

# L'intelligenza visiva

## L'optical flow - Il flusso ottico

Alberto Borghese  
Università degli Studi di Milano  
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)  
Dipartimento di Scienze dell'Informazione  
[borgnese@dsi.unimi.it](mailto:borgnese@dsi.unimi.it)



1/53



<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



## Sommario



### Che cos'è il flusso ottico?

Ipotesi sulla determinazione del flusso ottico.

Dal flusso ottico al campo di moto.

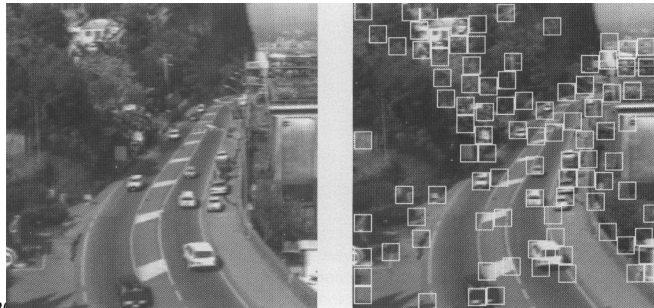
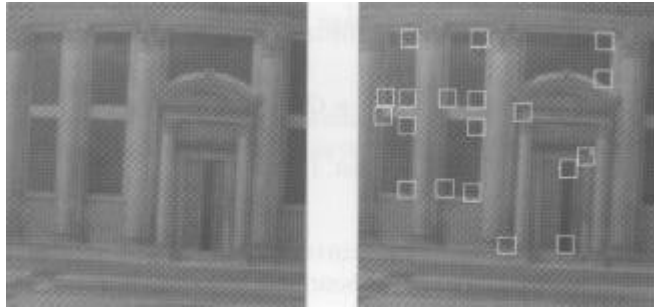
Determinazione del campo di moto.

Identificazione di features dall'analisi del gradiente.

Movimento da matched features.



## Esempio di feature: gli spigoli



A.A. 2003-2004

3/33

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



## Il flusso ottico



Origina dalla psicologia sperimentale della visione (1950-1960).

### PROBLEMA:

- Input al sistema visivo: una matrice bidimensionale di punti luminosi.
- Operazioni localizzate.
- Output sono unità: oggetti, persone nello spazio tridimensionale.

### SOLUZIONI:

- Gestalt (Koffka, 1935) raggruppamento in una percezione unitaria di elementi che hanno caratteristiche simili.
- Flusso ottico (Gibson, 1950).

### RICADUTE TECNOLOGICHE OGGIGIORNO:

- Compressori MPEG.
- Sistemi di Visione Artificiale.

A.A. 2003-2004

4/53

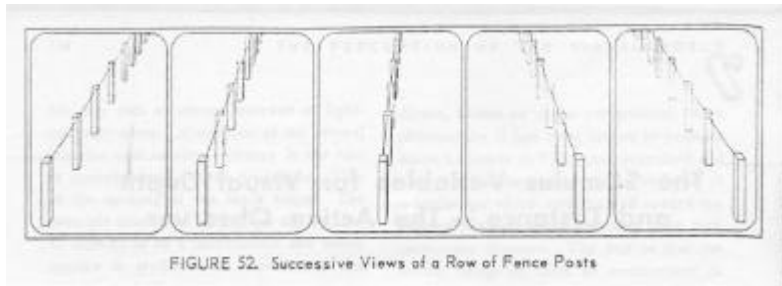
<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



## Da cosa deriva il flusso ottico?



- Variazioni di luminosità in immagini statiche => bordi => oggetti + posizione 3D (stereo).
- Variazioni di luminosità si possono ottenere anche se ci spostiamo noi davanti ad uno scenario fermo (variazioni temporali di luminosità).



In questo caso lo spostamento dell'immagine di un palo sulla retina è inversamente proporzionale alla distanza del palo dall'immagine.



## Che cos'è il flusso ottico?



L'intuizione di Gibson è stata che per ciascun punto degli oggetti nello spazio 3D si può ottenere questa misura => campo di movimento.

- **FLUSSO OTTICO: il movimento apparente del pattern di luminanza dell'immagine.**

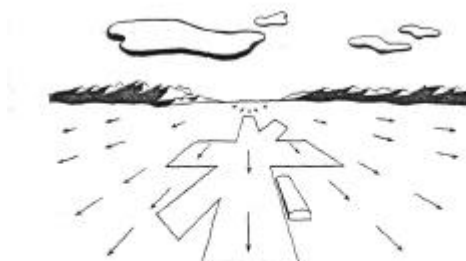


FIGURE 53. Motion Perspective in the Visual Field Ahead

Movimenti omogenei sono generati dallo stesso oggetto => segmentazione, struttura e posizione 3D. Nessuna conoscenza 3D.

Approccio bottom-up.



## Come rappresentiamo il flusso ottico

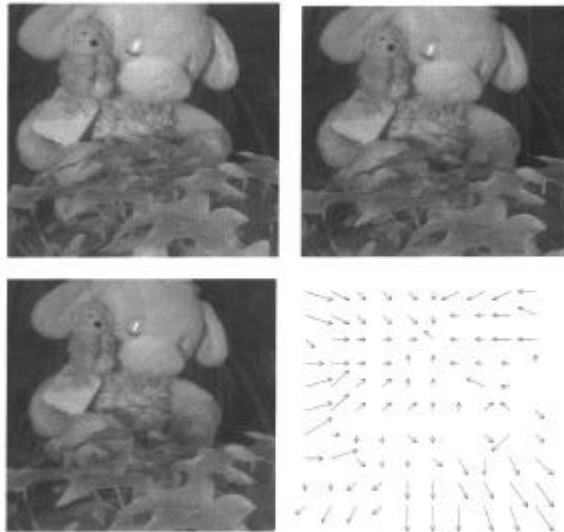


Figure 8.3 Three frames from a long image sequence (left to right and top to bottom) and the optical flow computed from the sequence, showing that the plant in the foreground is moving towards the camera, and the soft toys away from it.



## Sommario



Che cos'è il flusso ottico?

**Ipotesi sulla determinazione del flusso ottico.**

Dal flusso ottico al campo di moto.

Determinazione del campo di moto.

Identificazione di features dall'analisi del gradiente.

Movimento da matched features.



## Come calcoliamo il flusso ottico?



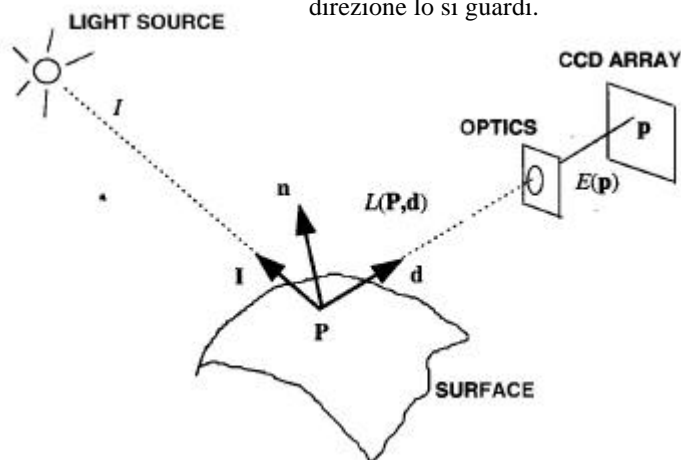
- Problema della corrispondenza in due istanti temporali successivi.
  - Campionamento temporale fitto => piccoli spostamenti.
  - Problema: stima del flusso ottico a partire dalle variazioni di luminosità.
- $I = I(x(t), y(t), t)$ . Luminosità è funzione dello spazio e del tempo. Spazio. I punti 3D possono spostarsi nel tempo, e, quindi, anche la loro proiezione.
- Tempo. La luminosità del punto varia se varia la sorgente di illuminazione.
- Derivata totale di  $I(\cdot)$
  - Deriviamo l'equazione della *costanza della luminosità*.



## Ipotesi 1: Superfici Lambertiane



Un punto della superficie appare avere la stessa luminosità da qualsiasi direzione lo si guardi.



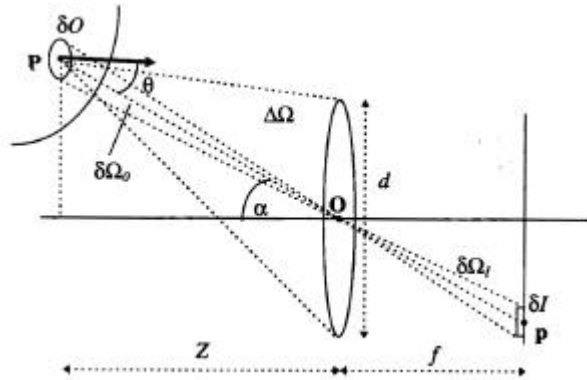
La quantità di luce riflessa  $L(P,d) = \rho I^T n$ , dipende: dall'albedo in  $P$  e dall'angolo tra la normale alla superficie in  $P$  ( $n$ ) ed il raggio incidente  $I$ .



## Ipotesi 2: Proiezione quasi-frontale



Dobbiamo legare la radianza della superficie all'irradianza dell'immagine.



Luminosità della proiezione:  $I(\mathbf{p}) = L(\mathbf{P}) * \pi/4 * (d/f)^2 * \cos^4(\alpha)$ .



## Variazione locale di luminosità



•  $I = I(\mathbf{p}(x,y),t)$ . Luminosità è funzione della posizione sul piano immagine e del tempo  $\implies dI/dt = 0$  - **Equazione della costanza della luminosità dell'immagine.**

• Calcoliamo la derivata totale rispetto al tempo:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

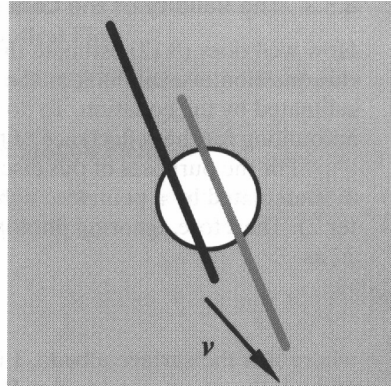
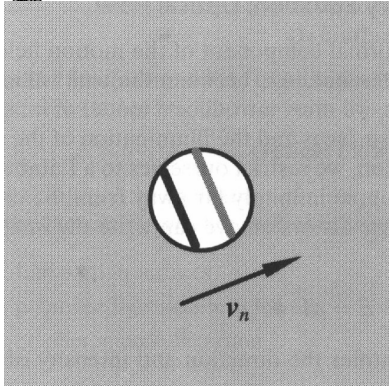
• Variazioni di luminosità si possono registrare se cambia il punto 3D che si proietta in un pixel. In particolare:

$$\nabla I \cdot \mathbf{v} = - \frac{\partial I}{\partial t}$$

Traduce variazioni temporali di luminosità in informazioni sul gradiente spaziale,  $\nabla I$ , e sul campo di velocità sul piano immagine,  $\mathbf{v}$  (**flusso ottico**).



## Problema dell'apertura



$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} v_x + \frac{\partial I}{\partial y} v_y + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

$$\nabla I \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial I}{\partial t}$$

Ipotesi: conosciamo i bordi dell'immagine.

E' una equazione in 2 incognite:  $v_x$  e  $v_y$ . Solo la componente normale si può determinare.

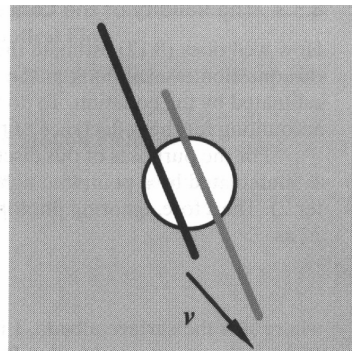
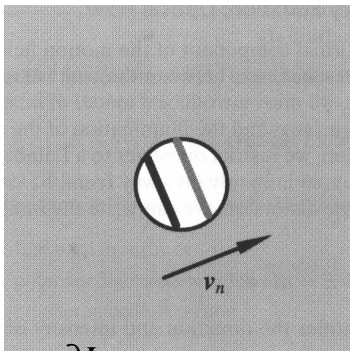
A.A. 2003-2004

13/53

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



## Problema dell'apertura



$$\nabla I \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

$$\nabla I \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

$$\nabla I_x v_x + \nabla I_y v_y = -\frac{\partial I}{\partial t}$$

Supponiamo il bordo orientato come l'asse x o l'asse y

- Se il bordo è orientato come l'asse y,  $\nabla I_x = 0$   
 $v_x$  non può essere osservato.

- Se il bordo è orientato come l'asse x,  $\nabla I_y = 0$   
 $v_y$  non può essere osservato.

A

~borghese



## Come determinare il flusso ottico?



$$\nabla I \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial I}{\partial t} \Rightarrow v_n = -\frac{\frac{\partial I}{\partial t}}{\|\nabla I\|}$$

La componente normale della velocità in un punto dipende dal gradiente spaziale (bordo) e dalla variazione di luminosità.

### Soluzioni (Barron et al., 1994):

- Risolvere le equazioni differenziali per ogni punto dell'immagine.
- Calcolare le derivate seconde dell'equazione di costanza della luminosità e risolvere per ogni punto dell'immagine.
- Approssimazione lineare e stima locale ai minimi quadrati (soluzione semplice ed efficace).
- Estrazione di features significative e calcolo del loro spostamento.



## Sommario



Che cos'è il flusso ottico?

Ipotesi sulla determinazione del flusso ottico.

**Dal flusso ottico al campo di moto.**

Determinazione del campo di moto.

Identificazione di features dall'analisi del gradiente.

Movimento da matched features.





## Dal flusso ottico al campo di moto



Per superfici Lambertiane e visione frontale dell'oggetto, la quantità di luce incidente il sensore, risulta in prima approssimazione:  $I(\mathbf{P}, d) = \rho \mathbf{I}' \mathbf{n}$ .

$$\nabla I \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial I}{\partial t} \Rightarrow v_n = -\frac{\frac{\partial I}{\partial t}}{\|\nabla I\|}$$

La componente normale della velocità in un punto dipende dal gradiente spaziale (bordo) e dalla variazione di luminosità.

Quale altra condizione possiamo derivare dall'equazione di costanza della luminosità?



## Come viene influenzata l'irradianza dal moto



Partiamo dal modello Lambertiano della riflessione:  $E = \rho \mathbf{I}' \mathbf{n}$ .

Deriviamo rispetto al tempo entrambi i membri.

Per sorgenti all'infinito, solo  $\mathbf{n}$  è funzione del tempo.

Supponiamo di dare un generico movimento (roto-traslatorio) alla superficie:  $\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) + \mathbf{T} + w \Lambda (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ .

Dato che  $\mathbf{T}$  non dipende da  $\mathbf{P}$ , otteniamo che  $d\mathbf{n}(t)/dt = w \Lambda \mathbf{n}$

$$\nabla E \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial E}{\partial t} \implies \nabla E \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\nabla E \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial E}{\partial t} = \rho (\mathbf{I}') (w \Lambda \mathbf{n}).$$



### 3. Moto rotatorio con asse parallelo alla normale o moto traslatorio



$$\frac{dE(\mathbf{p})}{dt} = k \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{n}}{dt} = k \mathbf{I}^T (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})$$

Cosa ci dice? La quantità è nulla se:  $\mathbf{w} // \mathbf{n}$ .

Altrimenti: 
$$\nabla E \mathbf{v} + \frac{\partial E}{\partial t} = k \mathbf{I}^T (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})$$

L'errore su  $\mathbf{v}$ , supponendo  $I(\mathbf{p}) = \text{cost.}$  è: 
$$\Delta \mathbf{v} = k \frac{\mathbf{I}^T (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})}{\|\nabla I\|}$$

che decresce con il “crescere” del bordo.



### Validità flusso ottico = campo di moto



*Ipotesi sul processo di formazione dell'immagine:*

- Superfici Lambertiane
- Sorgenti luminose all'infinito (raggi paralleli a sé stessi).
- Visione quasi-frontale.

*Ipotesi sul tipo di movimento della superficie:*

- Movimento traslatorio oppure
- Movimento rotatorio con asse di rotazione orientato nella direzione della sorgente luminosa.

L'errore sul campo di moto è inversamente proporzionale al gradiente spaziale di luminosità.



## Sommario



Che cos'è il flusso ottico?

Ipotesi sulla determinazione del flusso ottico.

Dal flusso ottico al campo di moto.

**Determinazione del campo di moto.**

Identificazione di features dall'analisi del gradiente.

Movimento da matched features.



## Algoritmo di Lucas e Kanade, 1991



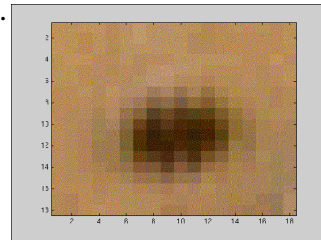
*Ipotesi:*

- L'equazione di costanza della luminosità, dà una buona stima di  $v_n$ .
- Il campo di moto può essere approssimato localmente (nello spazio e nel tempo) come costante.

Consideriamo una finestra  $N \times N$  dell'immagine,  $W$ , in due istanti di tempo consecutivi. Tutti i calcoli saranno operati sui pixel di  $W$ .



Finestra  $N \times N$  di un'immagine in 2 istanti successivi.





## Scrittura di sistema lineare in $\mathbf{v}_p$



- Fitting di un campo di velocità costante su regioni dell'immagine.
- Sfruttiamo l'elevata correlazione spazio-temporale di due immagini

$$\nabla I_x v_x + \nabla I_y v_y = -\frac{\partial I}{\partial t} \quad \forall \mathbf{p} \in W$$

- $v_x, v_y$  uguali in tutti i pixel di  $W$ .

$$a v_x + b v_y = c$$

- Abbiamo  $N \times N$  equazioni in 2 incognite.



## Soluzione sistema lineare in $\mathbf{v}_p$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \nabla I_{p_1 x} & \nabla I_{p_1 y} \\ \nabla I_{p_2 x} & \nabla I_{p_2 y} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla I_{p_N^2 x} & \nabla I_{p_N^2 y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{p_1} \\ -\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{p_2} \\ \vdots \\ -\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{p_N^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad \implies \quad \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{c}$$

$\mathbf{x} = [v_x, v_y]$ ,  $\mathbf{v}_p$  calcolata al centro della finestra  $W$ .



## Riassunto



• **Input:** una sequenza di immagini,  $I(x,y,t)$  con  $0 \leq x \leq X_{\max}$  e  $0 \leq y \leq Y_{\max}$ .  $0 \leq t \leq T$ . Dove con  $[X_{\max}, Y_{\max}]$ .

• **Filtriamo spazialmente** l'immagine ad esempio utilizzando un filtro Gaussiano ( $\sigma_{\text{spaziale}} = 1.5$  pixels) per lasciare vivi solamente i contorni veri (la scala è legata alla scala dei bordi).

• **Filtriamo temporalmente le immagini** per eliminare piccole variazioni di illuminazione dovute a quantizzazione o variazioni di luminosità ( $\sigma_{\text{temporale}} = 1.5$  frames; la scala è legata alla velocità del movimento).

• **Identifichiamo le regioni  $W$**  per ogni punto,  $\mathbf{p}$ . Per ogni regione:  
Calcoliamo le matrici  $A$  ed il vettore  $c$ .  
Risolviamo il sistema per determinare  $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ .



## Osservazioni



- Operazioni locali (poche operazioni sui pixel adiacenti).
- Nessuna iterazione.

Come mai se dall'equazione di costanza della luminosità derivo solamente la componente normale, con l'algoritmo di Lucas-Kanade, derivo la componente di velocità in direzione arbitraria?

*Perché considero gradienti orientati in modo diverso all'interno della finestra  $W$ .*

***Come migliorare le prestazioni:***

- Si può poi calcolare la somma vettoriale di  $\mathbf{v}_p$  su più frame.
- Si può aumentare l'ampiezza della finestra (ma c'è un compromesso tra ampiezza della finestra di osservazione e validità dell'approssimazione velocità costante).



## Come irrobustire l'algoritmo



Cosa succede se  $v_n$  non è uguale in tutti i  $\mathbf{p}$  di  $W$ ?

Ci sarà un errore di stima:  $v_n$  non rappresenta il movimento di tutti i pixel in  $W$ . Come sarà distribuito questo errore?

Sarà massimo ai bordi della regione.

$$\nabla I_x v_x + \nabla I_y v_y = -\frac{\partial I}{\partial t} \quad \forall \mathbf{p} \in W$$

Pesiamo ciascuna delle  $N \times N$  equazioni con un peso  $s$ :

$$s = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_c|$$



## Stima pesata



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \nabla I_{p_1 x} & \nabla I_{p_1 y} \\ \nabla I_{p_2 x} & \nabla I_{p_2 y} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla I_{p_{N^2} x} & \nabla I_{p_{N^2} y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{p_1} \\ -\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{p_2} \\ \vdots \\ -\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{p_{N^2}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c} \implies \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \mathbf{S} = \text{diag}[|\mathbf{p}_{11} - \mathbf{p}_c|; |\mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}_c|; \dots; |\mathbf{p}_{NN} - \mathbf{p}_c|]$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{c}$$



## Osservazione



Quando il sistema analizzato non è risolubile?

$$A = \begin{bmatrix} \nabla I_{p_{1x}} & \nabla I_{p_{1y}} \\ \nabla I_{p_{2x}} & \nabla I_{p_{2y}} \\ \vdots & \vdots \\ \nabla I_{p_{N^2x}} & \nabla I_{p_{N^2y}} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum_k \nabla I_{p_{kx}} \nabla I_{p_{kx}} & \sum_k \nabla I_{p_{kx}} \nabla I_{p_{1y}} \\ \sum_k \nabla I_{p_{kx}} \nabla I_{p_{1y}} & \sum_k \nabla I_{p_{ky}} \nabla I_{p_{ky}} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$



## Condizione di risolubilità



$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum_k (\nabla I_{p_{kx}})^2 & \sum_k \nabla I_{p_{kx}} \nabla I_{p_{1y}} \\ \sum_k \nabla I_{p_{kx}} \nabla I_{p_{1y}} & \sum_k (\nabla I_{p_{ky}})^2 \end{bmatrix}$$

Dipende solamente da informazioni spaziali (gradiente).

**La matrice  $A^T A$  è singolare, quando:**

- I gradienti sono nulli (non ci sono bordi: rango 0).
- I gradienti sono orientati in una sola direzione (bordi paralleli): rango 1.

Nel secondo caso cosa riesco a vedere? Solamente la direzione normale della velocità, è il *problema dell'apertura*. Occorre quindi che i bordi non siano paralleli tra loro.



## Sommario



Che cos'è il flusso ottico?

Ipotesi sulla determinazione del flusso ottico.

Dal flusso ottico al campo di moto.

Determinazione del campo di moto.

**Identificazione di features dall'analisi del gradiente.**

Movimento da matched features.



## Features mediante analisi dei gradienti



Le stesse features vengono identificate in una sequenza di immagini.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum_k (\nabla I_{p_k x})^2 & \sum_k \nabla I_{p_k x} \nabla I_{p_1 y} \\ \sum_k \nabla I_{p_k x} \nabla I_{p_1 y} & \sum_k (\nabla I_{p_k y})^2 \end{bmatrix}$$

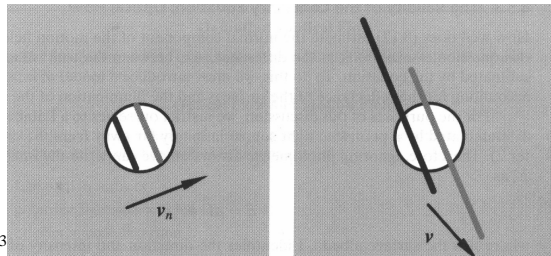
Come possiamo identificare una feature, analizzando i gradienti spaziali?

Possiamo ad esempio trovare gli spigoli in un'immagine.

Utilizzando la svd:

$$A^T A = U W V$$

$$W = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0.$$







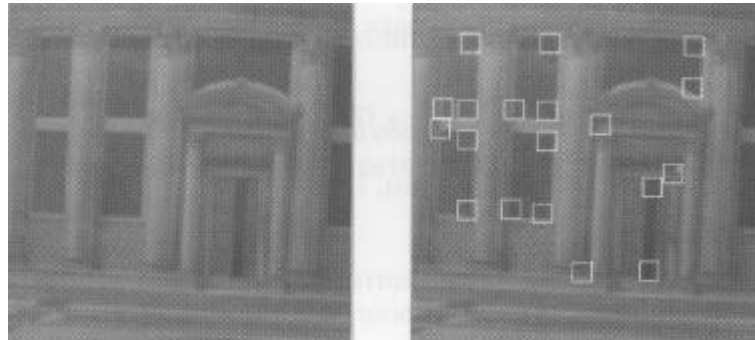
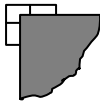
## Analisi dei valori singolari



$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ .  $\lambda_2$  è il punto critico.

- Gli autovettori codificano le *direzioni* prevalenti dei contorni.
- Gli autovalori codificano la *forza* dei contorni lungo le due direzioni principali (l'energia).

- Su 4 pixel:



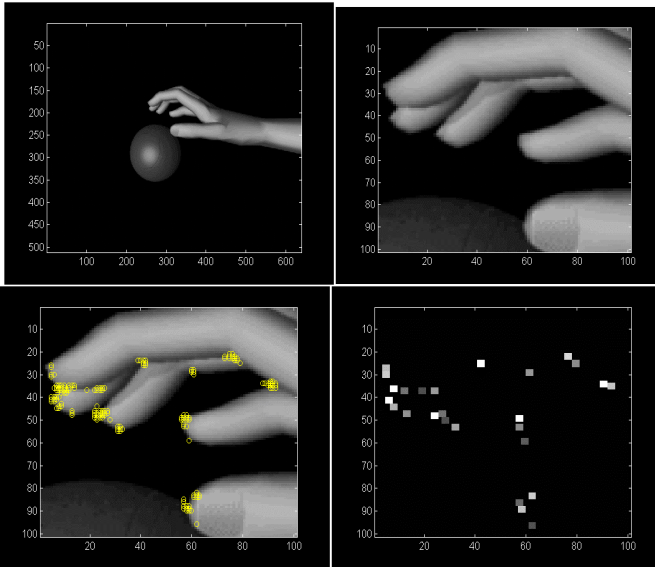
## Features dal gradiente spaziale



- Partiamo da: (a) un'immagine  $I(x,y)$ ; (b) una soglia sull'intensità minima del gradiente,  $\lambda_{2 \min}$ ; (c) la dimensione della finestra di analisi,  $W$ .
- Per ogni finestra  $W$ , calcoliamo i gradienti spaziali.
- Per ciascuna finestra:
  - Calcoliamo  $\lambda_2$ .
  - Se  $\lambda_2 > \lambda_{2 \min}$ , salviamo il centro della finestra nella lista delle features candidate.
- Ordiniamo la lista delle feature per valori di  $\lambda_2$  decrescenti.
- Esaminiamo la lista. Per ogni feature, vengono eliminate tutte quelle altre feature che cadono all'interno di  $W$ .



# Tracking di feature



Problemi su  
superfici non  
strutturate

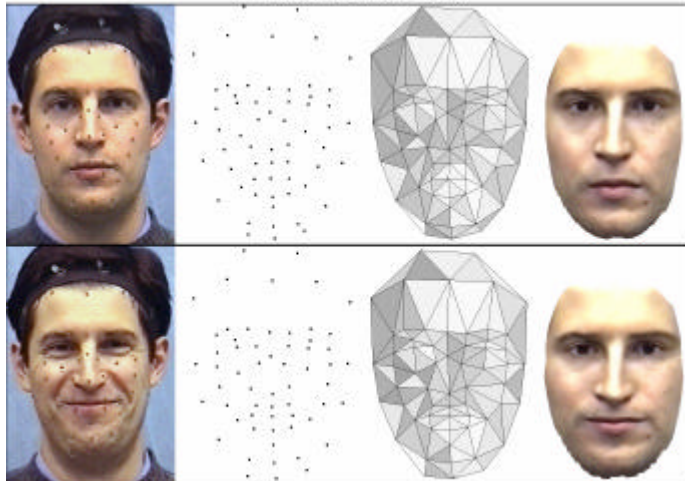


# E per le superfici non strutturate?



Markers, Shape from Shading.....

Riconoscimento di marker





## Riassunto



- Determinazione del campo di moto 2D mediante tecniche differenziali o matching di feature.
- Flusso ottico: spostamento del pattern di luminosità di un'immagine indotto dal movimento rispetto alla scena.
- Sotto alcune ipotesi, il flusso ottico si può ricavare da un'analisi delle variazioni temporali di luminosità.
- Esistono algoritmi semplici (locali e non iterativi) per determinare una buona approssimazione del flusso ottico.
- Gli stessi algoritmi possono essere utilizzati per determinare feature (spigoli) nelle immagini.



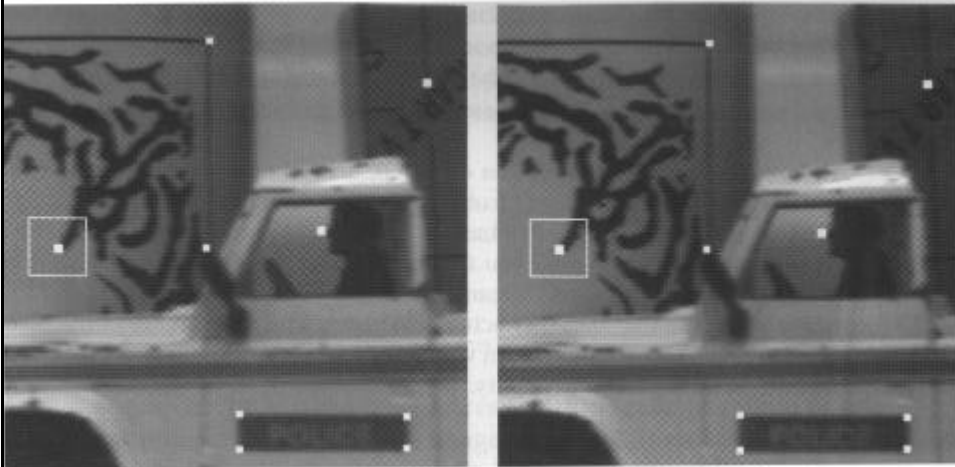
## Sommario



Che cos'è il flusso ottico?  
Ipotesi sulla determinazione del flusso ottico.  
Dal flusso ottico al campo di moto.  
Determinazione del campo di moto.  
Identificazione di features dall'analisi del gradiente.  
**Movimento da matched features.**



## Il problema della corrispondenza



Problema di ricerca: elementi uguali nelle due immagini.



## Matching features over time



*La filosofia è:* determino le features in due quadri consecutivi e **poi** calcolo il moto.

- 1) Eseguo la funzione di riconoscimento delle features sulla coppia di immagini consecutive.
- 2a) Determino le features al tempo  $t$ ,
- 2b) Stimo il loro spostamento delle features da un frame all'altro, dal tempo  $t$  al tempo  $t+1$ ,
- 2c) Correggo la stima con il calcolo della posizione delle feature al tempo  $t+1$ , nell'intorno della predizione



## Tecniche di matching



Cross-correlazione  
Block matching  
Least squares matching



## Matching features over time



1) Eseguo la funzione di riconoscimento delle features sulla coppia di immagini consecutive.

*Problemi relativi al matching di feature:*

- a) Quali elementi considerare feature?
- b) Quale misura di similarità considerare?

*Come effettuare il matching delle feature?*

- a) Finestre,  $W$ .
- b) Misura di matching tra le due immagini.
- c) Massimo della misura di matching.



## 1) Matching mediante correlazione



$$C(x,y) = \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C I_2(x+r-1, y+c-1) I_1(r, c) \quad \begin{array}{l} \bullet 0 < x < N-R \\ \bullet 0 < y < M-C \end{array}$$

Immagine N x M

Finestra R x C

Centriamo la finestra di correlazione in  $\mathbf{p}_w(x_w, y_w)$  (vertice in basso, a sx).

$$C(d_x, d_y) = \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C I_2(d_x + x_w + r - 1, d_y + y_w + c - 1) I_1(r - 1 + x_w, c - 1 + y_w)$$

$d_x, d_y$  posizione della correlazione in funzione della finestra.

La feature corrispondente a  $I_1(x_w, y_w)$  nell'immagine  $I_2$  sarà nella posizione:

$$d_f(d_{x_f}, d_{y_f}) = \arg \max_{d_x, d_y} (C(d_x, d_y))$$



## 2) Block Matching



Analisi della misura di correlazione. Qual è il problema?

$$C(d_x, d_y) = \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C I_2(d_x + x_w + r - 1, d_y + y_w + c - 1) I_1(r - 1 + x_w, c - 1 + y_w)$$

Variazioni di luminosità globali. Si introduce il *block matching*.

$$D(u, v) = -(u-v)^2 = 2uv - u^2 - v^2$$

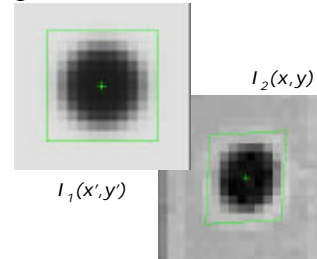
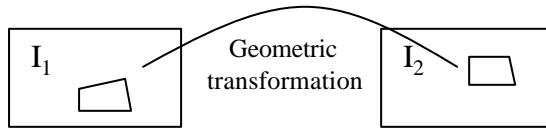
Regioni molto luminose o poco luminose pesano ugualmente  
=> *equalizzazione*.



### 3) Least-squares matching



Nel matching si tiene conto della trasformazione geometrica del pattern dovuta al movimento.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \quad I_1(x', y') = r_1 I_2(x, y) + r_2$$

→ Minimizz. diff. intensita':  $\sum (I_1 - r_1 I_2 - r_2)^2 \rightarrow \text{Min}$  rispetto a  $r_1$  e  $r_2$  (spostamento)

**Result:** Stima dei 6 parametri geometrici (Adaptive LSM)

Precisione con least square matching:  $< 1/25$  Pixel



### Determinazione del moto mediante correlazione



Parametri "application dependent":

- Ampiezza della finestra della feature.
- Ampiezza della regione di ricerca (teoricamente tutta l'immagine).

#### Riassunto

I passi dell'algoritmo sono:

- Isolare le features (individuare le finestre).
- Per ogni finestra (punto al centro della finestra), calcolare la funzione similitudine (correlazione o block matching) con l'immagine successiva (o una sottoparte).
- La feature verrà localizzata sulla seconda immagine nella posizione che massimizza la funzione di similitudine.



## Determinazione del moto mediante block matching + optical flow



- 1) Determino le features nel primo frame  $I_1(\mathbf{p})$  con una finestra  $W(\mathbf{p}_w)$ .
- 2) Per ciascuna feature, stimo il vettore spostamento mediante optical flow:  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$ .
- 3) Considero il secondo frame,  $I_2(\mathbf{p})$ .
- 4) Nel secondo frame analizzo una finestra nell'intorno di  $\mathbf{p}_w + \mathbf{d}$ .
- 5) Calcolo l'errore di "Block matching".

$$\mathbf{d}(d_{x_f}, d_{y_f}) = \arg \max_{d_x, d_y} (B(I_1, I_2))$$

- 6) Se l'errore è sopra soglia, considero l'errore come correzione dello spostamento.
- 7) Itero i passi 4-6 dove ad ogni iterazione considero la finestra in  $I_2(\mathbf{p})$  nell'intorno di  $\mathbf{p}_w + \mathbf{d}$  con  $\mathbf{d} = \mathbf{d} + \mathbf{d}_b$ .



## Matching feature (Riassunto)



- Tecniche di correlazione. Lavorano sull'immagine intera. Possibilità di restringere la finestra di ricerca.
- La correlazione mediante "block matching" consente di compensare variazioni di luminosità globali.
- Tecniche basate su campo di moto. Lavorano su una finestra.
- Algoritmi ricorsivi con risoluzione crescente dello spostamento.

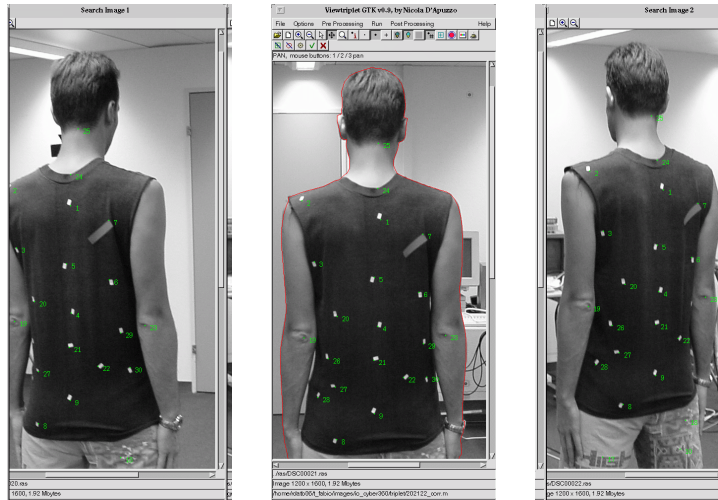




# Matching di feature per la ricostruzione



Determinazione di Corrispondenze su immagini multiple



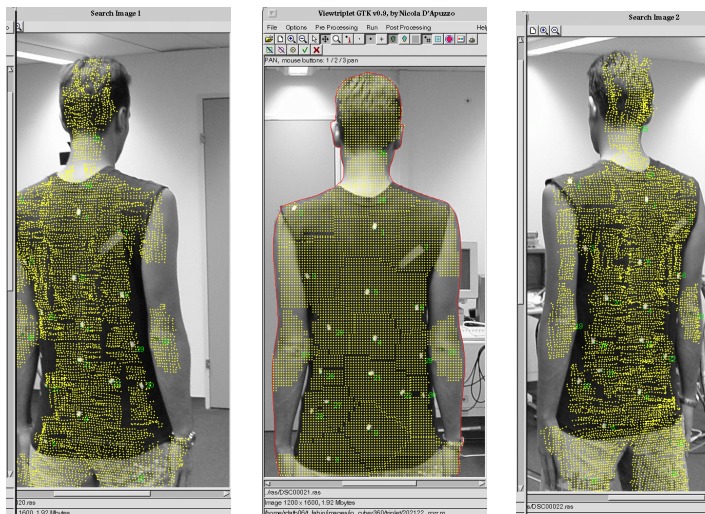
I punti individuati servono per inizializzare il processo.



# Matching di feature per la ricostruzione

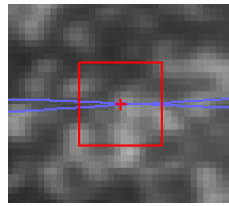


Determinazione di Corrispondenze su immagini multiple

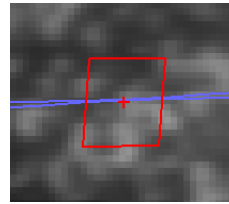




# Least-squares matching



template image  
 $f(x,y)$



search image  
 $g(x,y)$

- MIN. funzione (L2 norm dei residui della stima ai min. quadrati) che misura la diff. tra i valori di grigio di f e g

- La posizione di g e' descritta da **6 parametri**  
(2 traslazioni, 2 rotazioni, shape, correzione radiometrica)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g(x,y) \\ f(x,y) - e(x,y) &= g(x,y) \end{aligned}$$

- result check:  $\sigma^2_0$  (analisi dei residui)

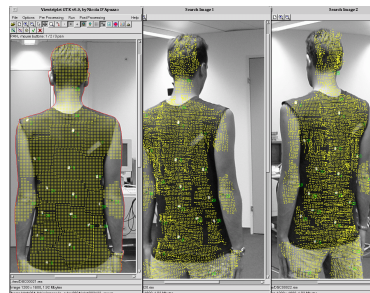


# Ricostruzione di persone ferme



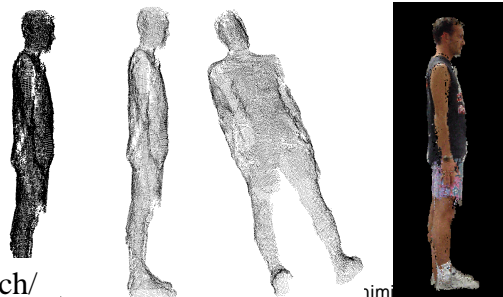
## A) Matching

- triplette di immagini
- 2D corrispondenze



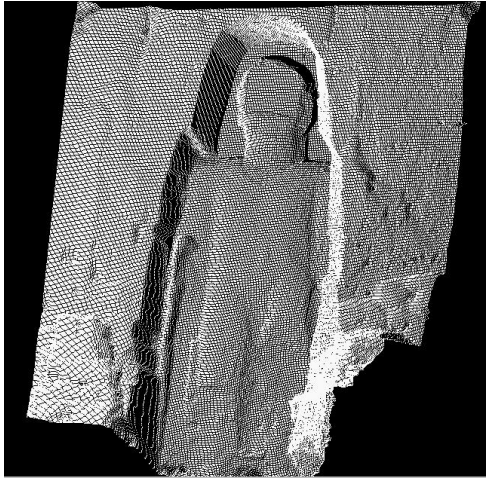
## B) 3D Reconstruction

- forward intersection
- filtering
- point cloud con pixel gray value





# Ricostruzione da immagini



<http://www.photogrammetry.ethz.ch/>