

L'intelligenza visiva

Dal 2D al 3D e viceversa

Alberto Borghese
Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borgnese@dsi.unimi.it



1/67

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

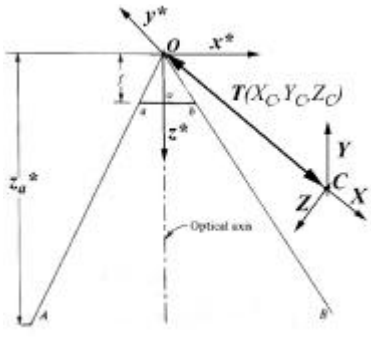
Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



La trasformazione prospettica



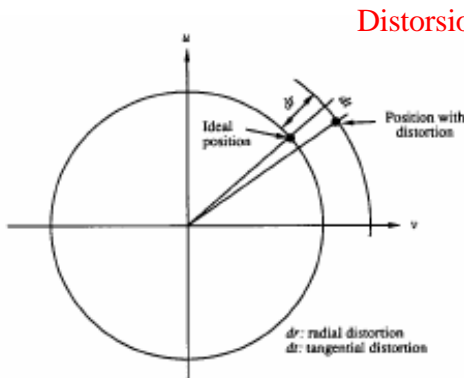
$$P^3 \rightarrow P^3 \rightarrow p^2 \rightarrow p_m^2$$

$$x_a - x_o = x_A^* f / z_A^* = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$y_a - y_o = y_A^* f / z_A^* = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$



Modello generale delle distorsioni



$$\text{Distorsione} = \Delta r + \Delta t = (\Delta r' + \Delta r'') + \Delta t$$

Radial Decentering + Thin prism

trascuro infinitesimi di ordine $O(p^4)$ sulle distorsioni.

$$x_m(p) = x(p) + dx(p) = (g_1 + g_3)x^2 + g_1y^2 + g_4xy + k_1x(x^2 + y^2) + \lambda x$$

$$y_m(p) = y(p) + dy(p) = (g_2 + g_4)y^2 + g_2x^2 + g_3xy + k_1y(x^2 + y^2)$$

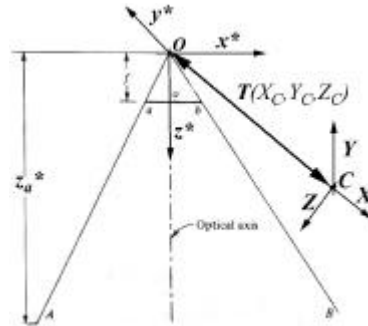
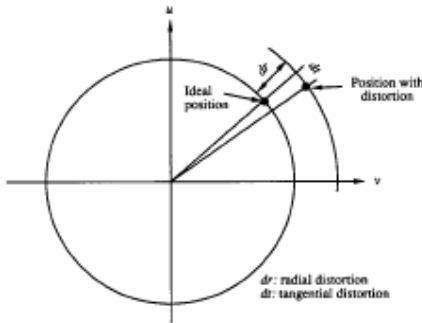


Modello reale della ripresa fotografica



$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$



Tassonomia dei parametri



- $P^3 \rightarrow P^2$ Interior parameters
 - Focal length, f
 - Principal point (x_o, y_o)
- $P^3 \rightarrow P^3$ Exterior parameters
 - Orientation (ω, ϕ, κ)
 - Position (X_o, Y_o, Z_o)
- $P^2 \rightarrow P_m^2$ Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$
 $(f(x, y, x_o, y_o); g(x, y, x_o, y_o))$

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{21}(Y - Y_o) + m_{31}(Z - Z_o)}{m_{13}(X - X_o) + m_{23}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{32}(Z - Z_o)}{m_{13}(X - X_o) + m_{23}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: {X,Y,Z}
- B) I punti misurati sul piano immagine {x,y}
- C) I parametri { $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}$ }

3 problemi:

- A) + B) → Determinazione dei parametri del modello proiettivo.
- B) + C) → Ricostruzione (ray intersection).
- A) + C) → Proiezione



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- Parametri esterni: $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- Parametri interni: x_0, y_0, f .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

Quale problema intravedete?



Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).



Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).



Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.



Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.
Ho $9 + D$ parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo.



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Inizializzazione.

Calibrazione sul campo.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



La calibrazione come problema di stima



$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$$

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$$

Dati:

I punti nello spazio 3D: {X,Y,Z}

I punti misurati sul piano immagine {x,y}

Dobbiamo determinare:

I parametri { $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}$ }



Impostazione della Calibrazione



$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$$

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$$

- Per ogni punto immagine (x,y) ho 2 equazioni di collinearita'
- Combinando le equazioni per M punti di controllo ho un sistema di 2M equazioni non-lineari.

INPUT:

- coordinate 2D di punti misurati sulle immagini
- coordinate 3D dei punti di controllo.

OUTPUT (incognite):

- parametri d'orientamento interno e esterno
- parametri aggiuntivi (AP)



Visione statistica della determinazione dei parametri



$$x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$$

$$y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$$

Osservazioni

Modello

$$e_x = e_x^s + e_x^r$$

$$e_y = e_y^s + e_y^r$$

Errore randomico
(di misura)

Errore
totale

Errore sistematico
(di modellazione)

Minimizzo $e_x^2 + e_y^2$

Minimo per $e_x^s = e_y^s = 0$.



Minimizzazione dell'errore



$$x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$$

$$y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$$

Minimizzo $e_x^2 + e_y^2$

Minimizzo la differenza tra le osservazioni
misurate ed i valori predetti dal modello
per uno stesso punto (X,Y,Z).

Minimizzo

$$(x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 + (y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2$$

rispetto a che cosa?



Visione geometrica della determinazione dei parametri (**bundle adjustment**)



Minimizzo $(x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 +$
 $(y - G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2$

Misure

Proiezione prospettica

Regolazione dei parametri che determinano il fascio di rette retro-proiettate sul piano immagine attraverso il centro di proiezione.

Bundle-adjustment. Minimizzazione dell'errore di retro-proiezione.



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).

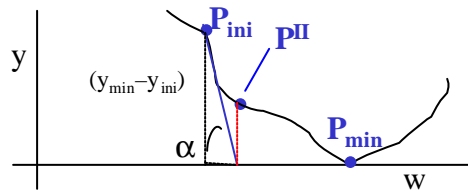


Minimizzazione tramite gradiente



$$\min(x - F(\cdot))^2 + (y - G(\cdot))^2$$

Tecnica del gradiente applicata alla minimizzazione di funzioni non-lineari di una variabile: $y = f(w)$.



Mi trovo in un punto $P_{ini}(x_m, y_m)$, mi muovo lungo la direzione della pendenza.

$$y^{II} = y_{ini} + \operatorname{tg}(\alpha) dw = y_{ini} + y'(w) dw$$

Determino la stima dell'incremento $dw = (y_{min} - y_{ini}) / y'(w)$ e arrivo in P^{II}

Da qui riparto fino a quando non arrivo in P_{min} .



Algoritmo di minimizzazione mediante calcolo del gradiente



Parti da un valore iniziale dei parametri rispetto a cui si vuole operare la minimizzazione (w nell'esempio).

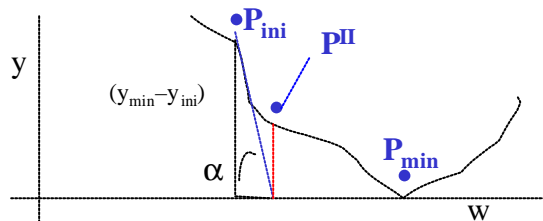
Ripeti:

Linearizza la funzione attorno al valore attuale dei parametri (w, y).

Determina un valore incrementale delle incognite che migliora la soluzione ($w^{t+1} = w^t + dw^t$): $dw = (y_{min} - y_{ini}) / y'(w)$.

Fino a quando l'incremento dei parametri non diventa trascurabile.

$dw^t \cong 0$





Minimizzazione di funzioni di più variabili



$$\min(f(w)) \longrightarrow y^H = y_{ini} + \text{tg}(\alpha) dw = y_{ini} + y'(w) dw$$

$$\min(x - F(P(X,Y,Z)!\{w\}))^2 + (y - G(P(X,Y,Z)!\{w\}))^2 = \min(F^* + G^*)$$

Linearizzazione (sviluppo di Taylor del primo ordine)

$$F^*(t+1) = F^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial F^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

$$G^*(t+1) = G^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial G^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

Il minimo della funzione $F^*|G^*$ sarà 0 (errore di modellazione + errore di misura).



Risoluzione della Calibrazione



Equazioni non lineari. $x = F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$
 $y = G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$

Definisco $W = [X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}]$

STRATEGIA DI SOLUZIONE: stima ai minimi quadrati iterativa.

Parti da un valore iniziale dei parametri.

Ripeti:

A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione con il set di parametri corrente.

B) Linearizza le equazioni di collinearità per il punto P_k ed i parametri $\{W^t\}$.

C) Determina un valore incrementale delle incognite che migliora la soluzione, cioè diminuisce l'errore di retro-proiezione ($W^{t+1} = W^t + dW^t$)

Fino a quando l'incremento dei parametri non diventa trascurabile. $dW^t \cong 0$



A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione (residuo)



Per ogni punto, $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$,

Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, \{ap_x^t\}))$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, y_o^t, \{ap_y^t\}))$$

Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità $[v_{xk}, v_{yk}]$:

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, y_o^t, \{ap_y^t\}) - y_k$$

NB Il residuo contiene sia l'errore di modellazione che l'errore di misura. Se i parametri sono quelli "reali", il residuo sarà uguale solo all'errore di misura.



B) Linearizzazione della funzione da minimizzare (errore di retro-proiezione, o residui)



Per ogni punto, $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$,

Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$F^* = (x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, \{ap_x^t\}))^2 +$$

$$G^* = (y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, y_o^t, \{ap_y^t\}))^2$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, \{ap_x^t\})) +$$

$$\left. \frac{\partial F^* ()}{\partial X_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \left. \frac{\partial F^* ()}{\partial Y_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \left. \frac{\partial F^* ()}{\partial Z_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial F^* ()}{\partial w_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dw + \dots$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f, x_o^t, \{ap_x^t\})) +$$

$$\left. \frac{\partial G^* ()}{\partial X_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \left. \frac{\partial G^* ()}{\partial Y_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \left. \frac{\partial G^* ()}{\partial Z_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial G^* ()}{\partial w_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dw + \dots$$



B) Sviluppo in serie di Taylor (forma matriciale)



$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X^t_C, Y^t_C, Z^t_C, m^t_{ij}(\omega, \phi, k), f, x^t_o, \{ap^t_x\}) + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dX_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dY_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dZ_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial w_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dw + \dots)$$

$$(y_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X^t_C, Y^t_C, Z^t_C, m^t_{ij}(\omega, \phi, k), f, x^t_o, \{ap^t_x\}) + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dX_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dY_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dZ_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial w_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dw + \dots)$$

$$A x = b$$

M punti e N parametri di calibrazione.

A (2*m x n) - Matrice di disegno (contiene le derivate **parziali**).

x (n) – Vettore delle incognite (gli incrementi dei parametri di calibrazione).

b (2*m) – Residuo o errore di retro-proiezione.



Determina l'incremento dei parametri



$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X^t_C, Y^t_C, Z^t_C, m^t_{ij}(\omega, \phi, k), f, x^t_o, \{ap^t_x\}) + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dX_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dY_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dZ_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial w_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dw + \dots)$$

$$(y_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X^t_C, Y^t_C, Z^t_C, m^t_{ij}(\omega, \phi, k), f, x^t_o, \{ap^t_x\}) + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dX_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dY_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dZ_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial w_o} \Big|_{w^t|P_k|P_k} dw + \dots)$$

$$A x = b$$

Stima ai minimi quadrati.

$$A' * A x = A' * b \quad \rightarrow \quad x = (A' * A)^{-1} A' * b$$



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



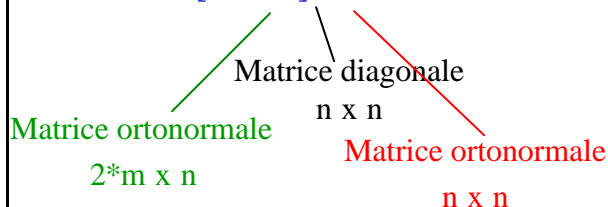
Condizionamento della matrice $C = A' * A$



c_{ij} – contiene la somma dei prodotti delle derivate della funzione proiettiva rispetto al parametro i e j calcolate per tutti i punti.

Per evitare di ottenere elementi troppo grandi che rendono la norma della matrice C vicina alla precisione della macchina, si preferisce utilizzare la Singular Value Decomposition per risolvere il sistema lineare.

$$A x = b \rightarrow [U W V] x = b \rightarrow U' U W V x = U' b \rightarrow V x = W^{-1} U' b$$



$$x = V' W^{-1} U' b$$

- La matrice C non viene formata.
- W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W .



Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti



$$x = (A' * A)^{-1} A' * b$$

$$x = V' W^{-1} U' b$$

Se A è rank-deficient, A' * A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W.

In questo caso il problema è sovrapparametrizzato.



I modelli di distorsioni



Semplificazioni possibili delle equazioni che modellano i parametri di distorsione

1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$	(1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$	(2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$	(3)

Occorre scegliere il modello più adeguato, non il modello più generale!



Valutazione della bontà della stima



$$x = (A' * A)^{-1} A' * b$$

Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità $[v_{xk}, v_{yk}]$:

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}) - y_k$$

Errore di misura Gaussiano a media nulla $e(0, \sigma^2)$

$$\langle v_{xk} \rangle = \langle v_{yk} \rangle = 0$$

$$\hat{s}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

Errore di retro-proiezione = rumore di misura.



Valutazione della bontà della stima del singolo parametro e della loro correlazione



$$x = (A' * A)^{-1} A' * b \quad \hat{s}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

$$x = C^{-1} A' * b \quad C^{-1} \text{ è chiamata anche matrice di covarianza.}$$

Chiamiamo u e v le variabili casuali associate all'errore sui parametri e l'errore di retro-proiezione. Si suppone errore a media nulla e Gaussianamente distribuito.

$$x + u = C^{-1} A' * (b + v)$$



$$u = C^{-1} A' * v$$



Impostazione del calcolo della correlazione tra i parametri



$$u = C^{-1}A'v$$

Vogliamo individuare la correlazione tra due parametri r ed s . Devo quindi determinare il valore atteso di $u_r * u_s$.

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_W \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_Wu_1 & u_Wu_2 & \dots & u_W^2 \end{bmatrix}$$

$$u = C^{-1}A'v \quad \Rightarrow \quad u' = v'A(C^{-1})'$$

$uu' = C^{-1}A'vv'A(C^{-1})' \Rightarrow$ Applicando l'operatore di media, si ottiene:

$$\langle uu' \rangle = C^{-1}A' \langle vv' \rangle A(C^{-1})'$$

Dato che v sono i residui, e sono indipendenti, e tutte i punti di controllo hanno lo stesso tipo di errore di misura, si avrà che $\langle vv' \rangle = I\sigma_0^2$.



Calcolo della correlazione tra i parametri



$$\langle uu' \rangle = C^{-1}A'IA(C^{-1})'\sigma_0^2 = C^{-1}\sigma_0^2$$

Da cui si giustifica il nome di matrice di covarianza per C^{-1} .

Segue che: $\sigma^2(u_{ij}) = c_{ij}^{-1}\sigma_0^2$ Varianza sulla stima del parametro.

Esempi di correlazione elevata:

$$f \leftrightarrow Z, Z_0 \quad x_0, y_0 \leftrightarrow X, Y, X_0, Y_0$$

$$-1 \leq r_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\sqrt{\langle u_i \rangle^2 \langle u_j \rangle^2}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_i c_j}} \leq +1$$

Indice di correlazione tra il parametro i ed il parametro j

Vanno rapportati alle dimensioni dei parametri coinvolti.



Proprietà del bundle-adjustment



Con punti di controllo di coordinate note può essere utilizzato per calibrare una fotocamera.

Nella calibrazione di più fotocamere che guardano lo stesso pattern di calibrazione, si possono inserire anche punti di coordinate non note (deve valere la relazione:

$$2*(M+ K)*N = 3*K + N * (9 + AP)$$

N – numero di video-camere.

M – numero di punti di controllo di coordinate note.

K – numero di punti di controllo di coordinate non-note.

AP – parametri addizionali.

Esempio: 3 video camere, 4 parametri addizionali. $\rightarrow 2M + K = 13$.

Diverse combinazioni di punti di controllo (posizione nota e non nota).



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



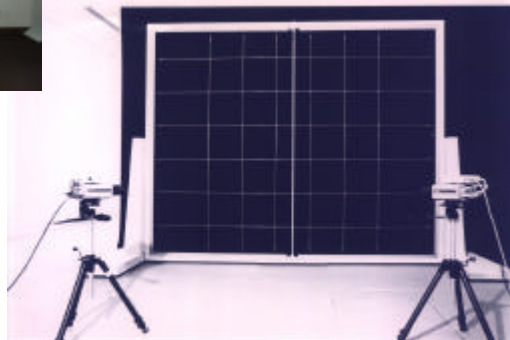
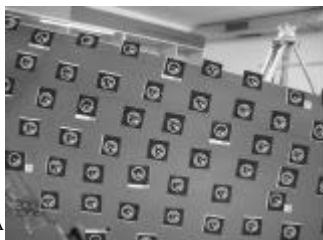
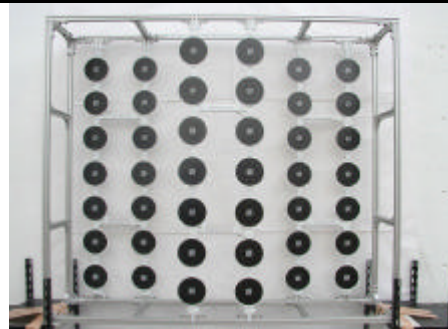
Attenzioni nella calibrazione



- At least over two planes (to minimize the impact of the correlation between Z_o and c).
- Good coverage of the working volume (extrapolation fails): good distribution of the control points over each image, and of the images inside the working volume.
- Extract good features from the images (weighting of the observations may apply).
- Analysis of the geometrical model parameterization (weak-perspective or paraperspective instead of perspective projection).
- Analysis of the adequacy of the distortion model parameterization (number of distortion parameters).



Test field (Known control points)

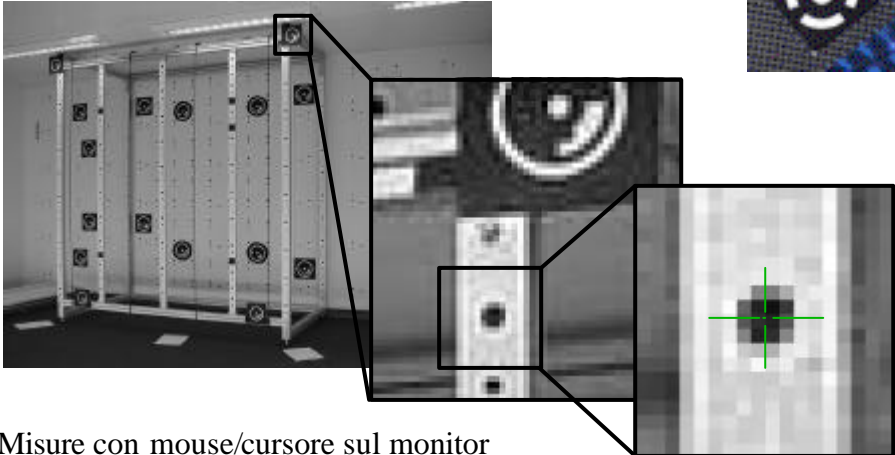




Misurazione manuale dei punti di controllo



Coded target



Misure con mouse/cursore sul monitor

Precisione: $1/4 - 1/8$ Pixel

A.A. 2003-2004

41/67

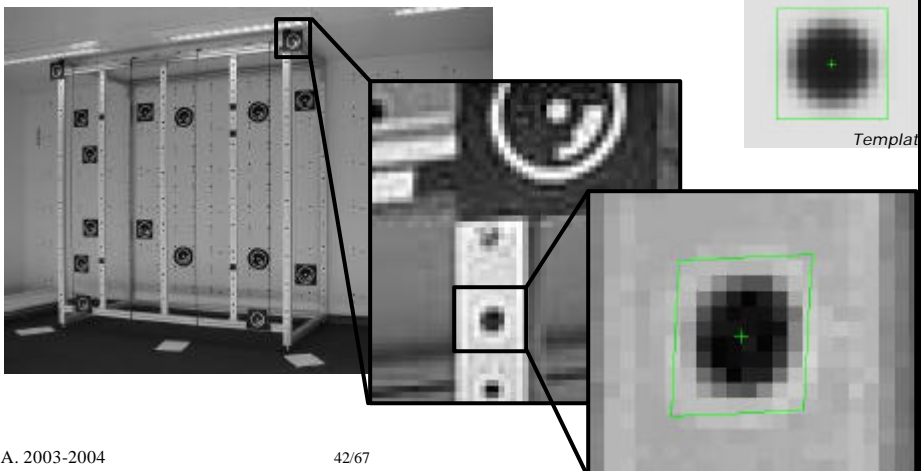
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Misurazione automatica dei control points



Template Matching (least square, cross-correlazione)



A.A. 2003-2004

42/67



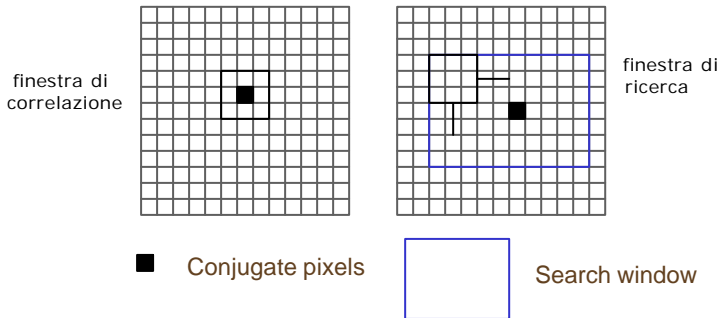
Cross-correlazione



Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

$$g(x, y) = \frac{S_{LR}}{S_L S_R}$$

$$S_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{nm-1}} \quad S_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{nm-1}} \quad S_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



Set-up



Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras).

Set-up requires:

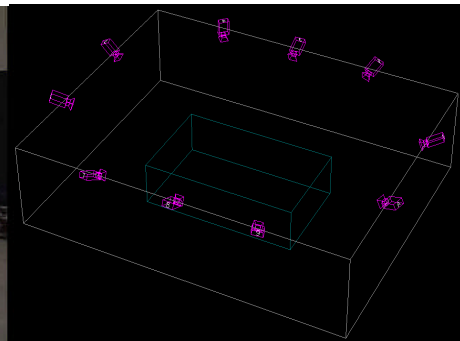
- Cameras position
- Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time
and/or
Multiple cameras are used.**



Motion Capture for animation



- Passive markers + flash coaxial with the cameras.
- Large working volume (10m x 8m x 4m).
- Redundant set of cameras (>10).

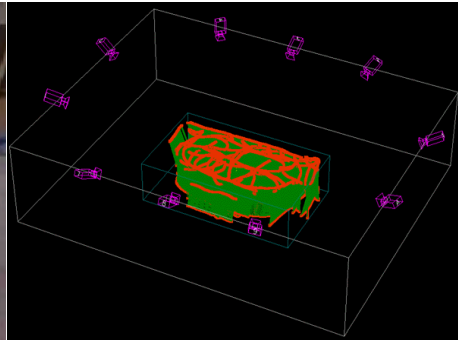


Wand Calibration



2 steps:

- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.



Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor).

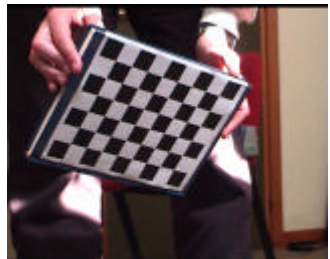


Calibration through a chessboard



Estimated parameters:

Distortions
Internal
External



<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



Inizializzazione dei parametri



Soluzione determinata con Bundle Adjustment.

=> linearizzazione delle equazioni collinearità

=> **approssimazioni iniziali** delle incognite

Interior parameters: Focal length, f , Principal point (x_0, y_0) .

Exterior parameters: Orientation (ω, ϕ, κ) and Position (X_0, Y_0, Z_0) .

Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$

Inizializzazione con i parametri di distorsione imposti a 0.



Approssimazione mediante DLT



Collinearita':

$$x - x_o + f(x, y, z, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, z, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

DLT:
(Direct
Linear
Transform)

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$

$$y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$

I parametri esterni ed interni sono rappresentati con gli 11 coefficienti L_i



DLT ed equazioni di collinearità



$$L_1 = \frac{x_0 \cdot r_{31} - f_x \cdot r_{11}}{D}; \quad L_2 = \frac{x_0 \cdot r_{32} - f_x \cdot r_{12}}{D}; \quad L_3 = \frac{x_0 \cdot r_{33} - f_x \cdot r_{13}}{D};$$

$$L_4 = \frac{x_0 + f_x(r_{11} X_0 + r_{12} Y_0 + r_{13} Z_0)}{D};$$

$$L_5 = \frac{y_0 \cdot r_{31} - f_y \cdot r_{21}}{D}; \quad L_6 = \frac{y_0 \cdot r_{32} - f_y \cdot r_{22}}{D}; \quad L_7 = \frac{y_0 \cdot r_{33} - f_y \cdot r_{23}}{D};$$

$$L_8 = \frac{y_0 + f_y \cdot (r_{21} X_0 + r_{22} Y_0 + r_{23} Z_0)}{D};$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}; \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}; \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}; \quad 11 \text{ PARAMETRI da trovare} \Rightarrow$$

$$D = -(r_{31} X_0 + r_{32} Y_0 + r_{33} Z_0)$$

Richiede **almeno 6 control points** di **coordinate note**

-> stima ai minimi quadrati non iterativa

Trovati gli 11 parametri L_i , ricavo i parametri interni ed esterni, che utilizzo come approssimazione iniziale per il bundle adjustment



I vanishing points (punti di fuga)



- Sull'immagine, linee parallele nello spazio 'oggetto' si possono intersecare.
- Trasformate nello spazio 'immagine' attraverso la trasformazione prospettiva della camera.



Nelle immagini ci sono molti indizi di tridimensionalità.

Linee rette, angoli, distanze e parallelismi possono essere usati per ricavare utili informazioni sulla collocazione degli oggetti nello spazio.

53/67

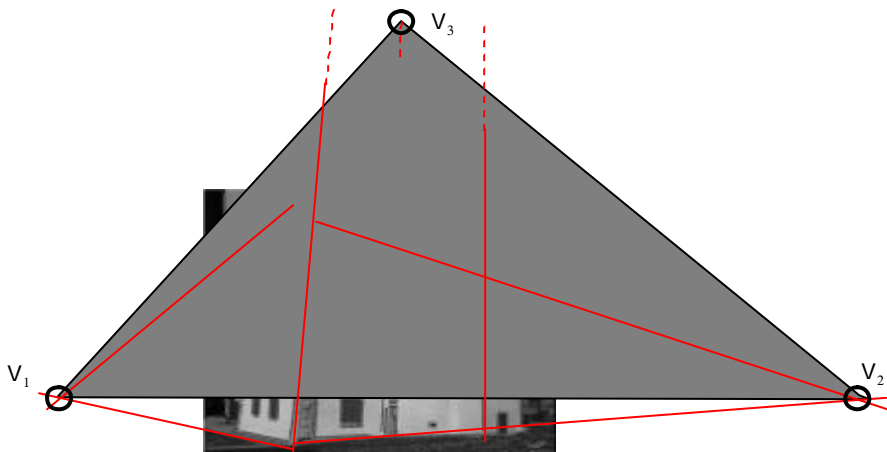
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>



Inizializzazione dei parametri interni tramite vanishing points



Intersezione di linee parallele nello spazio 'oggetto' trasformate nello spazio 'immagine' da una trasformazione prospettiva della camera.



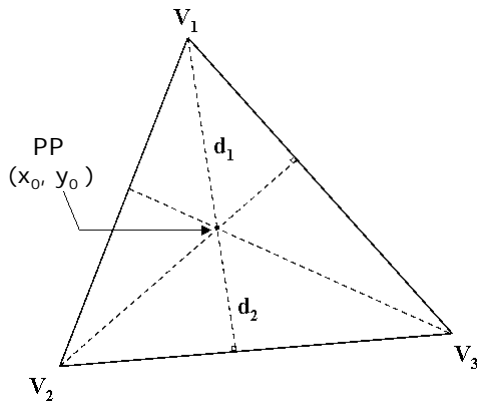
A.A. 2003-2004

54/67

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>



Stima del punto principale



PP: ortocentro del triangolo

$$c = \sqrt{d_1 * d_2}$$

Problemi:

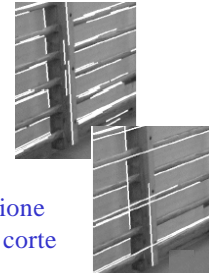
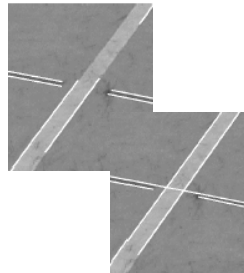
- Quali linee estrarre?
- Come trovarle (autom/manual)?
- Come trovare i 3 vertici del triangolo?



Algoritmo per determinare i vanishing points



- Estrazione automatica di edges/linee con operatore di Canny.
- Aggregazione delle linee piu' corte usando la loro pendenza e distanza reciproca.
- Per ogni linea, calcolare pendenza e distanza dal centro dell'immagine.
- Plottare pendenza e distanza.
- Classificazione delle linee in 3 gruppi (di solito $<40^\circ$; $\text{ca } 90^\circ$; $>140^\circ$).
- Intersezione delle linee di ciascun gruppo per calcolare il punto all'infinito (pto di fuga).
- Calcolo di PP e focale.



Aggregazione
delle linee corte



Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).



Dal 2D al 3D

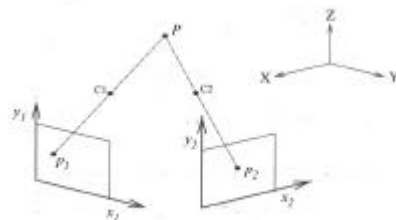
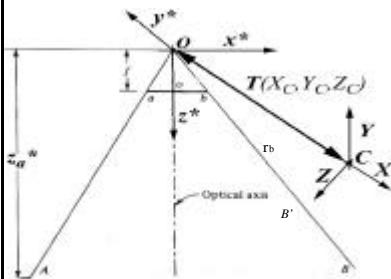


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Nello spazio 3D esistono ∞^1 punti compatibili con p_b

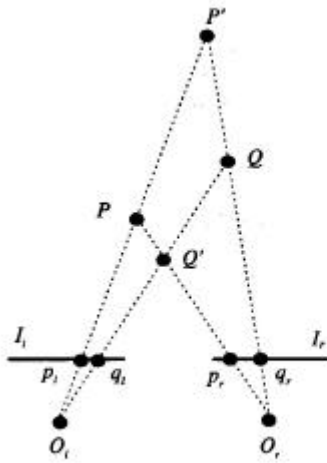
Soluzione: Stereoscopia



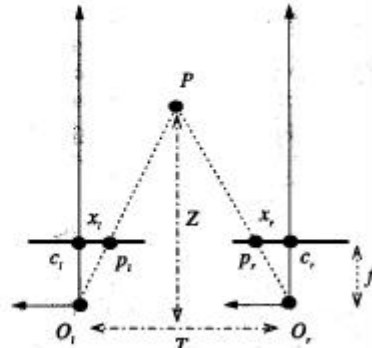
3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $x_l - x_r = \text{stereo disparità}$



(a)

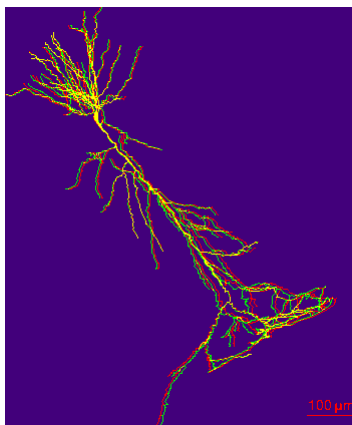


(b)

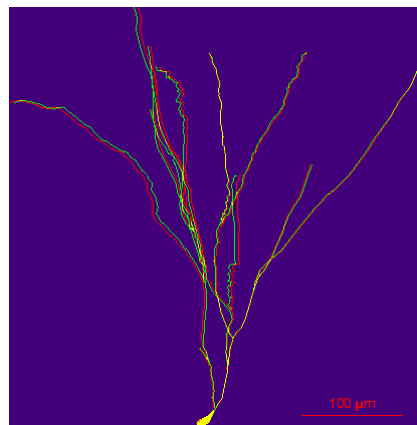
$$T/Z = d/f$$



Il neurone (stereo)



Neurone piramidale CA1
Ippocampo



Neurone granulare
Ippocampo



Problemi



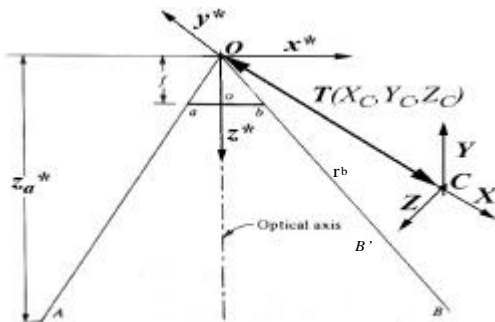
- Corrispondenza.
- Ricostruzione posizione 3D.
- Classificazione.

Low-level processing

High-level processing



Dal 2D al 3D



Invertiamo le
Equazioni di collinearità
 $P(X, Y, Z) \Rightarrow p(x, y, f)$
---->
 $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$x_a = x_0 + f * \frac{m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$y_a = y_0 + f * \frac{m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$z_a = f$$



Dal 2D al 3D



- Equazioni inverse $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$[m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)] * (x_a - x_o) = f[m_{11}(X - X_c) + m_{12}(Y - Y_c) + m_{13}(Z - Z_c)]$$

$$[m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)] * (y_a - y_o) = f[m_{21}(X - X_c) + m_{22}(Y - Y_c) + m_{23}(Z - Z_c)]$$

Sono equazioni lineari in **X, Y, Z**:

- $[m_{31}(x_a - x_o) - fm_{11}] X + [m_{32}(x_a - x_o) - fm_{12}] Y + [m_{33}(x_a - x_o) - fm_{13}] Z = [m_{31}(x_a - x_o) - fm_{11}] X_c + [m_{32}(x_a - x_o) - fm_{12}] Y_c + [m_{33}(x_a - x_o) - fm_{13}] Z_c$
- $[m_{31}(y_a - y_o) - fm_{21}] X + [m_{32}(y_a - y_o) - fm_{22}] Y + [m_{33}(y_a - y_o) - fm_{23}] Z = [m_{31}(y_a - y_o) - fm_{21}] X_c + [m_{32}(y_a - y_o) - fm_{22}] Y_c + [m_{33}(y_a - y_o) - fm_{23}] Z_c$

Identificano due piani:

- $a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = d_1$ // asse y
- $a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = d_2$ // asse x

Intersezione di due piani individua una retta nello spazio 3D (raggio della video-camera, camera ray). Retta per il punto sul piano immagine ed il centro di prospettiva.



Ricostruzione stereoscopica

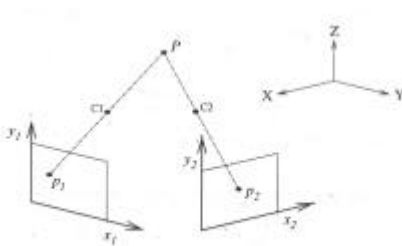


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

$$\{p_1(x, y) \iff p_2(x, y)\}$$

$$[p_1(xy) \mid p_2(xy)] \Rightarrow P(XYZ).$$

Equazioni di collinearità per due video-camere:

- $a_{1TV1} X + b_{1TV1} Y + c_{1TV1} Z = d_{1TV1}$
- $a_{2TV1} X + b_{2TV1} Y + c_{2TV1} Z = d_{2TV1}$
- $a_{1TV2} X + b_{1TV2} Y + c_{1TV2} Z = d_{1TV2}$
- $a_{2TV2} X + b_{2TV2} Y + c_{2TV2} Z = d_{2TV2}$



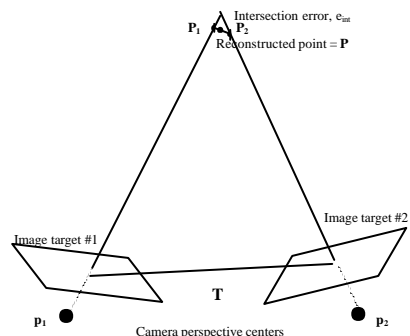
Ricostruzione - matrici



$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{1TV1} & a_{1TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale: $A P = B \Rightarrow P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura.
- Quando non ammette soluzioni?



Ricostruzione - Ray intersection

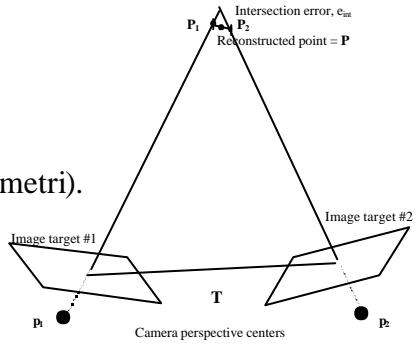


•Altra soluzione: equazioni in forma parametriche delle due rette:

$$\begin{aligned} X_1 &= Xc_1 + a_1 k & X_2 &= Xc_2 + a_2 h \\ Y_1 &= Yc_1 + b_1 k & Y_2 &= Yc_2 + b_2 h \\ Z_1 &= Zc_1 + c_1 k & Z_2 &= Zc_2 + c_2 h \end{aligned}$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).





Sommario



Il modello proiettivo. Calibrazione e Ricostruzione.

La calibrazione.

Cos'è la calibrazione?

Il bundle-adjustment.

Soluzione del bundle-adjustment.

Valutazione statistica della stima (calibrazione robusta).

Tecniche di calibrazione.

Calibrazione sul campo.

Inizializzazione del bundle-adjustment.

Ricostruzione 3D (ray-intersection).