0 nei vertici
E(A) = 1 nel centro

$$E(A) = \frac{a}{b} = \frac{l^1(A, A_{vicino})}{l^1(A, A_{lontano})}$$

$$E(A) = \frac{1/3 + 1/4}{2/3 + 3/4} = 7/17$$

Teorema dell'entropia fuzzy



$$E(A) = \frac{M(A \cap A^c)}{M(A \cup A^c)}$$

$$M(A \cap A^c) + M(A \cup A^c) = 1$$

$$E(A) = \begin{cases} \dfrac{f}{1-f} & f \leq 1/2 \\ \dfrac{1-f}{f} & f \geq 1/2 \end{cases}$$

Formulazione collegata alla misura di entropia probabilistica: log(1/p).

Riassunto

•Fuzzyness descrive l'ambiguità di un evento.

•La funzione di appartenenza descrive il grado di appartenenza di un evento ad un insieme di classi (non mutuamente esclusive).

•La fuzzyness si distingue dalla probabilità che misura la probabilità che un evento, nella sua interezza si verifichi o meno.

•Un oggetto fuzzy si può rappresentare come un punto all'interno di un ipercubo di dimensionalità pari al numero di elementi che caratterizzano l'oggetto.

•E' possibile associare ad un insieme fuzzy una misura di entropia che rappresenta il rapporto tra la misura della violazione della legge di non contraddizione e del terzo escluso.

Breve storia

Max Black (1937). Applico' i principi della logica fuzzy a liste di elementi o simboli. Sviluppo' la prima funzione di appartenenza fuzzy e chiamo' l'incertezza dell'appartenenza **vaghezza** (vagueness).

Lofti Zadeh (1965). "Fuzzy sets" sviluppo' una teoria sulla logica fuzzy e su un motore di inferenza sui fuzzy set.

Dal 1985 ad oggi applicazioni tecnologiche con successo crescente in campi più diversi, dal controllo, alla ricerca nei data base, all'elaborazione delle immagini alla classificazione. Vediamo di capirne i fondamenti del successo.

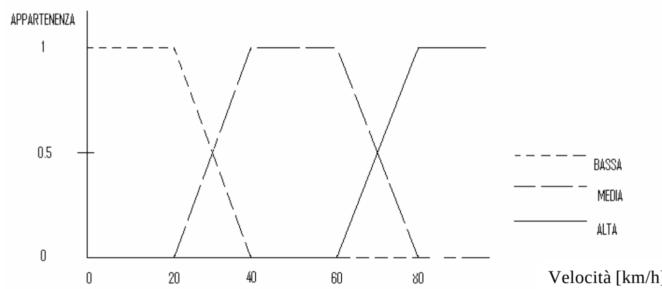
Insiemi fuzzy

Velocità (km/h)	Grado di appartenenza a :(membership)		
	BASSA	MEDIA	ALTA
10	1	0	0
20	1	0	0
30	0.5	0.5	0
40	0	1	0
50	0	1	0
60	0	1	0
70	0	0.5	0.5
80	0	0	1

Differenti idee su cosa sia velocità bassa, media o alta.

In generale le funzioni di membership hanno forma trapezoidale o triangolari.

Sovrapposizione tra le funzioni.



Funzionamento di un sistema fuzzy

Expert system:
•E' basato su regole che rappresentano la conoscenza.
•Funziona mediante un motore inferenziale che lavora sulle regole. Il motore è del tipo: IF ..... THEN ..... ELSE (*reasoning engine*).
•La risposta T / F (modalità del tipo winner-take-all).

Systema fuzzy:
•Vengono utilizzate più regole in parallelo.
•L'uscita di ogni regola (attivata) è considerata con un certo grado di membership o verosimiglianza.
Mappa un ipercubo n-dimensionale in un inpercubo p-dimensionale:
$S : I^n \rightarrow I^p$ ➔ **FAM** (*Fuzzy Associative Memories*).

Fuzzy Associative Memory (FAM)

Una FAM trasforma una spazio di input in uno spazio di output.

1) Spazi continui.
2) Spazi fuzzy.

Matematicamente una FAM opera la seguente trasformazione:

$I^n \rightarrow I^p$ dove n è il numero di classi della variabile fuzzy di ingresso e p è il numero di classi della variabile fuzzy di uscita.

Dato un insieme fuzzy A $\in$ I^n, viene definito un insieme B $\in$ I^p, che gli corrisponde (notazione alternativa (A,B))

E.g. I^n = [Pioggia_pesante, molti_fulmini, pioggia_leggera, veno_forte].
Ip = [Vestiti_pesanti, ombrello_grande, giacca_vento]

Regola singola che associa una condizione di In (punto, elemento di A) ad un elmento di B.
IF .... AND .... AND ... AND .... THEN .....

Fuzzy Associative Memory (FAM)

Una FAM trasforma una spazio di input in uno spazio di output.

1) Spazi continui.
2) Spazi fuzzy.

Matematicamente una FAM opera la seguente trasformazione:

$I^n \rightarrow I^p$ dove n è il numero di classi della variabile fuzzy di ingresso e p è il numero di classi della variabile fuzzy di uscita.

Dato un insieme fuzzy A $\in$ I^n, viene definito un insieme B $\in$ I^p, che gli corrisponde (notazione alternativa (A,B))

E.g. I^n = [Pioggia_pesante, molti_fulmini, pioggia_leggera, veno_forte].
Ip = [Vestiti_pesanti, ombrello_grande, giacca_vento]

Regola singola che associa una condizione di In (punto, elemento di A) ad un elmento di B.
IF .... AND .... OR ... AND .... THEN .....

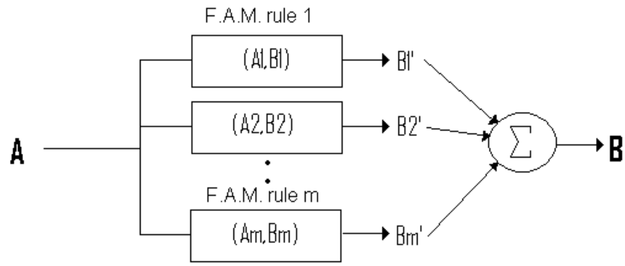
FAM a più regole

Più regole attivate contemporaneamente.
1. IF ... AND ... AND ... AND .... THEN
2. IF ... AND ... OR ... AND .... THEN

.....

Somma pesata delle regole attivate.

Il peso riflette la credibilità della regola.



Esempio di costruzione di una FAM

Controllore di un semaforo.

Ingresso: misura del traffico. 3 classi fuzzy: BASSO, MEDIO, PESANTE.

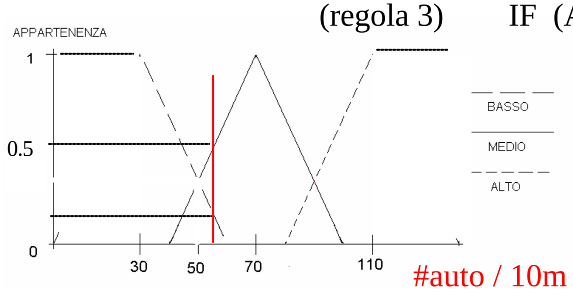
Uscita: durata verde: 2 classi fuzzy: BREVE, LUNGO.

I^3 -> I^2

(regola 1) IF (BASSO) THEN (BREVE)
(regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
(regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)

Utilizzo della FAM

(regola 1) IF (BASSO) THEN (BREVE)
(regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
(regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)



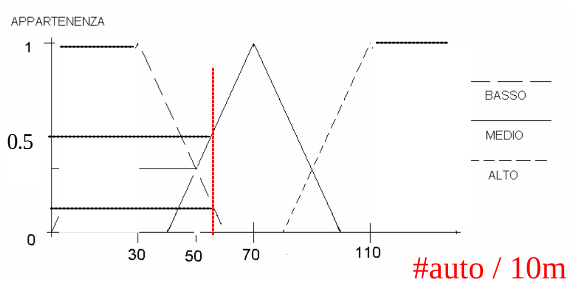
A = (0.2, 0.5, 0)

A = (0.2, 0.5, 0) ➔ Attiva solamente le prime 2 regole.
If (A1) then U1 (0.2) Se è basso allora breve, grado 0.2
If (A2) then U2 (0.5) Se è medio allora lungo, grado 0.5

Fuzzyficazione

Misuriamo la portata del traffico e vogliamo un controllore che generi una lunghezza in secondi.

Necessità di tradurre l'approccio linguistico in numeri.



Fuzzyficazione viene risolta con le funzioni di membership: 55 auto/10min è un traffico *Medio* con grado 0.5 ed un traffico *Basso* con grado 0.2.

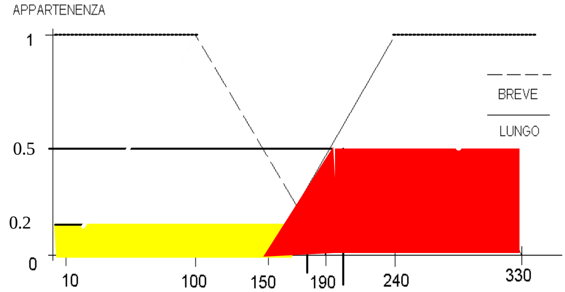
Defuzzyficazione?

Defuzzyficazione mediante il metodo del centroide

Ogni regola viene troncata in base al suo grado di attivazione.
L'uscita troncata di ogni regola viene sommata.

$$Uscita = \frac{\sum F_i * c_i}{\sum F_i}$$

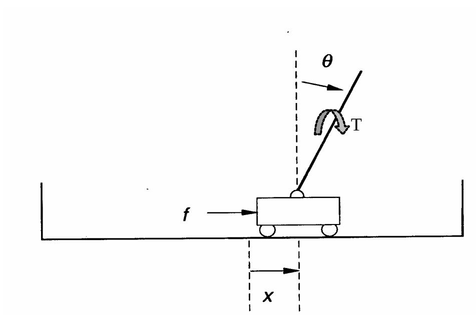
Breve = 100s
Lungo = 200s



Per l'appartenenza alla classe BREVE: 180*0,2+10*0,2/2= 37.
Per l'appartenenza alla classe LUNGA: (330-200)*0,5+50*0,5/2= 77,5.

Il verde del semaforo rimarrà acceso per (37 * 100 + 77,5 * 200)/(77,5+37)s = 167,68s.

Cart-pole



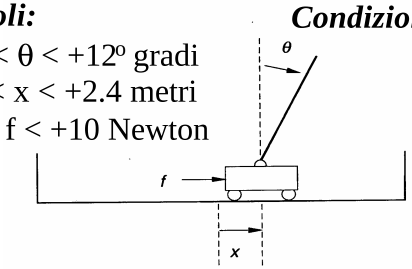
Input: A{θ(t), θ'(t), x(t), x'(t)}

Output: B{f(t), T(t)}

Scopo del sistema di controllo è non fare cadere il bastone e mantenere il carrello sulla rotaia.

Parametri del sistema Cart-pole

Vincoli:
-12° < θ < +12° gradi
-2.4 < x < +2.4 metri
-10 < f < +10 Newton



Condizioni iniziali: θ(0) = θ'(0), x(0), x'(0) = 0

Parametri:

g	9.8m/s
m	1.1kg (massa carrello + palo)
m$\mathbf{m_p}$	0.1kg (massa del palo)
l	0.5m distanza della cerniera dal centro di massa del palo.
D**t**	0.02s (intervallo di campionamento e di controllo).

Equazioni del moto:
θ(t+1) = θ(t) + θ'(t) Δt
x(t+1) = x(t) + x'(t) Δt

$$J'(t+1) = J(t) + \frac{mg\ \sin(J(t)) - \cos(J(t))\left(f(t) + m_p l\,(J'(t)p\ /180)^2 \sin(J(t))\right)}{(4/3)ml - m_p l \cos^2(J(t))}\Delta t$$

$$x'(t+1) = x(t) + \frac{f(t) + m_p l\left((J'(t)p\ /180)^2 \sin(J(t)) - J''(t)p\ /180\ \cos(J(t))\right)}{m}\Delta t$$

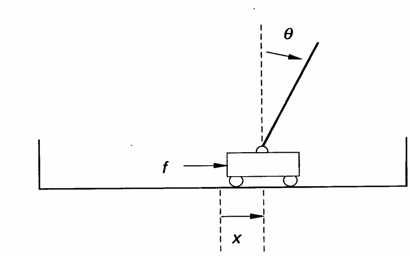
FAM per il cart-pole: definizione

Consideriamo solamente il pendolo inverso semplificato:

1a) ***Identificazione delle variabili del sistema:***
Input: A{θ(t), θ'(t)} Output: B{F(t)}

1b) ***Definizione dei range delle 3 variabili:***

θ(t)	range	[-90 +90]gradi
θ'(t)}	range	(-∞ +∞)gradi/s
F(t)	range	[-10 +10]N



FAM per il cart-pole: classi fuzzy

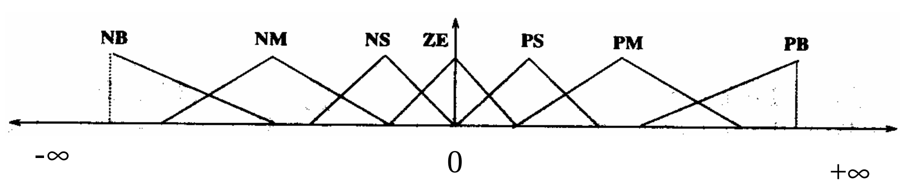
2) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy:
   a) Definizione delle classi fuzzy.
   b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza.

Esempio di classi fuzzy:

NL: Molto negativo
NM: Mediamente negativo
NS: Poco negativo
ZE: Zero
PS: Poco positivo
PM: Mediamente positivo
PL: Molto positivo

FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza

2b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza per ciascuna variabile fuzzy (di input e di output).



Le regioni sono solitamente triangolari o trapezoidali.
Sovrapposizione, empiricamente 25%.

Necessità di tenere conto delle diverse variabili

Esempio:

Il palo sta ruotando velocemente in senso orario AND il carrello sta traslando velocemente verso destra AND il carrello è lontano dal bordo destro della rotaia, la soluzione migliore sarebbe quello di continuare a spingere il carrello verso destra.

Le 4 diverse FAM che associano le variabili di stato alla forza sul carrello darebbero risposte diverse, devono essere combinate in un'unica FAM.

Le FAM non possono perciò lavorare in modo indipendente sulla singola variabile, ma devono tenere conto di tutti gli attributi in ingresso. Ciascuna FAM non può guardare solo ad un orticello

FAM per il cart-pole: costruzione della relazione I/O

La trasformazione della FAM è costituita da 3 variabili: (A_1^{θ}, $A_2^{\theta'}$; B^F).

Una delle possibili ***regole*** della FAM può essere: (NM, ZE; PM).

if <l'orientamento del pendolo è negativa media> ***and***
<la velocità di rotazione è circa nulla>
allora
<il motore dovrà fornire una coppia positiva media>

Possiamo anche scrivere la trasformazione della FAM come:
(θ, θ'; $F = f(\theta, \theta')$). Lo spazio di controllo è in questo caso una superficie in R^3.

FAM per il cart-pole: costruzione grafica della relazione I/O

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

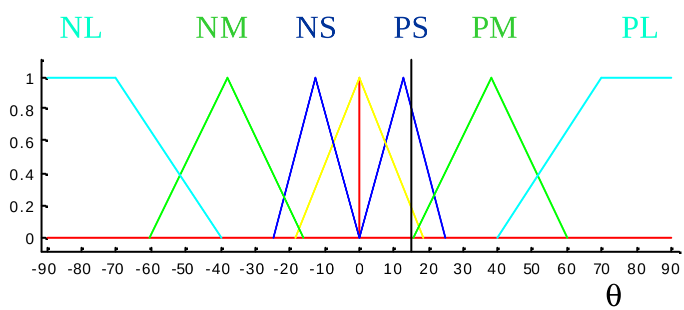
Vengono codificate solamente 15 regole.

La tabella rappresenta una superficie in R^3.

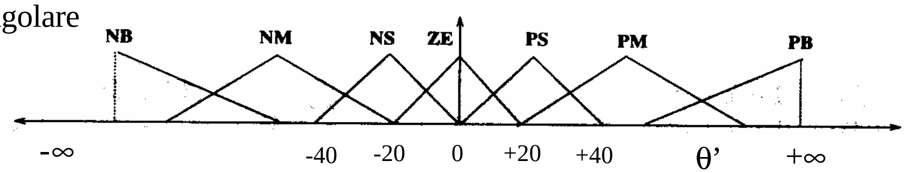
Riduciamo la matematica ad un discorso linguistico intuitivo. Questo è particolarmente interessante quando si vuole trasferire della conoscenza, che di per sé viene espressa in termini linguistici (e non matematica)!

FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza considerate per posizione e velocità

Orientamento

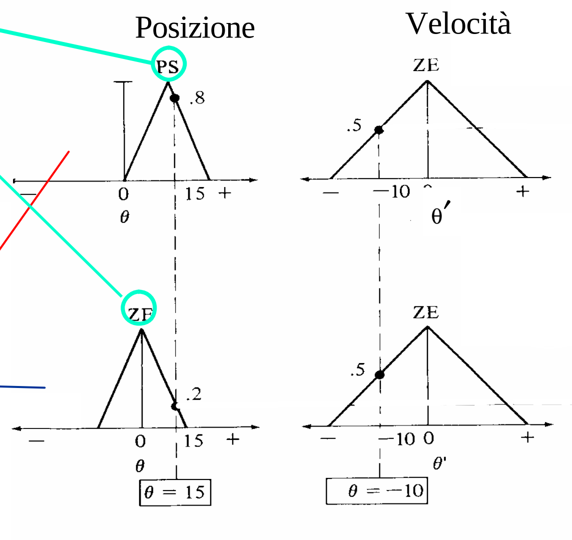


Velocità angolare



FAM per il cart-pole: le classi fuzzy

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			



Input: (θ = 15, θ' = -10)

Classi attivate:

(PS,ZE; NS) (grado 0.5)

(ZE,ZE; ZE) (grado 0.2)

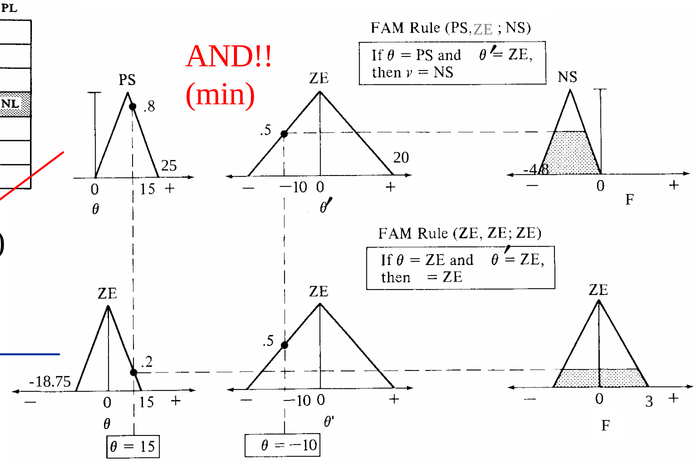
(PS,NS; NS) (grado 0.5)

(ZE,NS; PS) (grado 0.2)

FAM per il cart-pole: funzionamento

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

AND!!
(min)



Input: (θ = 15, θ' = -10)

Classi attivate:

(PS,ZE) (ZE,ZE)

(PS,NS) (ZE,NS)

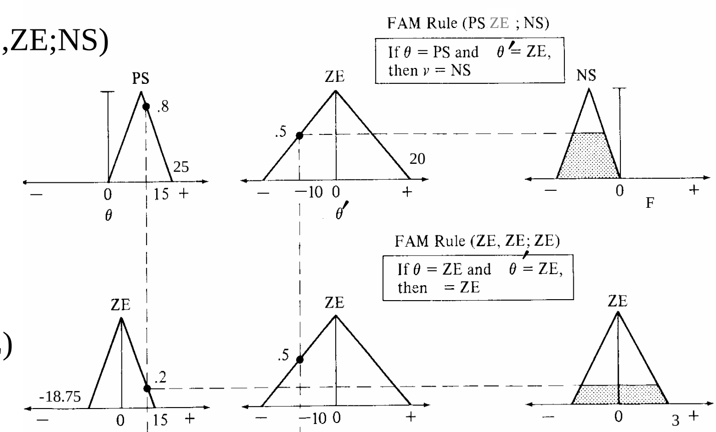
Regole FAM attivate:

(ZE,ZE;ZE) (PS,NS;NS)

(PS,ZE;NS) (ZE,NS;PS)

Pesatura delle regole

(θ, θ’)=(-15, 10) ➔ (PS,ZE;NS)
Grado di appartenenza
di F a NS: 0.5



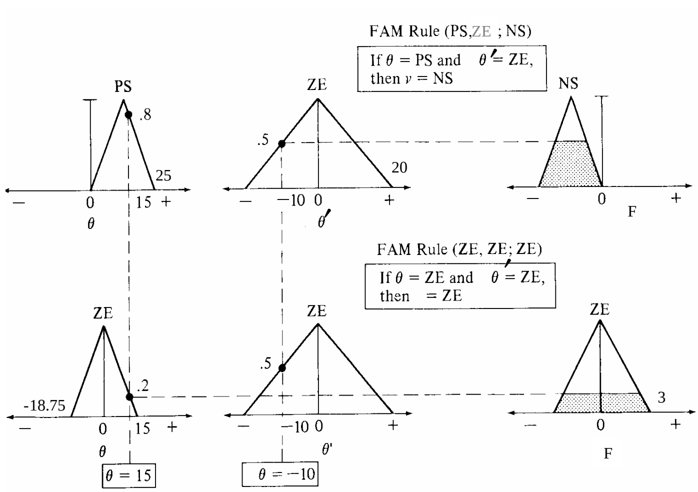
(-15, 10) ➔ (ZE,ZE;ZE)
Grado di appartenenza
di F a ZE: 0.2

$m^{\theta}_{ZE}(15) = 0.2$

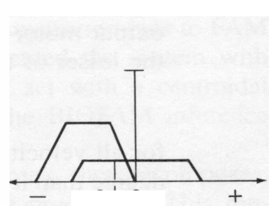
$m^{\theta'}_{ZE}(-10) = 0.5$

Ciascuna regola dà un contributo secondo la logica fuzzy (AND fuzzy = min).

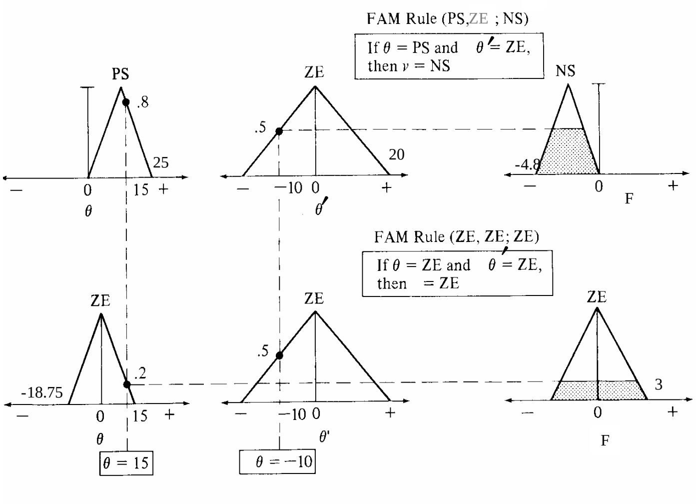
Fuzzy output

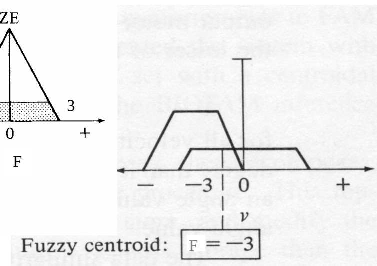


L’insieme fuzzy di uscita sarà un insieme fuzzy esso stesso (peso: area nell’insieme di uscita).



Defuzzyficazione





Per ogni classe j:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{m_B(y_j)\,y_j}{m_B(y_j)}$$

Banco di FAM

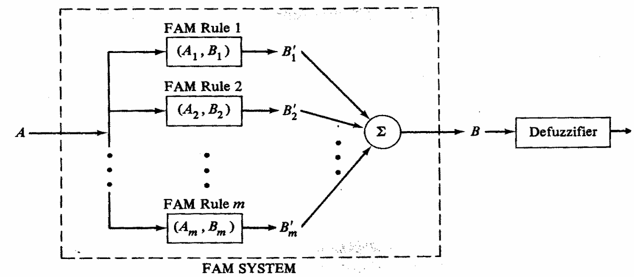
Generalizzazione naturale ai sistemi multi-output.
Ciascuna variabile di uscita è generata da una FAM diversa.

Esempio relativo al cart-pole.
Sia A l'input (stato del sistema, 4 variabili), e B l'output (la forza, ed il momento, 2 variabili), avremo 2 FAM del tipo: (A_i, B_i), dove ciascuna FAM ha 4 variabili di ingresso e 1 di uscita. Ciascuna FAM implementa le sue regole indipendenti.

Queste FAM parziali sono dette ***elementari o minime.***

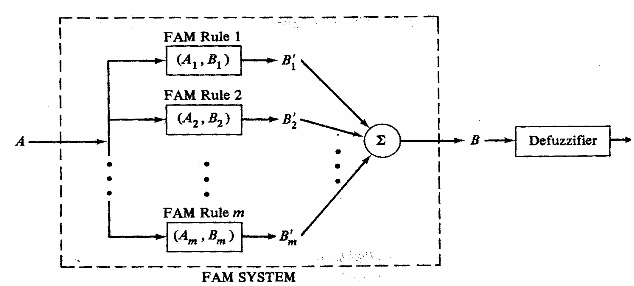
Il numero di FAM cresce velocemente con il numero di variabili in uscita (e così il numero di regole).

Riassunto (I)



1) Identificazione delle variabili del sistema e del loro range (A e B).
2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere.
3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy di input è possibile definire una classe di output (FAM).

Riassunto (II)



4) Identificazione delle regole attivate da un certo insieme fuzzy in ingresso.
5) Valutazione del grado di fit della regola.
6) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti.
7) Calcolo del centroide degli insiemi risultanti (defuzzyficazione).

Problemi dei fuzzy system

- Da dove viene la conoscenza?
- Come si può tradurre la conoscenza in regole?
- Come si possono tarare le membership function?