

L'intelligenza robotica

Controllo del movimento

Alberto Borghese
Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borgnese@dsi.unimi.it



1/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



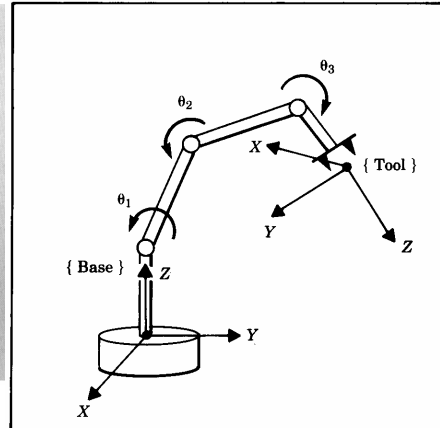
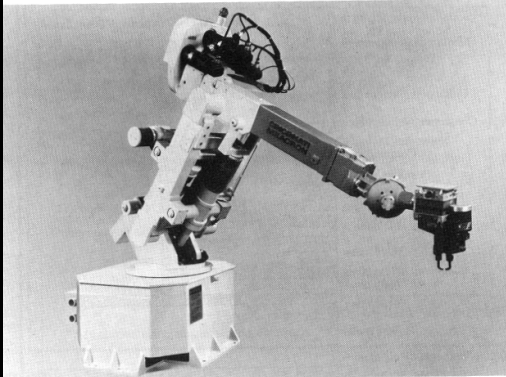
Riassunto



- **Descrizione della posizione di un robot.**
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.
- La cinematica inversa.
- Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.



Descrizione della posizione



Catena cinematica.

Posizione completamente definita dai gradi di libertà (movimenti concessi dai giunti articolari).

Frame. Sistema di riferimento connesso rigidamente con una parte del robot.



Joints and end-effector

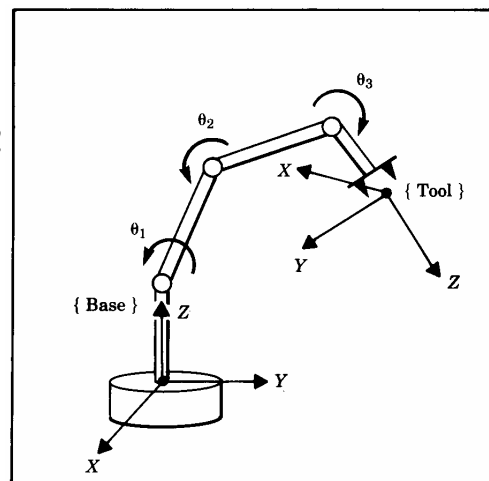


Il braccio è strumentale nel posizionamento ed orientamento dell'end-effector!

Tool frame viene associato all'end-effector.

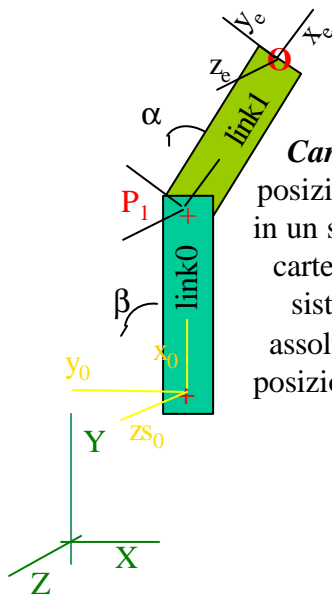
Il base frame (o root) è il sistema di riferimento del robot.

Joint prismatici o rotatori.



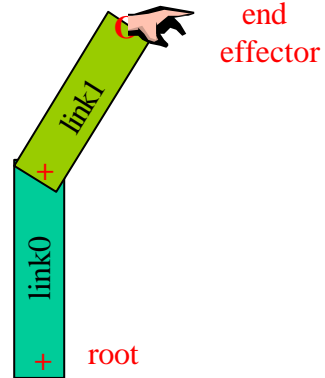


Spazi robotici



Joint space. E' lo spazio dei parametri liberi.
In questo esempio: α e β .

Cartesian space. E' la posizione di punti, cerniere in un sistema di riferimento cartesiano, ad esempio il sistema di riferimento assoluto. In particolare la posizione dell'end-effector.



Descrizione della posizione



- Trasformazione da un frame all'altro.
- La trasformazione è funzione dei parametri liberi e dei parametri geometrici.
- Trasformazioni tra sistemi di riferimento: rototraslazione espressa mediante matrici affini (trasformazioni matriciali).



La rototraslazione in forma matriciale



$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}\mathbf{P} + \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{A}\mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione



Composizione di trasformazioni



- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

$$\mathbf{V}'' = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{V} = \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{V}) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) \mathbf{V}$$
 – la transf. \mathbf{A}_1 viene applicata per prima!
- ricordiamo che il prodotto di rotazioni non è commutativo: $\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$, mentre vale la proprietà associativa: $\mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{V}) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) \mathbf{V}$.
- *Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice.*



Trasformazioni inverse



- Denotiamo le inverse come le matrici affini: T^{-1} , S^{-1} , R^{-1} .
- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.
- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa} \rightarrow R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$



La trasformazione inversa in forma matriciale



$$P' = RP + T \Rightarrow P' = AP \quad \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T R P = +R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P' \quad \text{Proiezione di } T \text{ sugli assi di arrivo: } r_i \cdot T$$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} T_x + r_{21} T_y + r_{31} T_z \\ r_{12} T_x + r_{22} T_y + r_{32} T_z \\ r_{13} T_x + r_{23} T_y + r_{33} T_z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)



Convenzioni

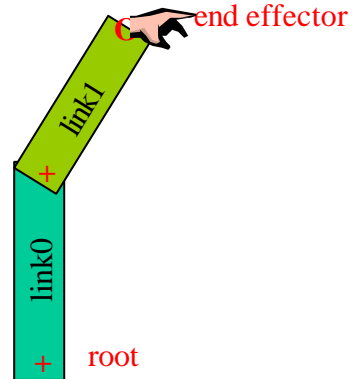


$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^r \mathbf{P} = {}^r \mathbf{A} {}^e \mathbf{P}$

Frame di riferimento
del punto

Trasformazione
del frame e nel
frame r



Riassunto



- Descrizione della posizione di un robot.
- **Dall'end-effector alla base.**
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.
- La cinematica inversa.
- Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.



Posizione dei segmenti (I)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$
 Punto espresso nel frame dell'end-effector.

Trasformiamo ${}^e\mathbf{P}$ fino ad esprimerlo nel sistema di riferimento assoluto XYZ: ${}^a\mathbf{P}$.

end effector

root

link0

link1

Y

X

Z

A.A. 2003-2004

13/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Posizione dei segmenti (II)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P_1}L_1\mathbf{P} = {}^{P_1}L_1\mathbf{A}^e\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$

end effector

root

link0

link1

Y

X

Z

${}^{P_1}L_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A.A. 2003-2004

14/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Posizione dei segmenti (III)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P_1 L_0} \mathbf{P} = {}^{P_1 L_0} \mathbf{A} {}^{P_1 L_1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P_1 L_0} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

end effector

root

A.A. 2003-2004 15/61 http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese



Posizione dei segmenti (IV)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P_0 L_0} \mathbf{P} = {}^{P_0 L_0} \mathbf{A} {}^{P_1 L_0} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P_1 L_0} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P_0 L_0} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

end effector

root

A.A. 2003-2004 16/61 http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese



Posizione dei segmenti (V)



${}^eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P0_ABS}P = {}^{P0_ABS}A \ P0_L0P = \begin{bmatrix} (l_1 \cos a + l_0) \cos b - l_1 \sin a \sin b \\ -(l_1 \cos a + l_0) \sin b - l_1 \sin a \cos b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P0_ABS}A = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) & 0 & 0 \\ -\sin(b) & \cos(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}^{P0_L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

end effector

root

A.A. 2003-2004 17/61 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Posizione dei segmenti (VI)



${}^eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS_ABS}P = {}^{ABS_ABS}A \ P0_ABS P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{ABS_ABS}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}^{P0_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

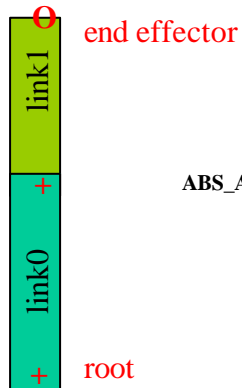
end effector

root

A.A. 2003-2004 18/61 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

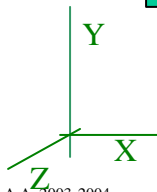


Esempio di calcolo della posizione



$$\alpha = \beta = 0$$

$$\text{ABS_ABS P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + l_0 \cos \mathbf{b} + T_x \\ -l_1 \sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - l_0 \sin \mathbf{b} + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2003-2004

19/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Riassunto



- Descrizione della posizione di un robot.
- Dall'end-effector alla base.
- **Osservazioni sulle matrici di trasformazione.**
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.
- La cinematica inversa.
- Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.

A.A. 2003-2004

20/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_{\text{e}}\mathbf{A}] {}^{\text{e}}\mathbf{P}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{e}}\mathbf{A} = {}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_{\text{e}}\mathbf{A}$$



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

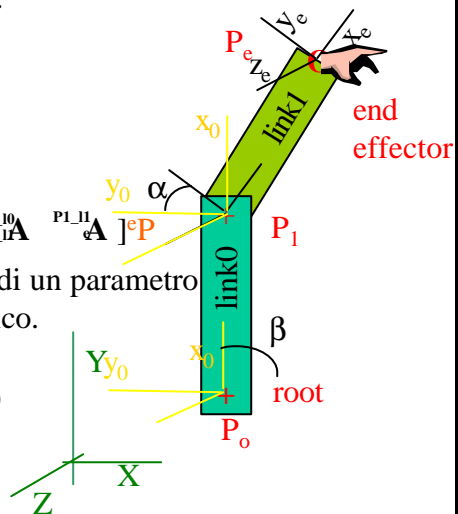
A è funzione di:

- Geometria
- Parametri liberi

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_{\text{e}}\mathbf{A}] {}^{\text{e}}\mathbf{P}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A}(\mathbf{T}) \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A}(b) \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A}(\mathbf{l}_0) \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A}(a) \quad {}^{\text{P1_I1}}_{\text{e}}\mathbf{A}(\mathbf{l}_1)] {}^{\text{e}}\mathbf{P}$$





Quante matrici di trasformazione?



- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.

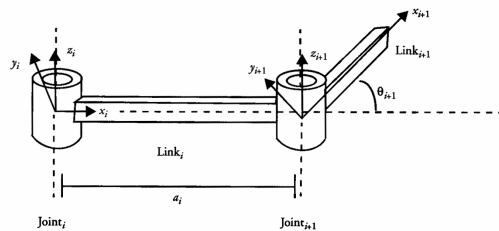


Descrizione di un link



Ipotesi:

- Cerniere 2D.
- L'asse z è orientato come l'asse di rotazione.
- L'asse x è orientato da P_i a P_{i+1} .



Denavit-Hartenberg notation

NB: 1 grado di libertà per joint.

$${}^i_{i+1}A = \begin{bmatrix} \cos(J_{i+1}) & \sin(J_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(J_{i+1}) & \cos(J_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



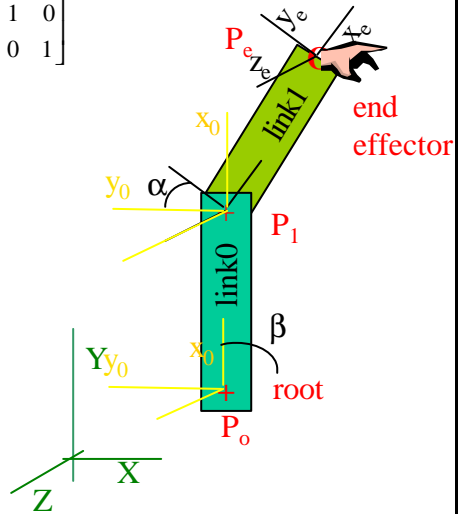
DH notation applicata al nostro esempio



$${}^i A_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos(J_{i+1}) & \sin(J_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(J_{i+1}) & \cos(J_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1_I0} A_e = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 & l_1 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P0_ABS} A_{P1_I0} = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) & 0 & l_0 \\ -\sin(b) & \cos(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DH notation applicata al nostro esempio (II)



$${}^i A_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos(J_{i+1}) & \sin(J_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(J_{i+1}) & \cos(J_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

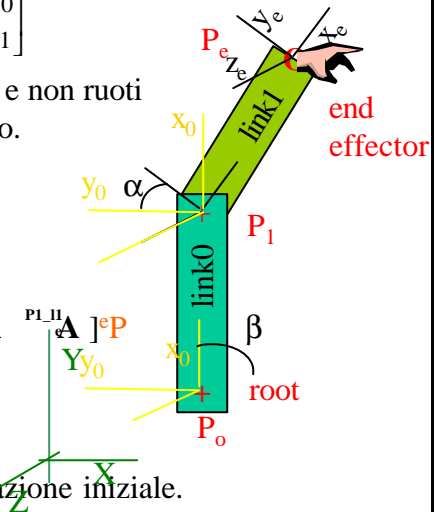
Si suppone che la base del braccio trasli e non ruoti rispetto all'ambiente esterno.

$$A_{P0_ABS}^{ABS_ABS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{ABS_ABS} P = [{}^{ABS_ABS} A_{P0_ABS} \quad {}^{P0_ABS} A_{P1_I0} \quad {}^{P0_I0} A_{P1_I0} \quad {}^{P1_I0} A_e]$$

$${}^{ABS_ABS} P = ({}^{P0_ABS} A_{P0_ABS} \quad {}^{P0_ABS} A_{P1_I0} \quad {}^{P1_I0} A_e) P_e$$

Verificare che risulta la trasformazione iniziale.





Riassunto



- Descrizione della posizione di un robot.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- **Introduzione alla cinematica.**
- La cinematica diretta.
- La cinematica inversa.
- Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.



Generazione del movimento



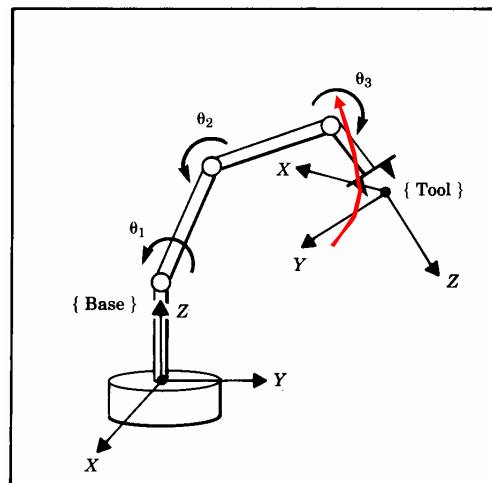
Generazione della traiettoria dell'end-effector o dei joint.

Definizione di un punto di arrivo e di punti di passaggio (via-points).

Definizione di pochi punti ed interpolazione (spline).

Movimento mediante motori che generano coppie (articolari).

Controllo del movimento mediante retro-azione: controllo di posizione o controllo di forza.



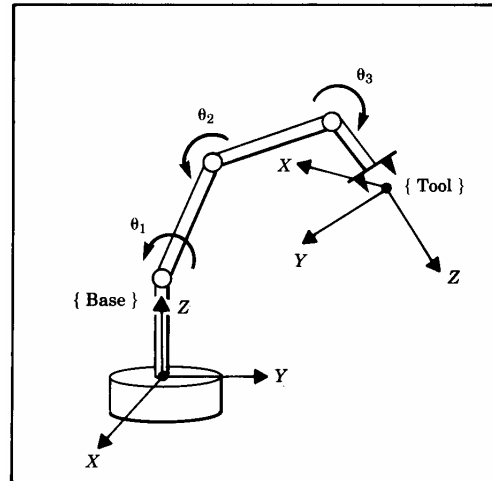


Cinematica diretta e inversa



Conosco il valore dei joint
(angolo o offset) →
posizione ed orientamento
dell'end-point.

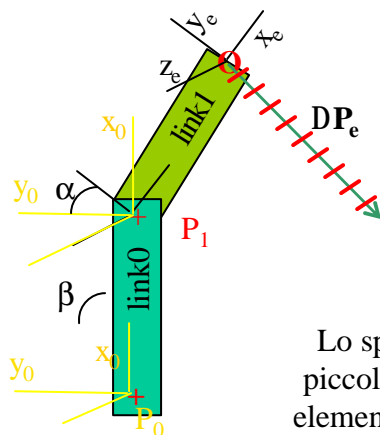
Conosco la posizione e
l'orientamento dell'end-point
→ devo determinare il valore
dei joint.



La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.



Cinematica inversa



Lo spostamento viene suddiviso in tanti
piccoli spostamenti, per ogni spostamento
elementare si calcola la variazione angolare
richiesta per tutti i joint.



Riassunto



- Descrizione della posizione di un robot.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- **La cinematica diretta.**
- La cinematica inversa.
- Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.

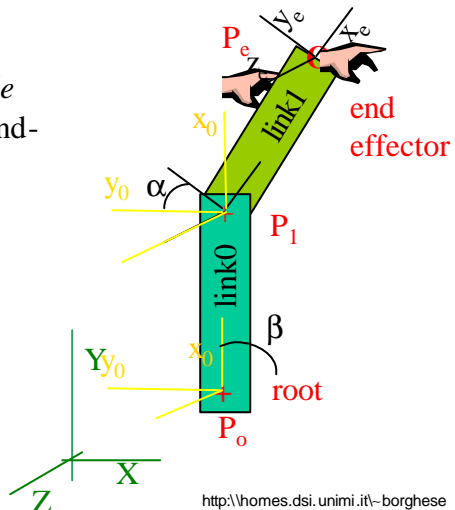


La cinematica diretta



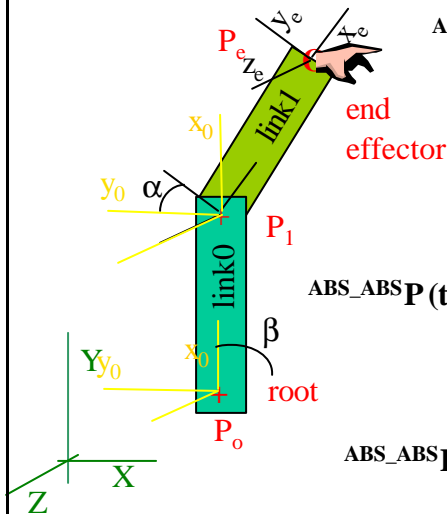
Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dall'end-effector alla base o viceversa.





Descrizione cinematica diretta



$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a + b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a + b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a(t) + b(t)) + l_0 \cos b(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(a(t) + b(t)) - l_0 \sin b(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

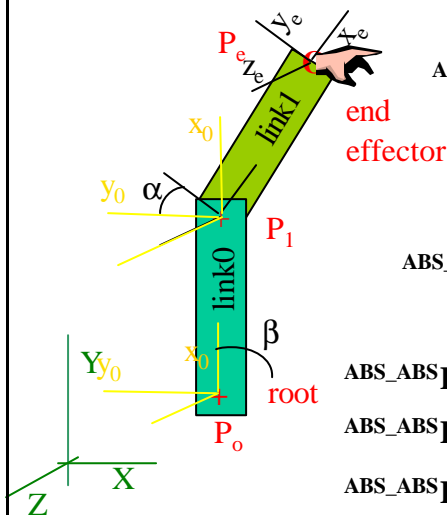
$${}_{ABS_ABS}P(t) = f(a(t), b(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di $[a(t), b(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di ${}_{ABS_ABS}P(t)$.

ghese



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a + b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a + b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \cdot e^P$$

$${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(a(t), b(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(a(t), b(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(a(t), b(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$



Come animare un braccio robotico



Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio robotico.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?



Riassunto



- Descrizione della posizione di un robot.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.
- **La cinematica inversa.**
- Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.



La cinematica inversa



Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.



Soluzione diretta
Soluzione linearizzata

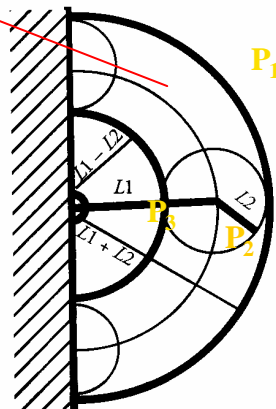
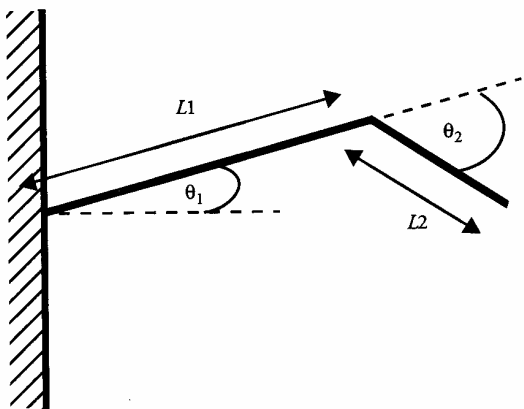
Problema sotto-determinato (over-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?



Soluzione diretta



Working space

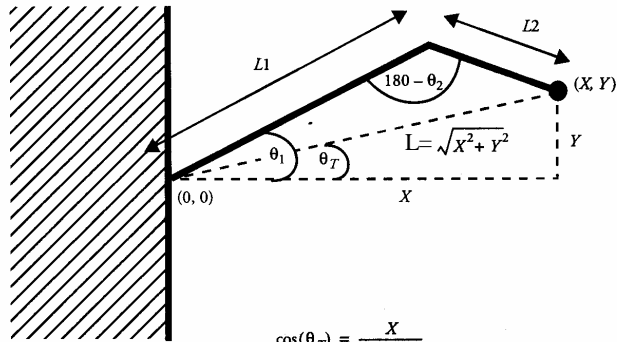


Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \leq L_1 + L_2$

P_1 - nessuna soluzione.
 P_2 - due soluzione.
 P_3 - una soluzione.



Soluzione diretta (calcolo)



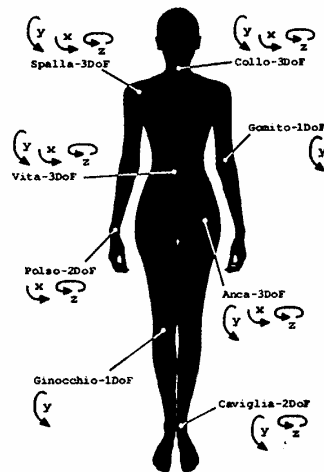
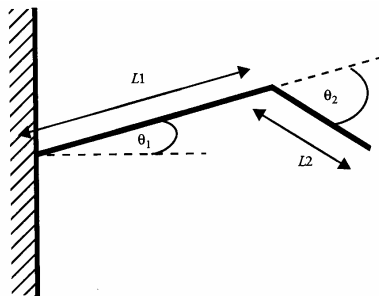
$$\cos(\theta_T) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

E' un problema di trigonometria!

- Calcolo $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare $\cos(\theta_2)$: $\cos(\theta_2) = (L_1^2 + L_2^2 - L^2) / (2L_1L_2)$
- Calcolo di $\cos(\theta_T)$: $\cos(\theta_T) = X / \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare $\cos(\theta_1)$: $\cos(\theta_1) = (L_1^2 + L^2 - L_2^2) / (2L_1L)$



Cerniere 3D



∞^1 soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.



Caratteristiche della cinematica inversa



- Soluzione di equazioni non-lineari.
- Workspace (spazio nel quale si può posizionare l'end-effector).
- Dexterous workspace. Spazio nel quale si può posizionare l'end-effector con un qualsiasi orientamento.
- C.N. Per potere raggiungere una certa posizione ed orientamento nello spazio di lavoro, è che il numero di gradi di libertà dei segmenti del braccio robotico sia uguale al numero di gradi di libertà dell'end-point.
- Soluzione geometrica od analitica complessa da determinare.



Riassunto



- Descrizione della posizione di un robot.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.
- La cinematica inversa.
- **Cinematica inversa attraverso il Jacobiano.**



Soluzione differenziale



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

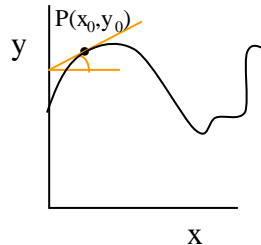
E' una forma complessa a cui non si possono applicare trasformazioni lineari. Cosa si può fare?

Linearizzare!

$$y_0 = f(x_0)$$

$$dy = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_0} dx^2 + \dots$$

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \Delta x$$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione



Linearizzazione della funzione posizione



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$${}^{ABS_ABS} \mathbf{P}_e(t) = A(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$${}^{ABS_ABS} \mathbf{A}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)) + l_0 \cos \mathbf{b}(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)) - l_0 \sin \mathbf{b}(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Il Jacobiano



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$$P(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

J

Consideriamo $Z_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k .

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \mathbf{a}} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{z_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \mathbf{a}} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{z_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \mathbf{a}} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{z_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{z_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_k \\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_k \\ \mathbf{g} - T_{xk} \\ \mathbf{d} - T_{yk} \\ \dots \end{bmatrix}$$



Come vengono trattate le velocità



Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

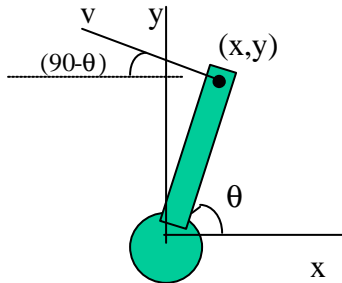
$$\mathbf{V} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{T}}$$

Cinematica dell'
End-effector

Cinematica dei
Joint



Esempio di determinazione del Jacobiano



$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{w} \mathbf{r} \quad \text{Sono due espressioni identiche} \quad \mathbf{V} = \mathbf{J} \dot{\theta}$$

$$\mathbf{V}_{2 \times 1} \quad \mathbf{J}_{2 \times 1} \quad \dot{\theta}_{1 \times 1}$$



Osservazioni sul Jacobiano



$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \dots \\ \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \dots \\ \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{z}_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_k \\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_k \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t}) = \mathbf{J}(\mathbf{Z}(\mathbf{t}), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{Z}(\mathbf{t})$$

Consideriamo $\mathbf{Z}(\mathbf{t}) = [A(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}))]$ il valore dei parametri liberi.

E' un'equazione (matriciale) lineare $\Delta \mathbf{Z}(\mathbf{t}) \rightarrow \Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t})$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta.



Jacobiano e velocità



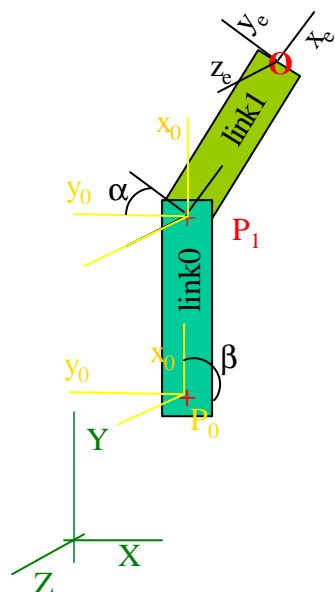
$$dP_e(t) = J(Z(t), L) dZ(t) \rightarrow dP_e(t) / dt = J(Z(t), L) dZ(t) / dt$$

Consideriamo $Z(t) = [A(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t))]$ il valore dei parametri liberi.

$$V_{P_e}(t) = J(Z(t), L) V_Z(t)$$

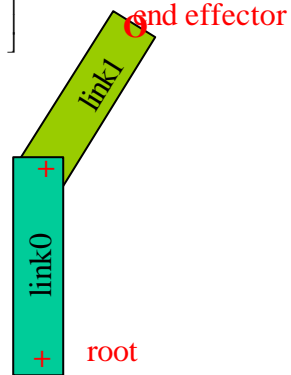


Cinematica diretta



$${}^{P0_ABS}P = {}^{ABS_ABS}_e A {}^{P0_L0}P =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1 \cos a + l_0) \cos b - l_1 \sin a \sin b + T_x \\ -(l_1 \cos a + l_0) \sin b - l_1 \sin a \cos b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





Il Jacobiano dell'esempio



$${}^{ABS_ABS}{}_{\epsilon}A = \begin{bmatrix} (l_1 \cos a + l_0) \cos b - l_1 \sin a \sin b + T_x \\ -(l_1 \cos a + l_0) \sin b - l_1 \sin a \cos b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin a \cos b - l_1 \cos a \sin b & -l_1 \cos a \sin b - l_1 \sin a \cos b - l_0 \sin b & 1 & 0 \\ +l_1 \sin a \sin b - l_1 \cos a \cos b & -l_1 \cos a \cos b + l_1 \sin a \sin b - l_0 \cos b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(a+b) & -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(a+b) & -l_1 \cos(a+b) - l_0 \cos b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Significato geometrico del Jacobiano



$$J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(a+b) & -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(a+b) & -l_1 \cos(a+b) - l_0 \cos b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

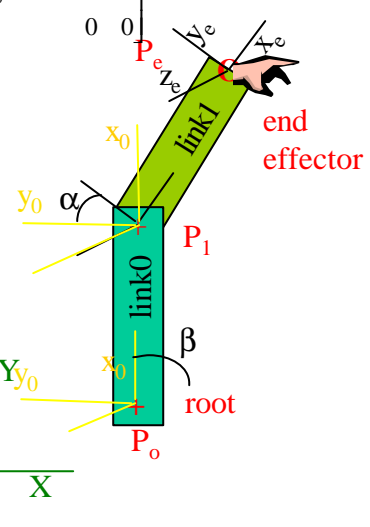
$$\alpha = \beta = 0$$

$$J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{P_e}(t) = J(\mathbf{Z}(t), \mathbf{L}) V_Z(t)$$

$$\alpha = \beta = 0$$

$$P_x - P_{x_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - 0 \\ b - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$





Cinematica inversa con Jacobiano



$$dP_e = J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} \rightarrow dP_e / dt = J(\mathbf{Z}(t), \mathbf{L}) d\mathbf{Z} / dt$$

Consideriamo $\mathbf{Z}(t) = [A(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t))]$ il valore dei parametri liberi.

$$d\mathbf{Z} = J^{-1}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) dP_e$$

E' un sistema lineare: esiste 1, nessuna o ∞ soluzioni.

Sia n il numero di gradi di libert  di dell'end-point (3).

Sia m il numero di parametri liberi del braccio (4).



I sistemi lineari (m = n)



$$dP_e = J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = l_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = l_2$$

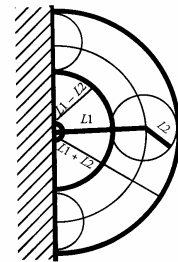
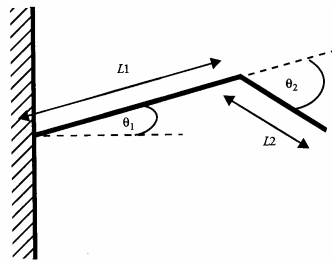
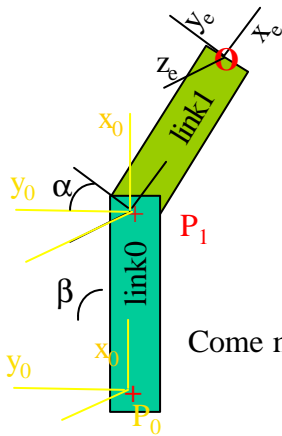
.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = l_m$$

Se $n = m$ $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}$ Esiste 1 soluzione se e solo se: $\det(\mathbf{A}) \neq 0$



Sistema lineare non sovradeterminato



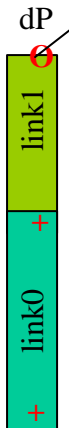
Come mai ottengo un'unica soluzione tramite Jacobiano?

$J(\mathbf{Z}, \mathbf{L})$

$$\begin{bmatrix} dP_{ex} \\ dP_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) & -l_2 \sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - l_1 \sin \mathbf{b} \\ -l_2 \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) & -l_2 \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - l_1 \cos \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{a} \\ d\mathbf{b} \end{bmatrix}$$



Risolubilità



end effector

root

Esistono dei valori di α e β per cui il sistema non è risolubile per alcuni valori di dP .

$J(\mathbf{Z}, \mathbf{L})$ per $\alpha = 0$

$$\begin{bmatrix} -l_2 \sin \mathbf{b} & -l_2 \sin \mathbf{b} - l_1 \sin \mathbf{b} \\ -l_2 \cos \mathbf{b} & -l_2 \cos \mathbf{b} - l_1 \cos \mathbf{b} \end{bmatrix} \det(J(\mathbf{Z}, \mathbf{L})) = 0$$

Non esiste una soluzione che mi dia uno spostamento in direzione dP .

E' possibile spostarsi solamente in direzione tangenziale.
Verificare con la svd.

NB Il valore del Jacobiano è istantaneo.



Soluzione dei sistemi lineari ($m < n$)



$$\mathbf{AX} = \mathbf{L} \quad m < n \quad \text{Sistema sotto-parametrizzato.}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$$

Equazioni normali

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$$

$$\mathbf{dq} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{dP}_e$$

\mathbf{dq} è tale per cui $\|\mathbf{dP}_e - \mathbf{J} \mathbf{dq}\|$ è minima.

$$\mathbf{dq} = \mathbf{J}^+ \mathbf{dP}_e$$

\mathbf{J}^+ è la pseudo-inversa.

Genero il movimento migliore tra quelli che posso generare.



Soluzione dei sistemi lineari ($m > n$)



$$\mathbf{AX} = \mathbf{L} \quad m > n \quad \text{Sistema sovra-parametrizzato.}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$$

Equazioni normali

$$\text{Det}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0 \quad [\mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = [\mathbf{V}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}^T]$$

$$\mathbf{dq} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{dP}_e = \mathbf{J}^+ \mathbf{dP}_e$$

\mathbf{dq} ha norma minima tra tutte le possibili soluzioni



Riassunto



La cinematica inversa consente di determinare la traiettoria dei joint, data la traiettoria desiderata dell'end-point.

La soluzione geometrica o analitica è possibile per scheletri molto semplici.

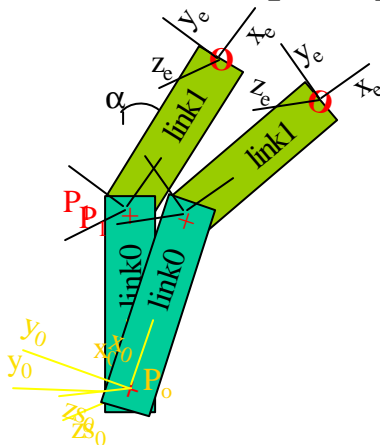
Per scheletri complessi si utilizza una soluzione linearizzata basata sul Jacobiano. Calcolo della pseudo-inversa.

Possibilità di polarizzare i joint o il peso dei gradi di libertà.

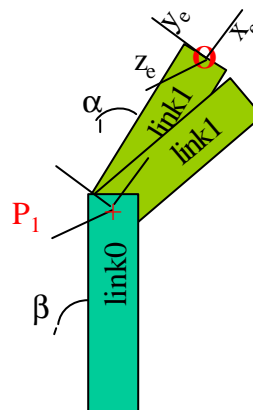
Sperimentare la soluzione analitica per un problema di path-planning con i diversi vincoli possibili.



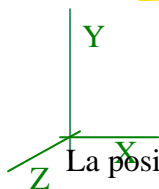
Joint space (peso dei joint)



Rotazione attorno a P_0 (angolo β)



Rotazione attorno a P_1 (angolo α)



La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.



Pianificazione cinematica



- Problema di controllo ottimo.

$$\mathit{Min}_{\{Z(t)\}} \left\{ \left[P_f(t) - P_{fd}(t) \right]^2 + \mathbf{I} \sum_{i=0}^T k_i * Z_i^2(t) \right\}$$

Scelta della sequenza di controllo $\{Z(t)\}$, tale che:

- Minimizza la deviazione tra posizione desiderata e reale dell'end point: $\left[P_f(t) - P_{fd}(t) \right]^2$
- Minimizza la spesa energetica: $\{Z_i^2(t)\}$

λ pesa l'importanza dei due obbiettivi.

k pesa l'energia associata all'attivazione di ogni grado di libertà.

E' un problema di ottimizzazione non lineare (cf. Reinforcement learning)