

# L'intelligenza visiva

## Structure from Motion

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano

Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)

Dipartimento di Scienze dell'Informazione

[borgnese@dsi.unimi.it](mailto:borgnese@dsi.unimi.it)



1/61



<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Riassunto



- **Structure from Motion e prospettiva biologica.**
- Moto traslatorio lungo un asse
- Moto traslatorio generico
- Rototraslazione
- Applicazioni



## Structure from Motion



- Calcolo dell'optical flow o estrazione delle features.
- Calcolo del campo di moto o determinazione delle corrispondenze.
- Ricostruzione 3D.
- Segmentazione (movimenti diversi).
- Analisi: Riconoscimento, classificazione (high level processing).

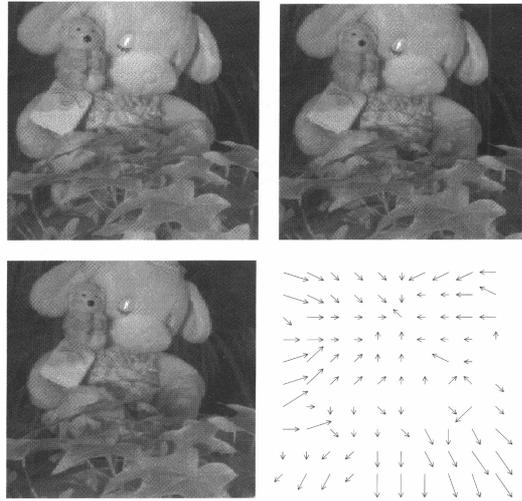


Figure 8.3 Three frames from a long image sequence (left to right and top to bottom) and the optical flow computed from the sequence, showing that the plant in the foreground is moving towards the camera, and the soft toys away from it.



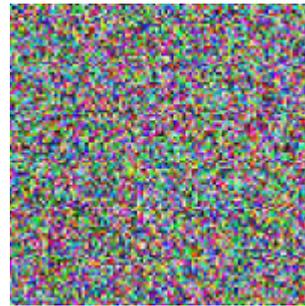
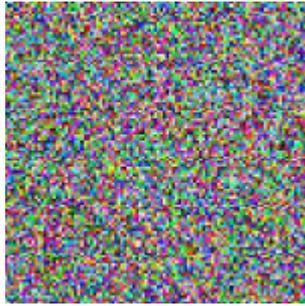
## Ricostruzione 3D da immagini monocolori



- Viene ripresa una sequenza temporale di immagini della scena.
- Obiettivo: ricostruzione del movimento relativo della camera rispetto alla scena e ricostruzione 3D della scena.
- Analogia con la stereoscopia:
  - Problema della corrispondenza.
  - Problema della ricostruzione.
- Differenze con la stereoscopia:
  - Spostamenti piccoli (stima del moto efficiente per calcolo corrispondenze).
  - Problema mal-posto:
    - Errori nella ricostruzione (base-line piccola).
    - Movimenti diversi per oggetti diversi.



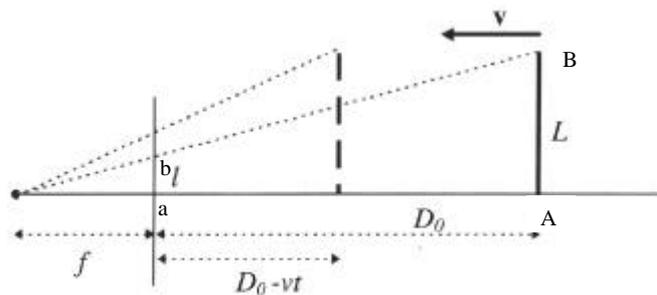
## Random dots



- Il nostro sistema visivo è in grado di operare la ricostruzione 3D anche senza informazione semantica a-priori.
- Variazione di luminosità congruenti con campo di moto solo per il quadrato.



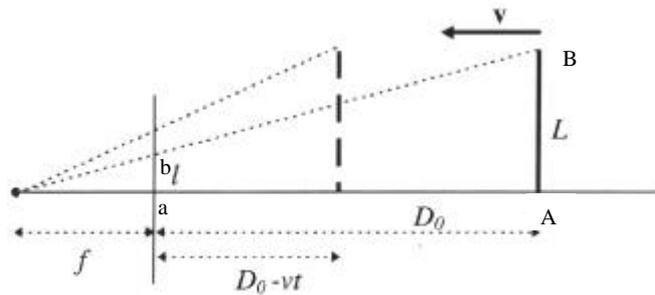
## Time-to-contact



- L distanza tra due features (due spot luminosi sulla superficie dell'oceano), non nota.
- V velocità di discesa, non nota.
- f distanza focale, distanza tra centro del cristallino e retina, nota.
- l immagine del segmento che unisce A e B sulla retina, quantità misurata.



## Computation of time-to-contact



Dall'equazione di moto rettilineo:  $D(t) = D_0 - Vt$ .

Dalla trasformazione prospettica:  $l(t) = \frac{Lf}{D(t)}$

$$l'(t) = L \frac{f}{D^2(t)} D'(t) = L \frac{f}{D^2(t)} V(t) .$$

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = L \frac{f}{D^2(t)} V(t) / \frac{Lf}{D(t)} = \frac{V(t)}{D(t)} = \tau \quad \text{Time-to-contact.}$$

A.A. 2003-2004

7/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Riassunto



- Structure from Motion e prospettiva biologica
- **Moto traslatorio lungo un asse**
- Moto traslatorio generico
- Rototraslazione
- Applicazioni

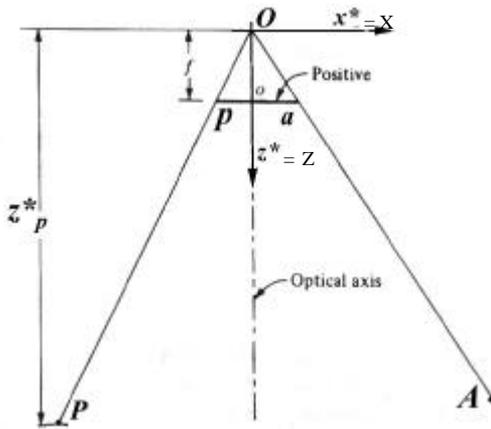
A.A. 2003-2004

8/61

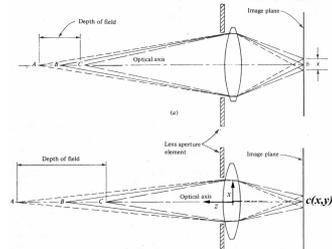
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



# Prospettiva semplice



$$\mathbf{p} = f \frac{\mathbf{P}}{z_p^*}$$

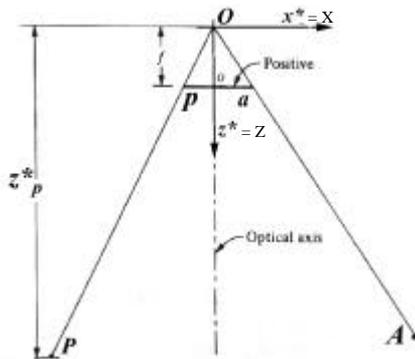


- Supponiamo  $x_o = y_o = 0$ .
- Focale,  $f$ , nota.

Equazioni di collinearità per sistemi di riferimento esterni e di camera paralleli.



# Movimento 3D -> Movimento 2D



$$\mathbf{p} = f \frac{\mathbf{P}}{Z} = \left[ f \frac{X}{Z}; f \frac{Y}{Z}; f \frac{Z}{Z} \right]$$

$$\dot{\mathbf{p}} = f \frac{\dot{\mathbf{P}}}{Z} - f \frac{\mathbf{P}\dot{Z}}{Z^2}$$

$$\mathbf{v}_p = f \left( \frac{\mathbf{V}_P}{Z} - \frac{\mathbf{P}V_Z}{Z^2} \right) =$$

$$\left[ f \frac{V_x}{Z} - \frac{XV_z}{Z^2}; f \frac{V_y}{Z} - \frac{YV_z}{Z^2}; f \frac{V_z}{Z} - \frac{ZV_z}{Z^2} \right]$$

Dipende da:

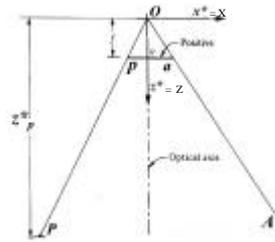
- Velocità dell'oggetto,
- Distanza dell'oggetto,
- Velocità di avvicinamento.



## Campo di moto traslatorio



$$\mathbf{v}_P = f \left( \frac{\mathbf{V}_P}{Z} - \frac{P \mathbf{V}_Z}{Z^2} \right)$$



*Sviluppando:*

- $$v_x = \frac{V_X f - (fX/Z)V_Z}{Z} = \frac{V_X f - xV_Z}{Z}$$

- $$v_y = \frac{V_Y f - (fY/Z)V_Z}{Z} = \frac{V_Y f - yV_Z}{Z}$$

$$(v_z = 0)$$

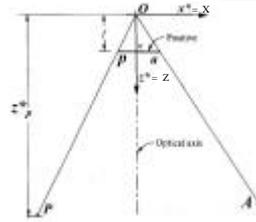




# Moto traslatorio lungo l'asse ottico ( $V_x=V_y=0$ )



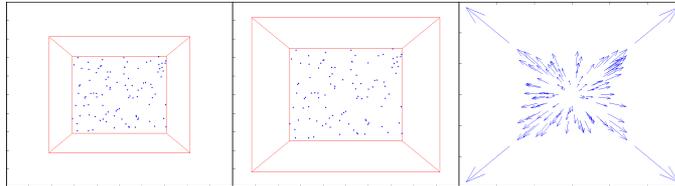
- $$v_x = \frac{V_X f - (fX/Z)V_Z}{Z} = \frac{V_X f - xV_Z}{Z}$$
- $$v_y = \frac{V_Y f - (fY/Z)V_Z}{Z} = \frac{V_Y f - yV_Z}{Z}$$



Traslazione in direzione parallela all'asse Z ( $V_x = V_y = 0$ ;  $V_z \neq 0$ ):

$$v_x = \frac{-xV_Z}{Z}$$

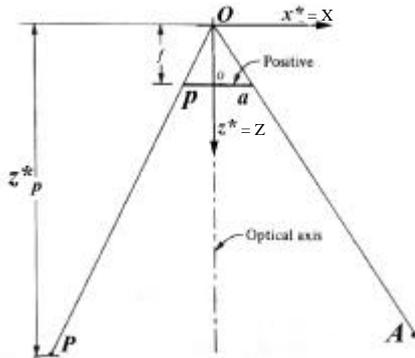
$$v_y = \frac{-yV_Z}{Z}$$



$p_c$ : fuoco di espansione.



# Structure from Motion: moto // asse

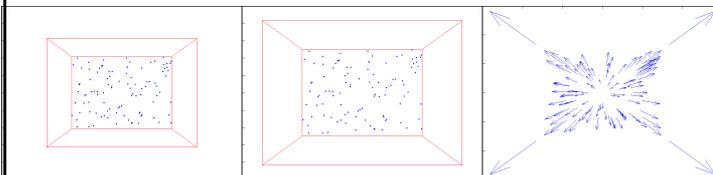


$$v_x = \frac{-xV_Z}{Z}$$

$$v_y = \frac{-yV_Z}{Z}$$

Quali sono le incognite?

$V_Z$ , moto (traslatorio);  
(X,Y,Z), struttura.





## Calcoliamo Structure from Motion

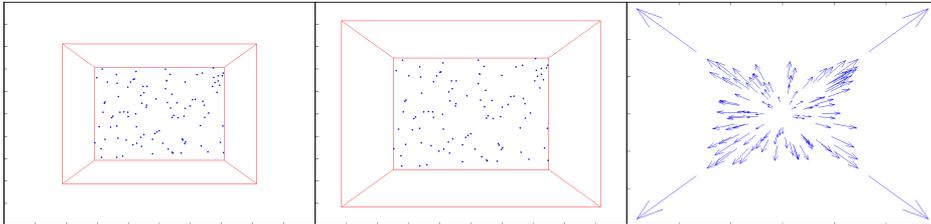


Invertiamo le equazioni del flusso ottico.

$$v_x = \frac{-xV_Z}{Z} \Rightarrow \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x}$$

$$v_y = \frac{-yV_Z}{Z} \Rightarrow \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$

- Time-to-impact
- Non posso stimare la velocità e la distanza.



A.A. 2003-2004

15/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



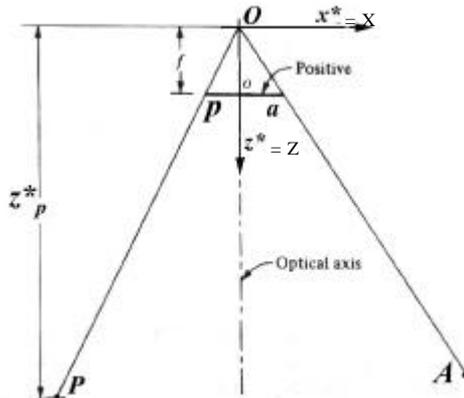
## Determiniamo Z e Vz



$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x}$$

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$

E' una corrispondenza biunivoca? No



Il mondo visto da due punti può essere scalato. E' "gonfiabile".

A.A. 2003-2004

16/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

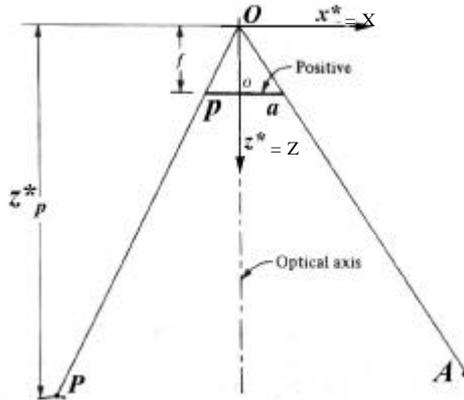


## 1) Determiniamo Z e Vz: punto P.



$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x}$$

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$



Fissiamo  $Z_{\text{ref}}$  o  $V_Z(\mathbf{P})$ :

Posso calcolare  $V_Z$ .

Posso calcolare Z di ogni punto P:

$$Z = -\frac{V_Z}{v_x} x$$

$$V_Z(\mathbf{P}) = -\sum_K \frac{v_{x_K} Z_K}{x_K}$$

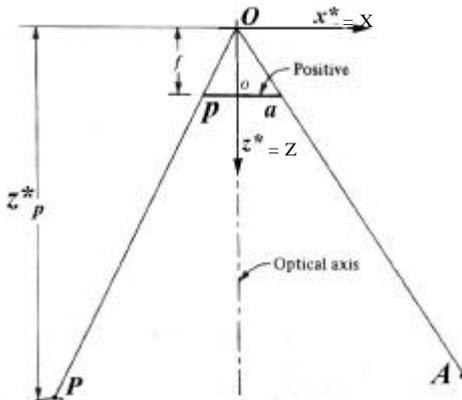


## 2) Determiniamo Z e Vz: distanza d



$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x}$$

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$



Fissiamo  $d_{\text{ref}} = Z_2 - Z_1$

$$\frac{V_Z}{Z_1} = a \quad \frac{V_Z}{Z_2} = b$$

$$a \frac{Z_1}{Z_1 + d_{\text{ref}}} = b$$

$$Z_1 = \frac{bd_{\text{ref}}}{a - b}$$

$$Z_1 = \frac{\frac{V_Z}{Z_2} d_{\text{ref}}}{\frac{V_Z}{Z_1} - \frac{V_Z}{Z_2}} = \frac{Z_1^{\text{measured}} d_{\text{ref}}}{d_{\text{measured}}}$$



## Stima robusta



$$V_Z = - \sum_K \frac{v_{x_K} Z_K}{x_K} \quad V_Z \{ \text{mean}(V_Z(\mathbf{P})); \sigma(V_Z(\mathbf{P})) \}$$

- Ordino i campioni  $V_Z(\mathbf{P})$  a seconda del valore di  $|V_Z(\mathbf{P}) - \text{mean}(V_Z(\mathbf{P}))|$

- Elimino i campioni che sono “troppo lontani” dal valore atteso, cioè  $V_Z(\mathbf{P}) : |V_Z(\mathbf{P}) - \text{mean}(V_Z(\mathbf{P}))| > \sigma_{\text{ref}}$ .

- Ripeto la stima:

$$V_Z = - \sum_j \frac{v_{x_j} Z_j}{x_j} \quad \sigma(V_Z(X_j, Y_j, Z_j)) < \sigma_{\text{ref}}$$



## Completamento calcolo struttura



- Dal campo di moto:

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x} \Rightarrow v_x = \frac{-xV_Z}{Z} = f \frac{-X}{Z} \frac{V_Z}{Z} \quad X = \frac{-v_x}{f} \frac{Z^2}{V_Z}$$

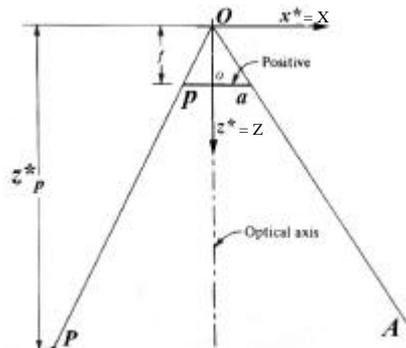
$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y} \Rightarrow v_y = \frac{-yV_Z}{Z} = f \frac{-Y}{Z} \frac{V_Z}{Z} \quad Y = \frac{-v_y}{f} \frac{Z^2}{V_Z}$$

- Dalla geometria:

$$\mathbf{p} = f \frac{\mathbf{P}}{Z} = \left[ f \frac{X}{Z}; f \frac{Y}{Z}; f \frac{Z}{Z} \right]$$

$$X = \frac{x}{f} Z$$

$$Y = \frac{y}{f} Z$$





# Valutazione dell'accuratezza della distanza



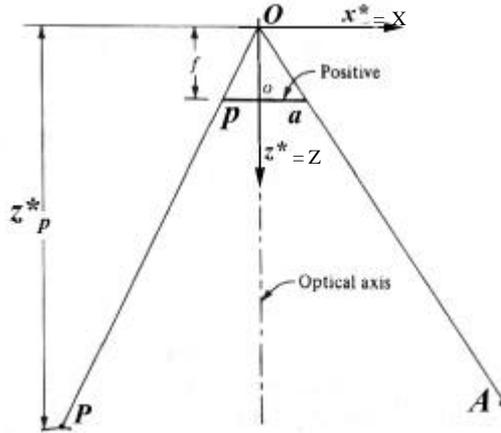
$$Z = -\frac{V_Z}{v_x} x$$

differenziale:  $dZ = \frac{dZ}{dv_x} dv_x = \frac{V_Z}{v_x^2} dv_x$

Ricordando che:

$$v_x = \frac{-fXV_Z}{Z^2} \quad v_y = \frac{-fYV_Z}{Z^2}$$

$$dZ = \frac{V_Z}{f^2 X^2 V_Z^2} dv_x = \frac{Z^4}{f^2 X^2 V_Z^2} dv_x = \frac{Z^2}{x^2 V_Z} dv_x$$



• Altre coordinate:

$$X = \frac{x}{f} Z$$

A.A. 2003-2004

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

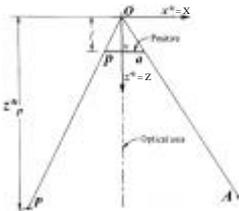


# Accelerazioni nel campo di moto

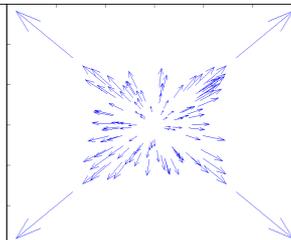
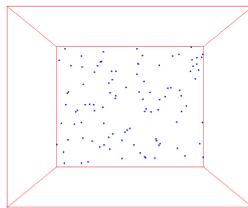
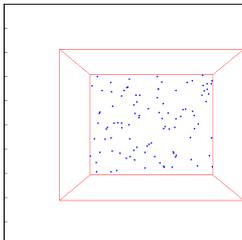


$$v_p = f \left( \frac{V_P}{Z} - \frac{P V_Z}{Z^2} \right)$$

E' costante il campo di moto (v(p)) se  $V(P) = \text{costante}$ ?



$$a_p = f \left( \left( \frac{dV_P}{dt} - \frac{V_P}{Z^2} \frac{dZ}{dt} \right) - \left( \frac{dP}{dt} \frac{V_Z}{Z^2} + \frac{P}{Z^2} \frac{dV_Z}{dt} - \frac{P V_Z}{Z^3} \frac{dZ}{dt} \right) \right)$$



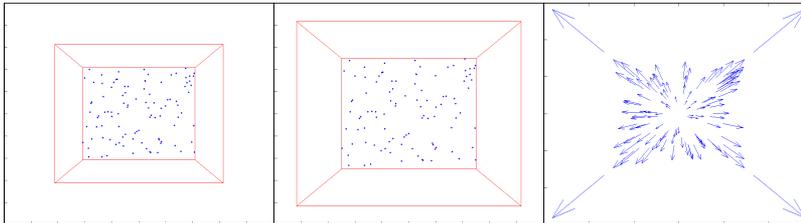
A.A. 2003-2004

22/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Accelerazioni nel campo di moto



Supponiamo  $\mathbf{V}_p = [0 \ 0 \ V_z] = \text{costante}$ . E' costante il campo di moto?

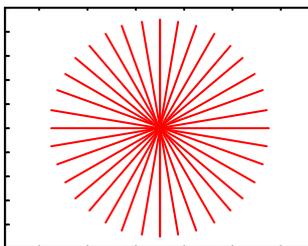
$$\mathbf{a}_p = f \left( \left( \frac{d\mathbf{V}_p}{dt} - \frac{\mathbf{V}_p}{Z^2} \frac{dZ}{dt} \right) - \left( \frac{dP}{dt} V_z + \frac{P}{Z^2} \frac{dV_z}{dt} - 2 \frac{P V_z}{Z^3} \frac{dZ}{dt} \right) \right) =$$

$$f \left[ \frac{XV_z^2}{Z^3}; \frac{YV_z^2}{Z^3}; \frac{2ZV_z^2}{Z^3} - \frac{2ZV_z^2}{Z^3} \right] = f \left[ \frac{xV_z^2}{Z^2}; \frac{yV_z^2}{Z^2}; 0 \right]$$

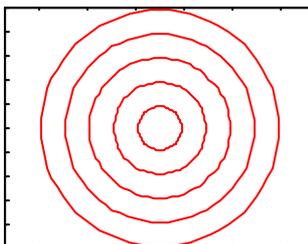
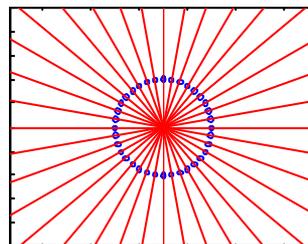


## Quali movimenti possiamo calcolare

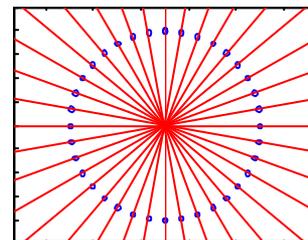
( $V_x = V_y = 0$ )?



No

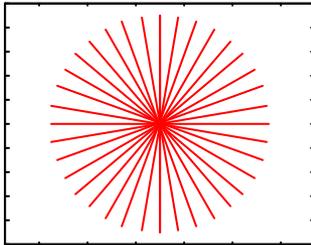


Si

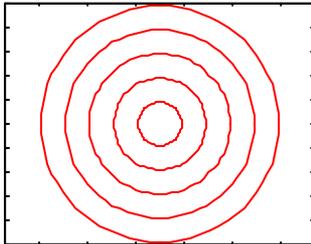
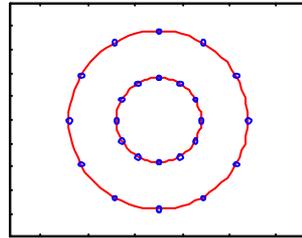




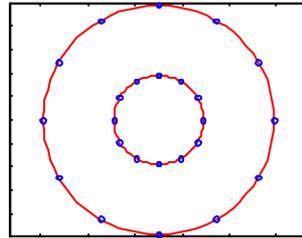
## Quali movimenti possiamo calcolare?



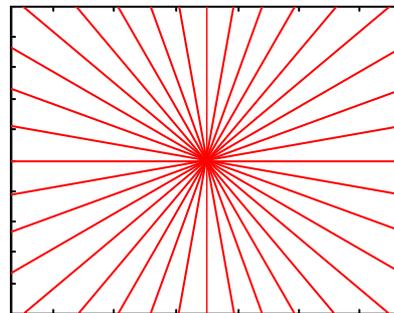
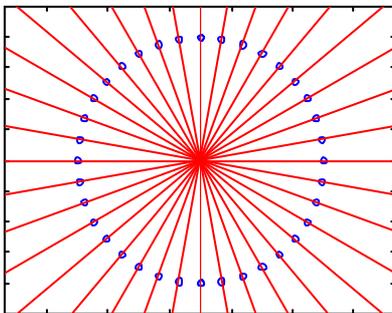
No



Sì



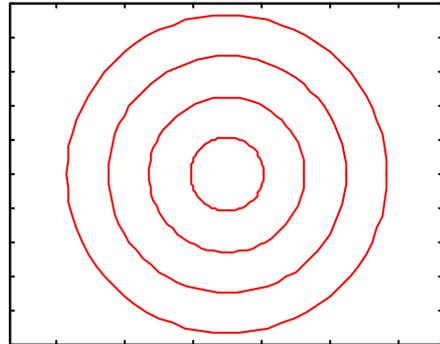
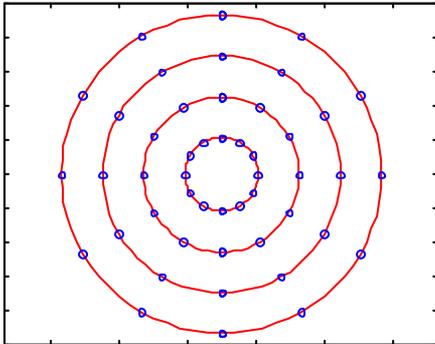
## Effetto del campo di moto



Movimento 3D indistinguibile



## Effetto del campo di moto



Movimento 3D distinguibile



## Moto traslatorio lungo l'asse, $V_x = V_y = 0$ (riassunto)



- Se  $V_z \neq 0$ , il campo di moto è radiale. Tutti i vettori puntano verso un punto,  $\mathbf{p}_c$ .
- La lunghezza dei vettori spostamento è inversamente proporzionale alla distanza dal piano immagine,  $Z$  e direttamente proporzionale a  $V_z$ .
- La risoluzione della profondità varia linearmente con la distanza.
- A velocità 3D costante, non corrisponde una velocità apparente costante.
- $\mathbf{p}_c$  è il punto di fuga della direzione di traslazione.
- $V_z/Z$  è il "time to contact".
- Per disambiguarli occorre una misura metrica.
- Si possono poi determinare  $X, Y$  dalle equazioni proiettive.

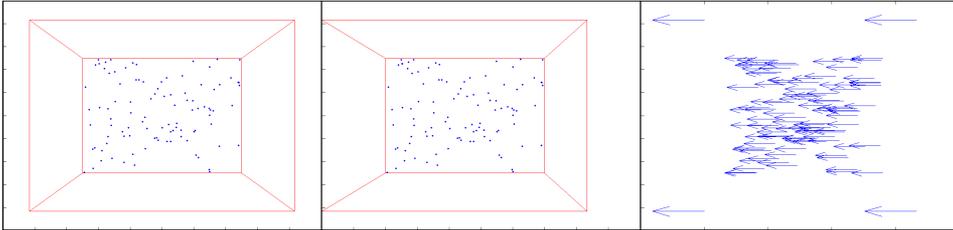


## Moto traslatorio perpendicolare all'asse ottico ( $Z = \text{cost}$ , $V_z = 0$ )



$$\bullet v_x = \frac{V_x f - x V_z}{Z} = \frac{V_x f}{Z} \quad v_z = 0$$

$$\bullet v_y = \frac{V_y f - y V_z}{Z} = \frac{V_y f}{Z}$$



• Vettori di moto paralleli

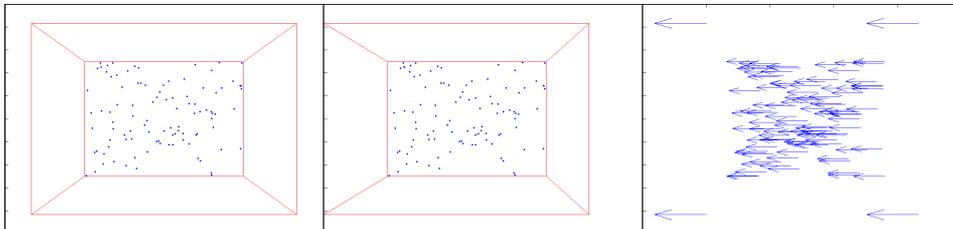
Punto di fuga: all'infinito.



## Structure from Moto traslatorio ( $V_z = 0$ )



$$\bullet v_x = \frac{V_x f - x V_z}{Z} = \frac{V_x f}{Z} \quad \bullet v_y = \frac{V_y f - y V_z}{Z} = \frac{V_y f}{Z} \quad \bullet v_z = 0$$



$$\bullet \frac{V_x}{Z} = \frac{v_x}{f}$$

$$\bullet \frac{V_y}{Z} = \frac{v_y}{f}$$

• Fisso la distanza di un punto,  $Z_{\text{ref}}$ .

• Dalle equazioni proiettive:

$$X = \frac{x}{f} Z .$$

$$Y = \frac{y}{f} Z .$$



## Riassunto



- Structure from Motion e prospettiva biologica
- Moto traslatorio lungo un asse
- **Moto traslatorio generico**
- Rototraslazione
- Applicazioni



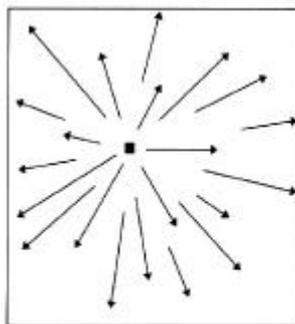
## Moto traslatorio generico ( $V_Z \neq 0$ )



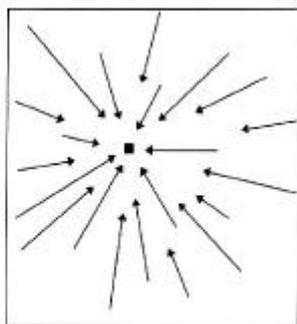
$$v_x = \frac{V_x f - xV_Z}{Z}$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{V_Y f - yV_Z}{V_X f - xV_Z}$$

$$v_y = \frac{V_Y f - yV_Z}{Z}$$



(a)



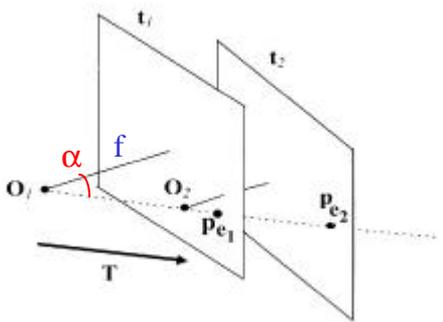
(b)



## Punto 2D che non ha moto apparente

$$v_x = \frac{V_x f - x V_z}{Z} \quad \frac{V_x}{V_z} = \frac{x}{f} \Rightarrow x_e = \frac{V_x f}{V_z} \quad \frac{V_y}{V_z} = \frac{y}{f} \Rightarrow y_e = \frac{V_y f}{V_z}$$

Punto  $p(x,y)$  con velocità nulla,  $p_e$ . Quale?



Quello che “vede” sulla propria retta di proiezione entrambi i centri di proiezione.

$$\frac{V_x}{V_z} = \frac{x}{f} = \tan(\alpha)$$

Questa retta coincide con la direzione di traslazione.



## Punto di fuga della traslazione

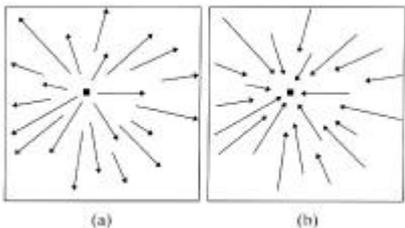
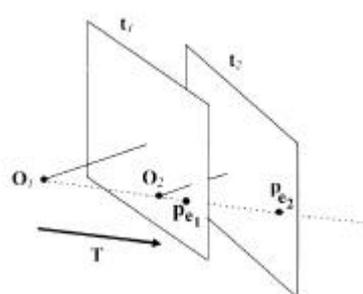
$$v_x = \frac{V_x f - x V_z}{Z}$$

$$v_y = \frac{V_y f - y V_z}{Z}$$

Punto con velocità nulla,  $p_e$ :

$$x_e = \frac{V_x f}{V_z}$$

$$y_e = \frac{V_y f}{V_z}$$



Il campo di moto è:

$$v_x = -(x - x_e) \frac{V_z}{Z}$$

$$v_y = -(y - y_e) \frac{V_z}{Z}$$



## Structure from Motion (traslazione)

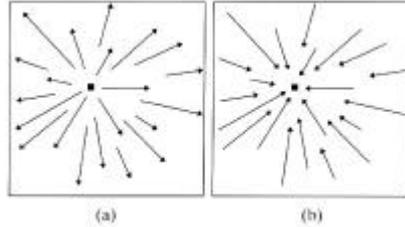


1) Determino l'epipolo  $p_e$ .

$\forall \mathbf{p}_k(x_k, y_k)$  calcolo il vettore di moto:

$$(y - y_k) = (v_y/v_x)(x - x_k)$$

$$y = mx + q$$



• L'epipolo è il punto di intersezione di tutte le rette:

$$\{y - m_k x = q_k\} \Rightarrow \mathbf{p}_e(x_e, y_e)$$

• Si possono pesare i diversi vettori di moto (ad esempio con  $\lambda_2$ )



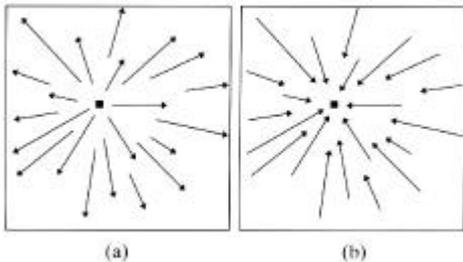
## Structure from Motion (traslazione)



2) Determino la direzione della traslazione.

$$x_e = \frac{V_x f}{V_z} \quad y_e = \frac{V_y f}{V_z}$$

$$\frac{V_x}{V_z} = \frac{x_e}{f} \quad \frac{V_y}{V_z} = \frac{y_e}{f} \quad V_z = 1$$



• Normalizzando,  $d = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 1$  calcolo il versore traslazione:

$$\mathbf{V}_u = [V_x/d; V_y/d; 1/d]$$



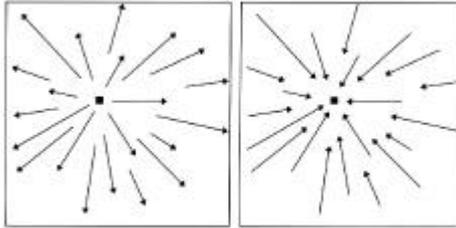
## Structure from Motion (traslazione / profondità)



3) Determino la traslazione, dato un punto.

$$\frac{V_x}{V_z} = \frac{x_e}{f} \quad \frac{V_y}{V_z} = \frac{y_e}{f}$$

• Considero le equazioni del campo di moto:



$$\frac{V_z}{Z} = \frac{\left( \frac{V_x}{V_z} f - v_x \right)}{x}$$

$$v_x = \frac{V_x f - x V_z}{Z} = \frac{V_x}{V_z} f - x \frac{V_z}{Z}$$

$$v_y = \frac{V_y f - y V_z}{Z} = \frac{V_y}{V_z} f - y \frac{V_z}{Z}$$

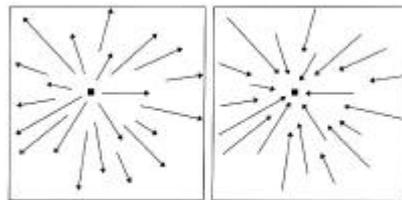
• Ricavo  $V_z \rightarrow$  Ricavo  $V_x, V_y \rightarrow$  Ricavo  $X, Y, Z \forall$  punto  $P$ .



## Campo di moto traslatorio (riassunto)



- Se  $T_z \neq 0$ , il campo di moto è radiale. Tutti i vettori puntano verso un punto,  $\mathbf{p}_e$ .
- Se  $T_z = 0$ , il campo di moto è costituito da vettori paralleli.
- La lunghezza dei vettori spostamento è inversamente proporzionale alla distanza dal piano immagine,  $Z$ .
- A velocità 3D costante, non corrisponde una velocità apparente costante.
- La lunghezza dei vettori spostamento è proporzionale alla distanza di  $\mathbf{p}$  da  $\mathbf{p}_e$ .
- $\mathbf{p}_e$  è il punto di fuga della direzione di traslazione.
- $\mathbf{p}_e$  è l'intersezione del vettore traslazione passante per i due centri di proiezione ed il piano immagine.

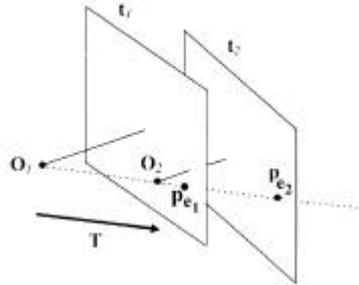




## Campo di moto traslatorio (Structure from Motion)



- Determino l'epipolo dal campo di moto.
- Determino la direzione della traslazione dalla posizione dell'epipolo (l'epipolo determina la direzione della traslazione).
- Data una misura presa sul campo, determino il vettore traslazione (il valore di  $V_z$ ).
- Lo spostamento di tutti i punti 3D è identico.
- Dalla traslazione, posso calcolare la posizione 3D di tutti i punti.
- Ciascuna di queste quantità può essere stimata in modo robusto.



A.A. 2003-2004

39/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Possiamo risolvere il problema di Structure from Motion

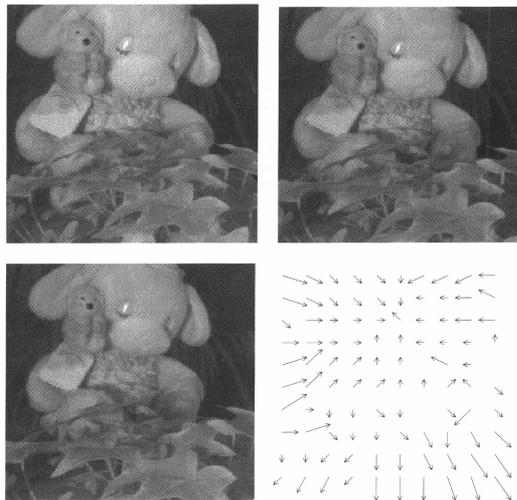


Figure 8.3 Three frames from a long image sequence (left to right and top to bottom) and the optical flow computed from the sequence, showing that the plant in the foreground is moving towards the camera, and the soft toys away from it.

A.A. 2003-2004

40/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Rotazione



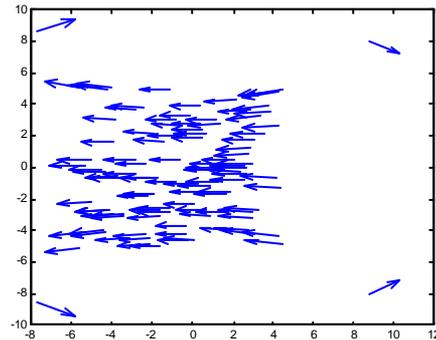
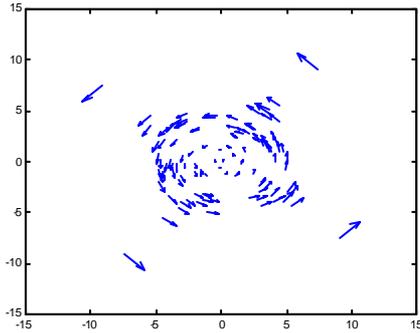
$$\mathbf{v}_P = f \left( \frac{\mathbf{V}_P}{Z} - \frac{\mathbf{P}V_Z}{Z^2} \right)$$

$$\mathbf{V}_P = d\mathbf{P}/dt = \mathbf{w} \wedge \mathbf{P}$$

$$v_x = -w_y f + w_z y + \frac{w_x xy}{f} - \frac{w_y x^2}{f}$$

$$v_y = -w_x f - w_z x - \frac{w_y xy}{f} + \frac{w_x y^2}{f}$$

- Non dipende da Z, non è possibile vedere la struttura con solo rotazione.



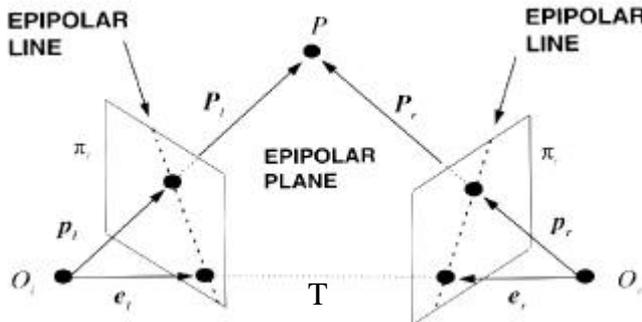
## Riassunto



- Structure from Motion e prospettiva biologica
- Moto traslatorio lungo un asse
- Moto traslatorio generico
- **Rototraslazione**
- Applicazioni



## Elementi di geometria epipolare

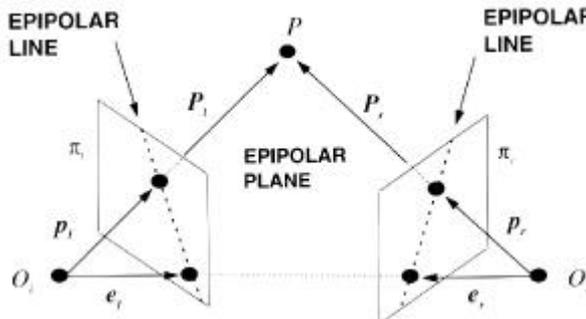


**Epipolo:** è l'intersezione della linea per il centro di proiezione  $O$ , ed il piano immagine,  $\pi$ , in due istanti successivi (direzione traslazione).

$P$ ,  $p_1$  e  $p_2$  stanno sullo stesso piano: *il piano epipolare.*



## Proprietà della geometria epipolare



$e_1$  è proiezione di  $O_2$  sulla prima posizione e viceversa.

Dato il movimento della camera, come si può trovare  $p_1$  che corrisponda a  $p_2$ ?

Retta:  $p_1 O_1$

Piano epipolare  $O_1 O_2 p_1$

Retta epipolare:  $e_2 p_2$

$p_2 \in$  piano epipolare.



## Geometria epolare



Presa una camera in *due posizioni*, il piano per un punto  $P$  ed il centro di proiezione nelle due posizioni si chiama *piano epolare*. Le rette intersezione del piano epolare con il piano immagine nelle due posizioni sono le *rette epolari*.

Gli epipoli sono la proiezione del centro di proiezione in una posizione sul piano immagine nella seconda posizione.

Data una prospettiva della camera (parametri interni) ed il movimento, i punti su una retta epolare della seconda posizione sono tutti quelli che possono corrispondere ad un punto individuato sul piano immagine nella prima posizione.



## Derivazione della matrice Essenziale



Rappresentazione matriciale:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{p}_r &= \mathbf{l}_l \\ \mathbf{p}_r^T \mathbf{E} \mathbf{p}_l &= 0 \end{aligned}$$

con  $\mathbf{E}$  matrice essenziale e contiene i parametri di movimento della camera.



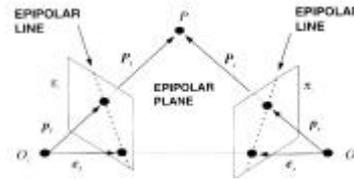
## Derivazione della matrice Essenziale (II)



$$(\mathbf{P}_1 - \mathbf{T})(\mathbf{T} \wedge \mathbf{P}_1) = 0$$

Sapendo che:  $\mathbf{P}_r = \mathbf{R}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{T})$

$$\text{Risulta: } (\mathbf{R}^T \mathbf{P}_r)^T (\mathbf{T} \wedge \mathbf{P}_1) = 0$$



Troviamo un'espressione migliore per il prodotto vettore:

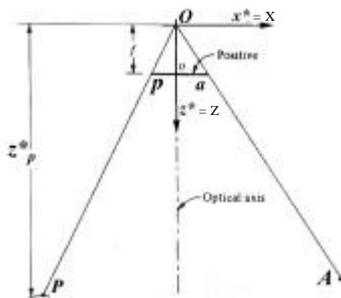
$$(\mathbf{T} \wedge) = \begin{bmatrix} 0 & -T_z & T_y \\ T_z & 0 & -T_x \\ -T_y & T_x & 0 \end{bmatrix}$$

Definendo:  $\mathbf{E} = \mathbf{R}(\mathbf{T} \wedge)$  che contiene i parametri di movimento.

$$\text{Si ottiene: } \mathbf{P}_r^T \mathbf{E} \mathbf{P}_1 = 0.$$



## La matrice essenziale funzione delle coordinate sul piano immagine



$$\mathbf{P}_r^T \mathbf{E} \mathbf{P}_1 = 0$$

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_r$  stesso punto, viste diverse.

Consideriamo le coordinate normalizzate:

$$\frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{o,1})}{f_1} = \mathbf{p}'_1 \quad \frac{(\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_{o,r})}{f_r} = \mathbf{p}'_r$$

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{\mathbf{P}_1}{Z_1}$$

$$\mathbf{p}'_r = \frac{\mathbf{P}_r}{Z_r}$$

$$\mathbf{p}'_r{}^T \mathbf{E} \mathbf{p}'_1 = 0$$

NB: Si perde l'informazione metrica.



## Determinazione della matrice E



- N punti che si corrispondono nelle due immagini.
- Scrivo l'equazione della matrice Essenziale per ogni punto:  $\mathbf{p}_r \mathbf{E} \mathbf{p}_l = 0$ .
- Ottengo un sistema omogeneo: la matrice  $\mathbf{E}$  sarà la soluzione non banale del sistema, definita a meno di un fattore di scala.
- In pratica riscrivo il sistema come  $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ . Sovradeterminato (size(A) è Nx9).
- Risolvo il sistema tramite SVD come:  $\mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V} \mathbf{X} = 0$ . La soluzione è  $\mathbf{V}^9$ .
- $\mathbf{V}^9 \Rightarrow \mathbf{E}$



## Determinazione di R e T



$$\mathbf{E} = \mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{R} (\mathbf{T} \mathbf{\Lambda})$$

$$\mathbf{E}^T \mathbf{E} = \mathbf{S}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$$

$\Rightarrow \mathbf{T}$ , a meno del segno e di un fattore di scala.

$\det(\mathbf{E}) = 0$  ( $\mathbf{T} \mathbf{\Lambda}$  è singolare),

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T \quad \text{con } \mathbf{W} = \text{diag}[\lambda, \lambda, 0]$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \text{ è tale per cui: } \mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{V}^T \quad \mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{Z}^T \mathbf{V}^T$$

Posizione frontale dei punti per determinare la soluzione.

Determino il modulo di T a partire dalla distanza di due punti nello spazio 3D e dalla sua proiezione.



## Structure from Motion (Riassunto)



- Identifico coppie di features in due immagini consecutive.
- Scrivo l'equazione di coplanarità per ogni coppia di features.
- Stimo la matrice essenziale,  $\mathbf{E}$ , tramite SVD.
- Dalla matrice essenziale al quadrato, ricavo  $\mathbf{T}$  a meno del segno.
- Tramite SVD della matrice essenziale ricavo  $\mathbf{R}$  a meno del verso di rotazione.
- Calcolo il segno corretto di  $\mathbf{T}$  ed  $\mathbf{R}$  controllando che i punti siano ricostruiti frontalmente.
- Determinazione della norma di  $\mathbf{T}$  da misure 3D sul campo.
- Da  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$  (e  $f$ ,  $\mathbf{p}_0$ ) posso ricostruire la posizione 3D delle features.



## Dalla matrice essenziale alla matrice fondamentale



La matrice essenziale contiene i parametri esterni fattorizzati ma non contiene i parametri interni perché le coordinate sono già considerate normalizzate.



## La matrice fondamentale F



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -f & 0 & x_c \\ 0 & -f & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}'_r{}^T \mathbf{E} \mathbf{p}'_1 = 0$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{p}'_1$$

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{K}_r \mathbf{p}'_r$$

$$\mathbf{p}_r{}^T \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{E} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{p}'_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{p}_r{}^T \mathbf{F} \mathbf{p}'_1 = 0$$

**F ha rango 2 e si può dimostrare che consente di determinare al più 7 parametri.**



## Riassunto



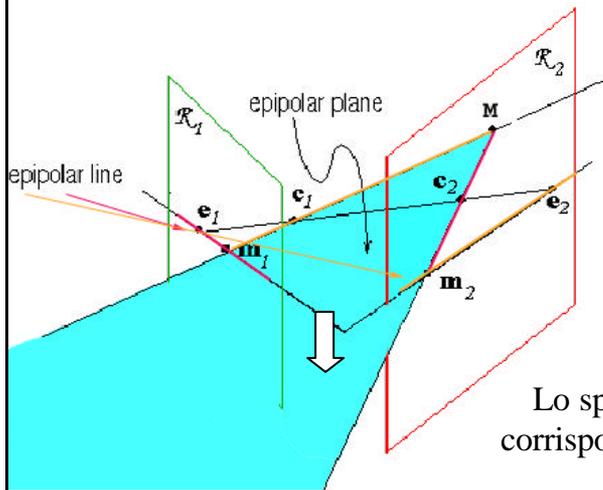
- Structure from Motion e prospettiva biologica
- Moto traslatorio lungo un asse
- Moto traslatorio generico
- Rototraslazione
- **Applicazioni**



# Vincolo epipolare



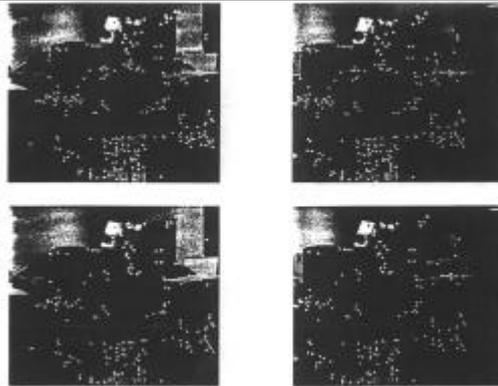
Dato un punto sul primo piano immagine, il corrispondente sul secondo piano deve giacere sulla retta epipolare



Lo spazio in cui cercare una corrispondenza si riduce da 2 a 1 dimensione

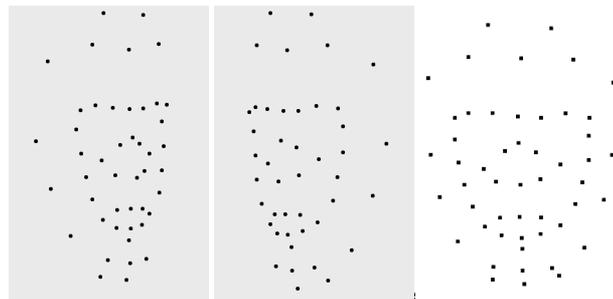


## Feature matching



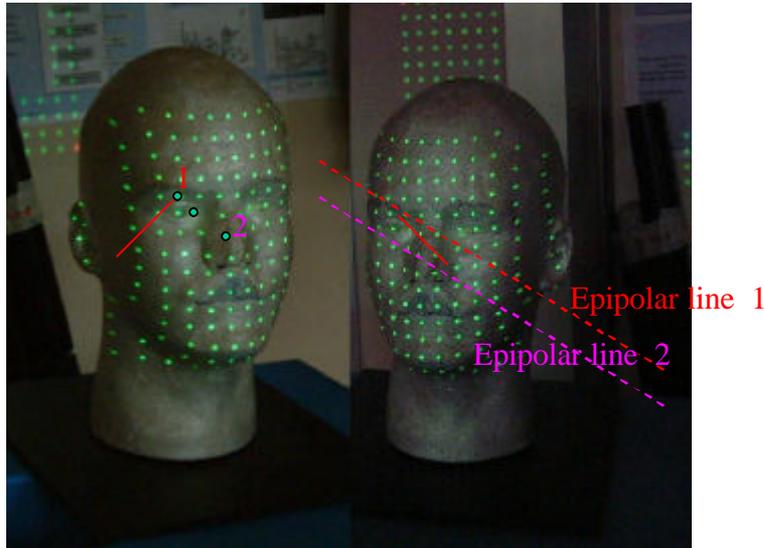
Occlusioni  
Viste incomplete

Algoritmi di livello superiore su un numero ristretto di features.





## Simplified matching through epipolar lines



## Calibrazione epipolare



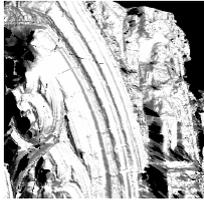
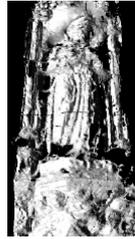
Problema di ottimizzazione:  
trovare i parametri per i quali il vincolo epipolare è soddisfatto per tutti i punti, con il vincolo che la distanza tra 2 punti sia quella reale.



Non si passa dal sistema di riferimento assoluto ma si trasforma un piano immagine nel secondo piano immagine.



## Ricostruzione da singola camera



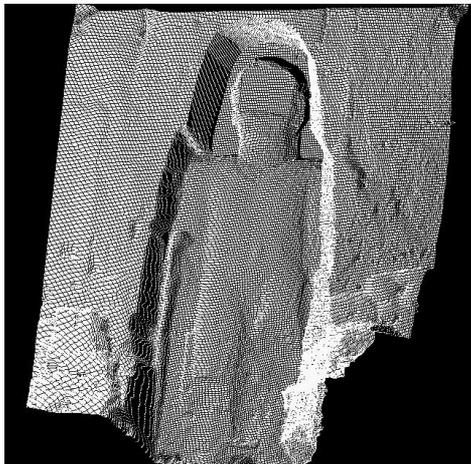
A.A. 2003-2004

59/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>



## Alcune applicazioni



A.A. 2003-2004

60/61

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>



## Link interessanti



<http://profs.sci.univr.it/%7Efusiello/teaching/visione/appunti.pdf>

<http://www.photogrammetry.ethz.ch/>

<http://cvlab.epfl.ch/index.html>

<http://www.vision.cs.ucla.edu/>

<http://www.vision.caltech.edu/html-files/overview.html>

<http://www.ai.mit.edu/projects/cbcl/web-pis/poggio/>

<http://www.vision.ee.ethz.ch/research/index.en.html>