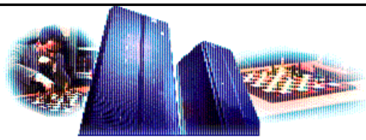
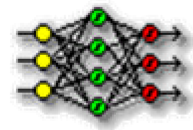




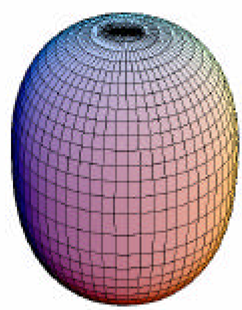
L'intelligenza visiva
Lezione di azzeramento: introduzione alla geometria analitica

Alberto Borghese
Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Lucidi in parte tratti dalla pagina WEB:
http://klee.usr.dsi.unimi.it/~dan/PGL/doc/slides/
Del prof. D. Marini

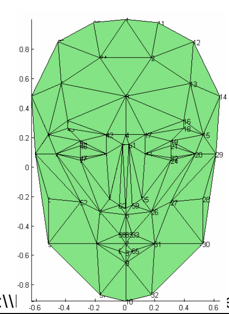
Descrizione analitica di forme geometriche

Descrizione parametrica (e.g. Quadriche, spline), rappresentazione sotto forma di funzioni.



Mesh, descrizione per punti.

Insieme di punti + connettività (e.g. VRML)



Geometria Analitica

- Le coordinate dei parametri e dei punti sono espresse in un proprio **sistema di riferimento** (faremo riferimento alle mesh per semplicità).
  - i vertici dell'oggetto sono definiti rispetto a un orientamento proprio e naturale
  - un oggetto complesso può essere decomposto in elementi più semplici col proprio riferimento locale e in seguito assemblato aggragando oggetti elementari.

Per collocare correttamente nello spazio un oggetto si applicano le trasformazioni che cambiano il riferimento locale.

- Descrizione analitica di forme geometriche semplici e della loro trasformazione geometrica (anche proiettiva).

Spazi vettoriali (definizione)

I) Uno spazio vettoriale W è un gruppo additivo rispetto all'addizione sse:

E' definita l'addizione: $\boldsymbol{w = x + y}$.

Proprietà: commutativa, associativa.

Esistenza: dello zero e dell'opposto.

II) E' definita l'operazione di moltiplicazione numerica per uno scalare:

$$\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\lambda$$

Proprietà: distributiva rispetto alla somma ed associativa.

Esistenza: dell'elemento neutro.

Base di uno spazio vettoriale

$a(\overline{u}+\overline{v}) = a\overline{u} + a\overline{v}$ linearità

$a_1\overline{u_1} + a_2\overline{u_2} + ... + a_n\overline{u_n} = \overline{w}$ combinazione lineare

$a_1\overline{u_1} + a_2\overline{u_2} + ... + a_n\overline{u_n} = 0$ se $a_1 = a_2 .. = a_n = 0$

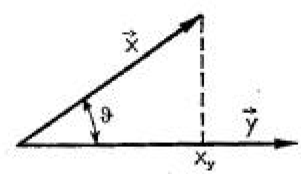
allora $(\overline{u_1},..., \overline{u_n})$ sono lineamente indipendenti

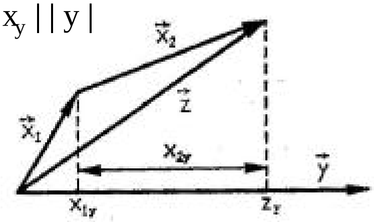
n è la dimensione dello spazio, $(\overline{u_1},..., \overline{u_n})$ è la base dello spazio

Spazi Hilbertiani

Viene definito il prodotto interno ed associato alla norma di un vettore ed alla metrica associata allo spazio.

x • **y** = | **x** | | **y** | cos(θ) = | x_y | | y |





Proprietà commutativa: **x** · **y** = **y** · **x**

Annullamento del prodotto: **x** · **x** = 0 sse **x** = 0

Funzione lineare del primo fattore e vale la proprietà associativa:

$(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

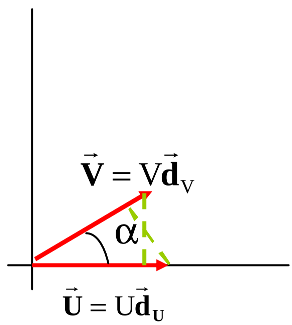
$(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x_1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{y}$

Lo scalare λ può essere inteso come coordinata lungo un asse **x** (**x** è un versore in questo caso).

Prodotto scalare, significato geometrico

Dalla $\lambda(\mathbf{x}) = \|\lambda(\mathbf{x})\|\mathbf{x'}$ con $\mathbf{x'}$ versore di $\mathbf{x}$, segue che:

Proiezione ortogonale di un segmento su un altro.



Calcolo il prodotto scalare in questo modo:

$$S = \vec{\mathbf{U}} \bullet \vec{\mathbf{V}} = UV(\mathbf{d_U} \bullet \mathbf{d_V})$$

$$S = UV(d_{U_x} d_{V_x} + d_{U_y} d_{V_y} + d_{U_z} d_{V_z}) =$$

$$UV\cos(a)$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}}{|\mathbf{V}\|\mathbf{W}|}$$

Il coseno dell'angolo tra 2 segmenti è il prodotto scalare normalizzato.

Spazi Hilbertiani e base dello spazio

Viene definito il prodotto interno ed associato alla norma di un vettore e alla metrica associata allo spazio.

$(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n})$ è la base dello spazio

Se vale la relazione: $\mathbf{u_i} \bullet \mathbf{u}_j = 0 \quad i \neq j$

Le basi sono ortogonali (spazi Euclidei)

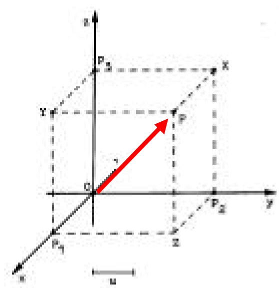
Sotto queste ipotesi, il calcolo vettoriale in uno spazio vettoriale W, qualsiasi, si effettua (per quanto concerne l'addizione e la moltiplicazione numerica), con le stesse regole formali del calcolo vettoriale nel piano o nello spazio 3D Euclideo.

Vettori

- Sono identificati da 2 punti: P e Q. Sono caratterizzati da modulo (distanza tra P e Q), orientamento e verso.

Vettore (P – O) in rosso.

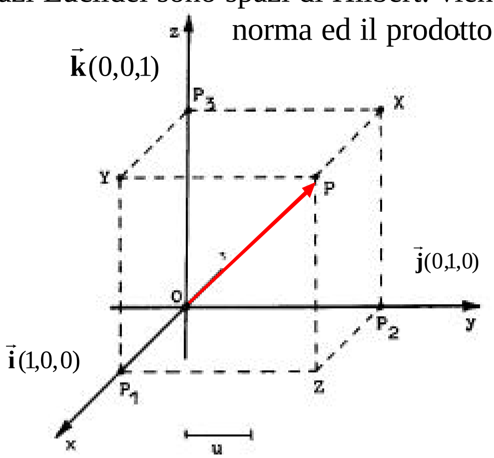
Spazio vettoriale.



I versori: ***i, j, k*** sono i vettori di lunghezzza unitaria che individuano gli assi cartesiani, sono ortogonali, e formano una terna di vettori *ortonormali*, una ***base*** ortogonale (ortonormale) dello spazio cartesiano.

La rappresentazione analitica di un punto

Spazi Euclidei sono spazi di Hilbert: viene definita una metrica, una norma ed il prodotto interno.



$$P_x = \mathbf{P} \bullet \mathbf{i}$$
$$P_y = \mathbf{P} \bullet \mathbf{j}$$
$$P_z = \mathbf{P} \bullet \mathbf{k}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = [P_x \ P_y \ P_z]$$
$$= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

Proprietà del segno del prodotto scalare

- se $\boldsymbol{V.W} > 0$ l'angolo α è: $-90° < \alpha < 90°$
- se $\boldsymbol{V.W} = 0$ l'angolo α è: $-90°$ o $90°$
- se $\boldsymbol{V.W} < 0$ l'angolo α è: $90° < \alpha < 270°$

il prodotto scalare si può quindi usare per valutare l'orientamento di 2 segmenti.

Il prodotto scalare è nullo se i segmenti sono ortogonali (condizione di perpendicolarità)

NB $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Condizione di ortogonalità: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Prodotto vettore (cross product)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_y V_z - U_z V_y) \\ (U_z V_x - U_x V_z) \\ (U_x V_y - U_y V_z) \end{bmatrix}$$

Il risultato è un vettore a sua volta.

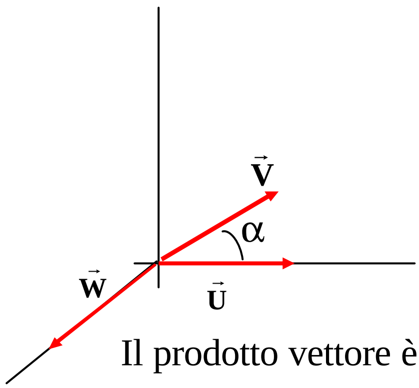
$\mathbf{U} = \mathbf{i}$

$\mathbf{V} = \mathbf{j}$

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} (00 - 00) \\ (00 - 00) \\ (11 - 00) \end{bmatrix} = [0\ 0\ 1] = \vec{\mathbf{k}}(0,0,1)$$

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}}$$



Vettore normale al piano identificato da **U** e **V**

$$|\mathbf{W}| = |\mathbf{U}||\mathbf{V}|\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = |(\vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}})| / (|\mathbf{U}||\mathbf{V}|)$$

Il prodotto vettore è nullo se i segmenti sono paralleli

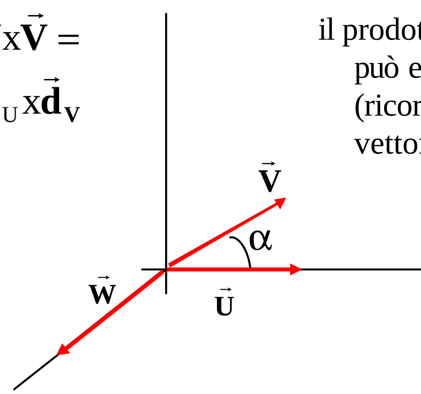
Il senso è coerente con la “regola della mano destra”

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} =$$

$$(UV)\vec{\mathbf{d}}_U \mathrm{x} \vec{\mathbf{d}}_V$$

il prodotto vettore (*cross product*) si può esprimere con i versori (ricordiamo che la somma di due vettori è un vettore).



$i = (1,0,0)$

$j = (0,1,0)$

$k = (0,0,1)$

$V = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

$U = u_1 i + u_2 j + u_3 k$

$$\mathbf{W} = (v_2 u_3 - v_3 u_2)\mathbf{i} + (v_1 u_3 - v_3 u_1)\mathbf{j} + (v_1 u_2 - v_2 u_1)\mathbf{k}$$

Matrici

$$A = [a_{i,j}] \qquad A^T = [a_{j,i}]$$

$$\alpha A = [\alpha a_{i,j}] \qquad C = A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$C = AB = [c_{i,j}] \text{ dove } [c_{i,j}] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Prodotto degli elementi di una riga per gli elementi di una colonna.
Se A (n x m) ➔ B (m x p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ==> \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$$

Matrici (Proprietà)

La somma è associativa e commutativa (A + B) + C = (A + (B + C).

Il prodotto è associativo rispetto alla somma ma non commutativo
(A+B)C = AC + BC. AB $\neq$ BA

$$I = [a_{i,j}] = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{matrice identità}$$

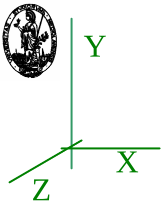
$$AI = A = IA$$

$$\text{vettore come matrice colonna} \quad : \overline{u}^T = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

Segue le regole del prodotto matriciale

$$\text{prodotto vettore matrice} \quad : \overline{v} = \overline{u}^T M$$

Descrizione analitica di forme geometriche semplici

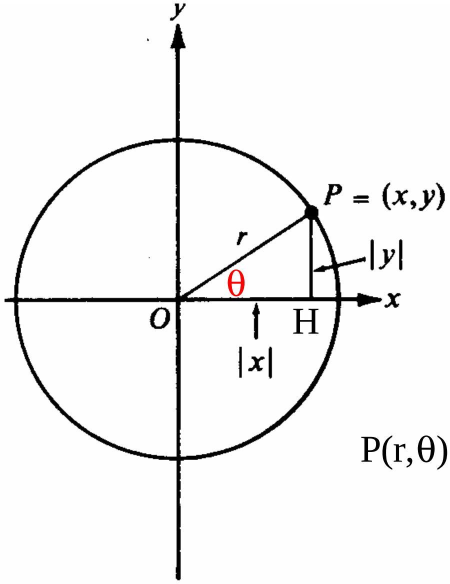


Lo spazio Euclideo

- Lo spazio può essere orientato in due modi:
  - mano destra: avvolgete la mano all'asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a destra e y va verso l'alto (terna destrorsa).
  - mano sinistra: avvolgete la mano all'asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a sinistra e y va verso l'alto.

- Questo definisce il *world coordinate system* in cui sono definiti gli oggetti.

Le coordinate polari

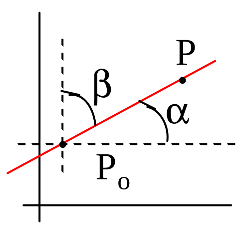


$x = r \cos(\theta) = OH$

$y = r \sin(\theta) = PH$

$P(r,\theta)$ sono le coordinate polari.

Rette orientate nel piano



$r = |P - P_o|$

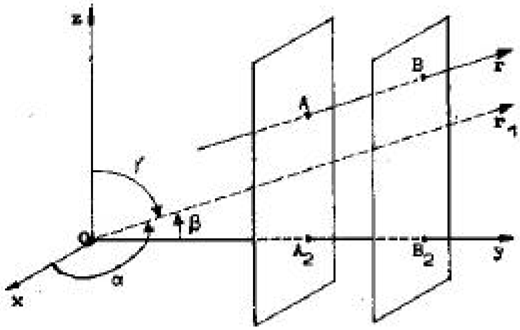
$$P(X,Y) = \begin{array}{l} X_o + r\cos(a) \\ Y_o + r\cos(b) = Y_o + r\cos(90 - a) = Y_o + r\sin(a) \end{array}$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

Relazione di ortogonalità -> 1 parametro libero

(coefficiente angolare = $tg(\alpha)$)

Rette orientate (coseni direttori)



r = |AB|

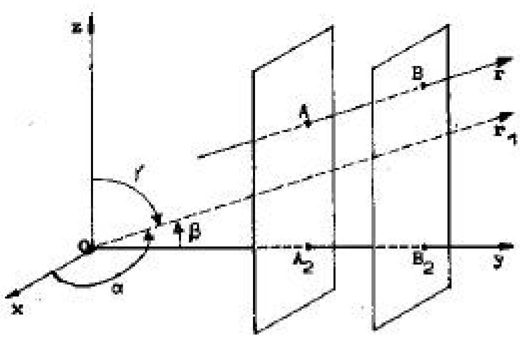
$$B(X,Y,Z) = \begin{array}{l} X_o + r\cos(\alpha) \\ Y_o + r\cos(\beta) \\ Z_o + r\cos(\gamma) \end{array}$$

$$\cos(\alpha) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{i}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_x / |BA|$$

$$\cos(\beta) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{j}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_y / |BA|$$

$$\cos(\gamma) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{k}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_z / |BA|$$

Rette orientate (coseni direttori)



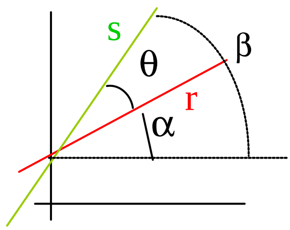
Vale la relazione:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
relazione di ortogonalità

-> 2 parametri

La retta nello spazio è identificata da 5 parametri indipendenti.

Angolo tra 2 rette orientate



Coseni direttori di s: s_x, s_y; angolo β.
Coseni direttori di r: r_x, r_y; angolo α.
$\beta = \theta + \alpha$

$$\cos(\theta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = r_x s_x + r_y s_y$$

$$\cos(\theta) = \mathbf{r} \bullet \mathbf{s} = r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z$$

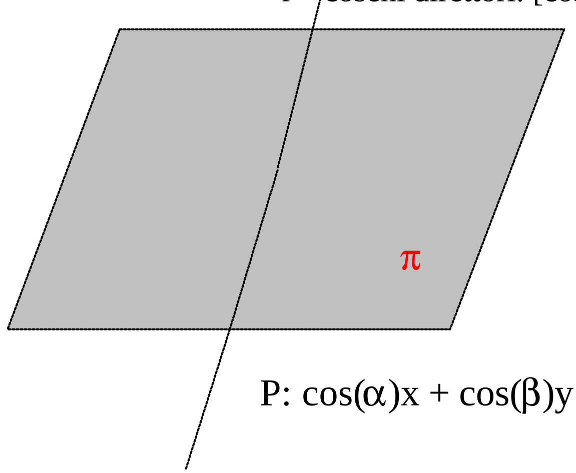
(prodotto scalare dei versori delle due rette)

Condizione di parallelismo: $\cos(\theta) = 1 \Rightarrow r_x = s_x, r_y = s_y, r_z = s_z$

Condizione perpendicolarità: $\cos(\theta) = 0 \Rightarrow r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z = 0$
(prodotto scalare nullo)

I piani nello spazio

r – coseni direttori: [cos(α), cos(β), cos(γ)]



$$P: \cos(\alpha)x + \cos(\beta)y + \cos(\gamma)z = d.$$

Rappresentazione di forme semplici

Definizione di una base (vettoriale) per lo spazio Euclideo.

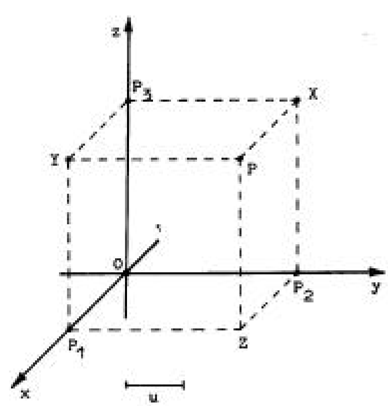
Descrizione degli elementi geometrici in questo spazio mediante numeri che specificano una posizione o una direzione.

Trasformazioni

Trasformo **P** in **P'**

Cambia il sistema di riferimento

Cambia la posizione del punto



Coordinate omogenee

Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate carteziane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo w:

$$V(x, y, z) \text{ corrisponde a :}$$
$$V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X / w$$
$$y = Y / w$$
$$z = Z / w$$

solitamente si sceglie $w=1$

w = 0 identifica il punto all'∞ sulla retta per l'origine, passante per V.

I coseni direttori saranno x/|V|, y/|V|, z/|V|.

Trasformazioni affini

- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, shear e traslazione.

Trasformazioni affini (II)

Traslazione – tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione – tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all’asse.

Scala – variazione della dimensione lungo un asse.

Trasformare gli oggetti

- i vertici dell’oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate)
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna ***V.***
- ***R, D*** e ***S*** sono rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene come:

V’=V+D traslazione, ***D*** è un vettore di traslazione

V’=SV scala, ***S*** è una matrice di scala

V’=RV rotazione, ***R*** è una matrice di rotazione

Traslazione in coordinate omogenee

Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

Traslazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x + 0 + 0 + T_x) \\ y' &= (0 + y + 0 + T_y) \\ z' &= (0 + 0 + z + T_z) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^t &= x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x \\ y^t &= y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y \\ z^t &= z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z \end{aligned}$$

coord. omogenee *coord. cartesiane*

Scala

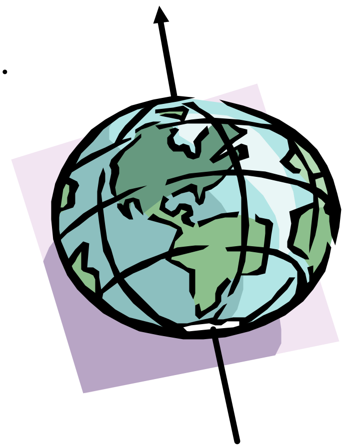
$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x.S_x + 0 + 0 + 0) \\ y' &= (0 + y.S_y + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z.S_z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^s &= x'/w' = (x.S_x)/1 \\ y^s &= y'/w' = (y.S_y)/1 \\ z^s &= z'/w' = (z.S_z)/1 \end{aligned}$$

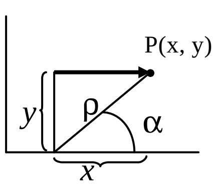
coord. omogenee *coord. cartesiane*

La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

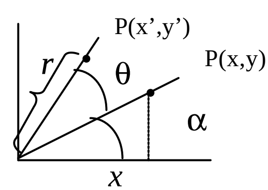


La rotazione attorno a *z (caso piano)*



$x = r\ cos a$

$y = r\ sin a$



$x' = r\ cos(a+q) = \boxed{r\ cos\ a}\ cos\ q + \boxed{r\ sin\ a}\ sin\ q$

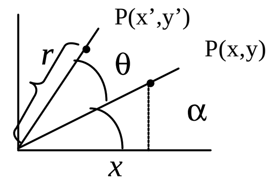
$= x\ cos\ q + y\ sin\ q$

$y' = r\ sin(a+q) = -r\ cos\ a\ sin\ q + r\ sin\ a\ cos\ q$

$= -x\ sin\ q + y\ cos\ q$

La rotazione attorno a *z (forma matriciale)*

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad P' = RP$$



Matrice di rotazione

$$\sum_{i=1}^{3} m^2_{ij} = 1 \qquad \det(M) = 1$$

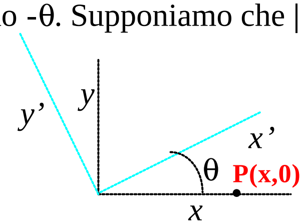
$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} m_{jk} = 0 \quad i \neq k$$

Matrice ortonormale

Significato geometrico della matrice di rotazione

Consideriamo che il punto P -> P' sia un punto appartenente all'asse x, P(x,0) e che P' appartenga ad un asse x', ottenuto ruotando il sistema di riferimento xy in x'y', di un angolo -θ. Supponiamo che || P || = 1.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

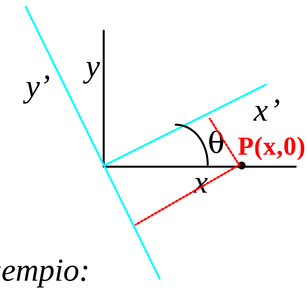
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y'.

Significato geometrico della matrice di rotazione

Consideriamo che il punto P -> P' sia un punto appartenente all'asse x, P(x,0) e che P' appartenga ad un asse x', ottenuto ruotando il sistema di riferimento xy in x'y' di un angolo $-\theta$. Supponiamo che $\| P(x,0) \| = 1$

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio:

$x' = |P| \cos(-\theta) = x\cos(-\theta)$

$y' = |P| \cos[-(90+\theta)] = x\sin(\theta)$

M contiene la proiezione degli assi (dei versori) del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y' .

Si può estendere a punto che non giacciano su uno dei due assi coordinati.

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

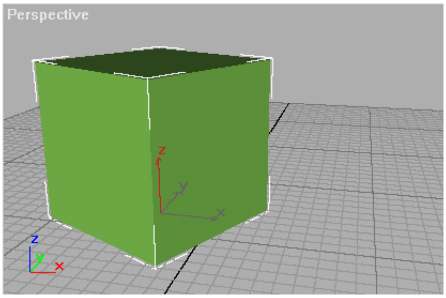
$$\begin{aligned} x' &= (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0) \\ y' &= (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

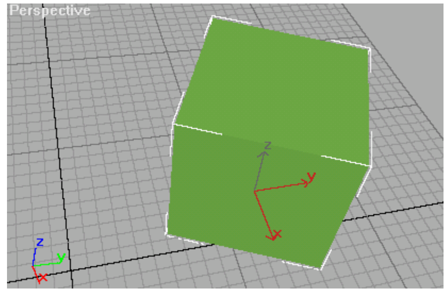
coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^{R_z} &= x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1 \\ y^{R_z} &= y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1 \\ z^{R_z} &= z'/w' = (z.1)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Orientamento di un corpo rigido nello spazio



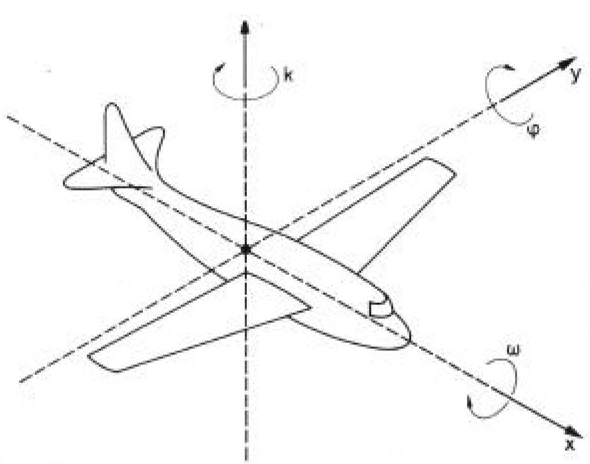


Tre parametri: tre rotazioni indipendenti.

Angoli di orientamento nello spazio 3D

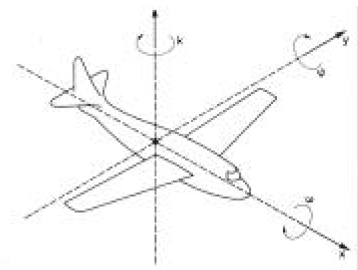
Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.



Rotazione attorno ad un singolo asse

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

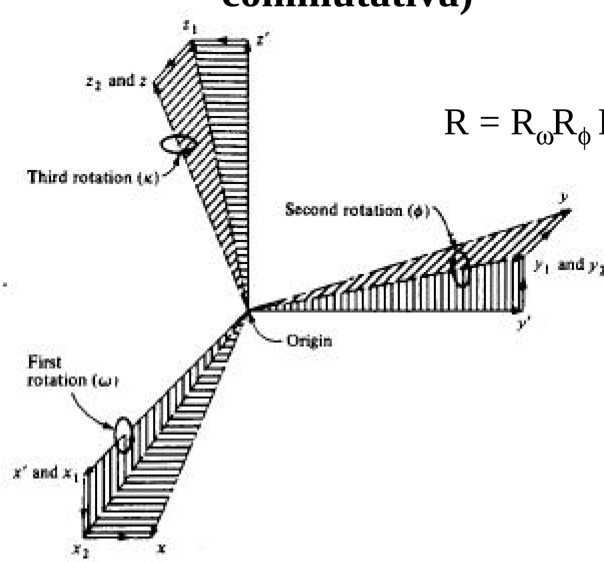


$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni sequenziali (non vale la proprietà commutativa)

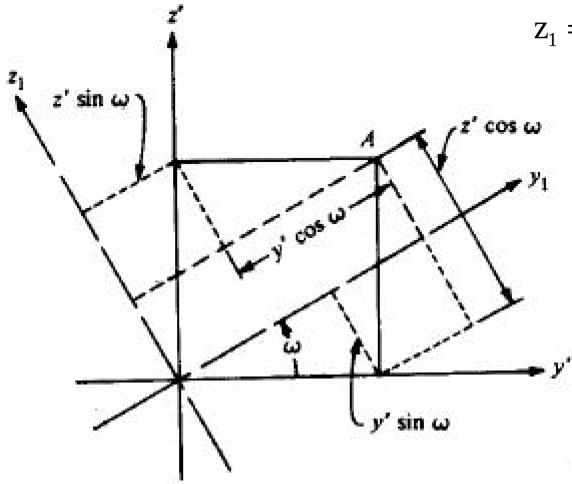


$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa$$

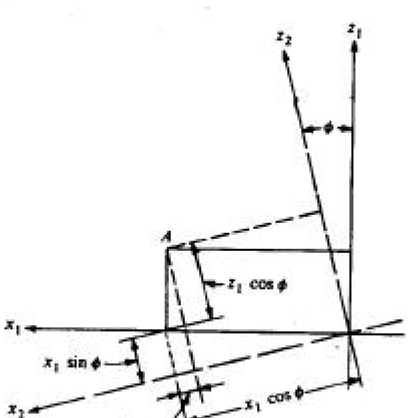
Ciascuna rotazione avviene su uno dei piani coordinati.

I) Rotazione attorno all'asse x (roll)

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_1 = -y'\sin\omega + z'\cos\omega$$



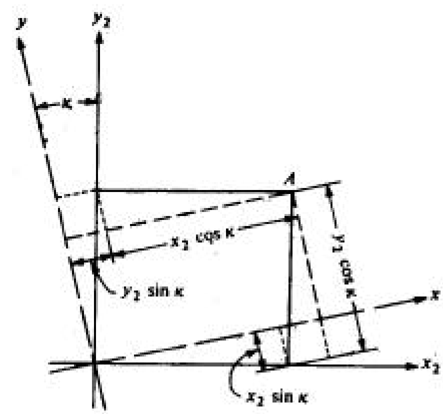
II) Rotazione attorno all'asse y (pitch)



$$x_2 = x_1\cos\phi + z_1\sin\phi$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = -x_1\sin\phi + z_1\cos\phi$$

$$x_2 = x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi$$
$$y_2 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_2 = -x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

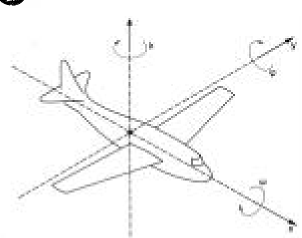
III) Rotazione attorno all’asse z (yaw)



$$x_3 = x_2 \cos k + z_2 \sin k$$
$$y_3 = -x_2 \sin k + z_2 \cos k$$
$$z_3 = z_2$$

$$x_3 = [x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\cos k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\sin k$$
$$y_3 = -[x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\sin k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\cos k$$
$$z_3 = -x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(j)\cos(k) & -\cos(j)sin(k) & -sin(k) \\ \cos(w)sin(k) - sin(w)sin(j)\cos(k) & \cos(w)\cos(k) + sin(w)sin(j)sin(k) & -sin(w)\cos(j) \\ sin(w)sin(k) + \cos(w)sin(j)\cos(k) & sin(w)\cos(k) - \cos(w)sin(j)sin(k) & \cos(w)\cos(j) \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni *“semplici”* utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

La rototraslazione in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

  $$V'' = A_2 A_1 V = A_2(A_1 V) = (A_2 A_1)V$$

  – la trasf. A_1 viene applicata per prima!

- ricordiamo che il prodotto di rotazioni <u>non è *commutativo*</u>: R_2R_1 ? R_1R_2, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1V) = (A_2A_1)V$.

- ***Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice.***

Trasformazioni inverse

- Denotiamo le inverse come le matrici affini: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.
- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il *reciproco* dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa} \Rightarrow R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$

La trasformazione inversa in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R^T R P = +R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P'$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i} \bullet \mathbf{T}$

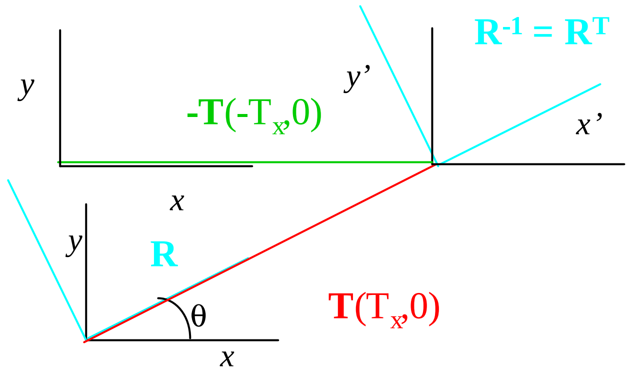
$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z \\ r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z \\ r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)

Perchè $-R^T T$?

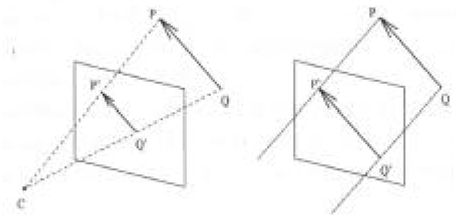
Solo così applicando trasformata diretta ed inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.



$R^T T$ è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.

La proiezione centrale

Proiezione centrale verso proiezione ortogonale



1) 2)

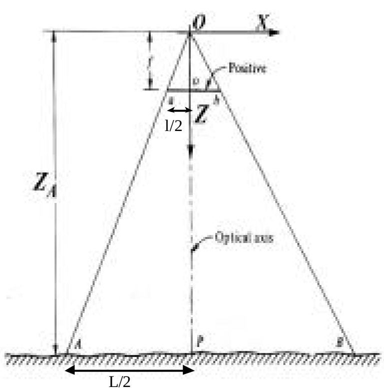
P(X,Y,Z) viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto P'(X',Y'). Z è la distanza dal piano immagine.

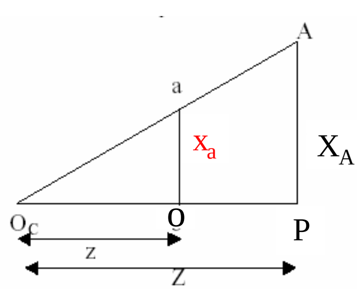
1) X' dipende da X **e** Z.
2) X' non dipende da Z, ma solo da X.

Proiezione centrale: centro di proiezione al finito.

Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.

Raddrizzamento dell'immagine





Per similitudine fra i triangoli aOb e AOB: $f : Z_A = x_a : X_A$

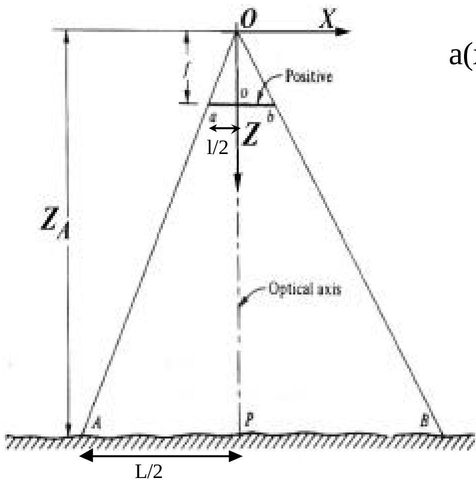
da cui:

e analogamente:

$$a(x_a;\ y_a;\ z_a) \rightarrow \begin{cases} x_a = X_A f / Z_A \\ y_a = Y_A f / Z_A \\ z_a = f \end{cases}$$

Si ipotizza P(0,0,0) e o(0,0).

Proiezione semplice



$$a(x_a; y_a; z_a) \rightarrow \begin{cases} x_a = X_A f / Z_A \\ y_a = Y_A f / Z_A \\ z_a = f \end{cases}$$

ABO e abO sono triangoli simili:

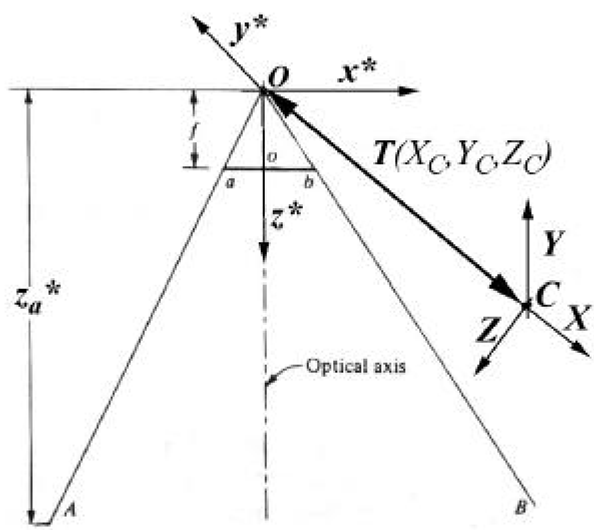
$ab = AB\, f / Z_A$

$f : Z_A = x_a : X_A$

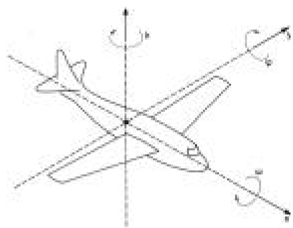
Si ipotizza O(0,0,0) e o(0,0).

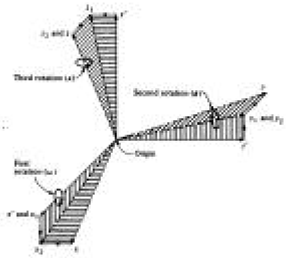
I parametri esterni

- ***Traslazione:*** 3 componenti: $\mathbf{T}(X_C, Y_C, Z_C)$.
- ***Rotazione*** $\boldsymbol{R_{3x3}(w, f, k)}$



Dalle rotazioni alla matrice di rotazione

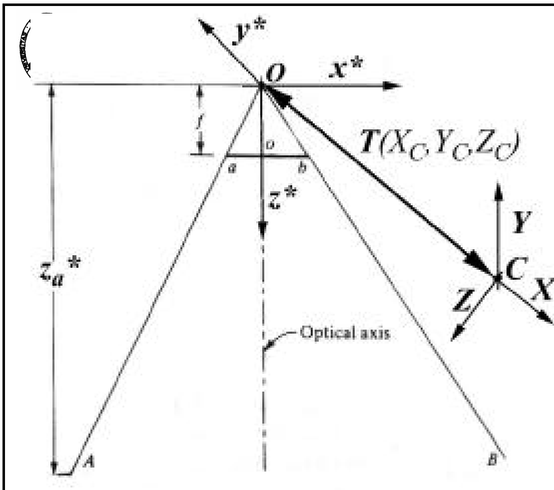




Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(j)\cos(k) & -\cos(j)\sin(k) & -\sin(k) \\ \cos(w)\sin(k)-\sin(w)\sin(j)\cos(k) & \cos(w)\cos(k)+\sin(w)\sin(j)\sin(k) & -\sin(w)\cos(j) \\ \sin(w)\sin(k)+\cos(w)\sin(j)\cos(k) & \sin(w)\cos(k)-\cos(w)\sin(j)\sin(k) & \cos(w)\cos(j) \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni *"semplici"* utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

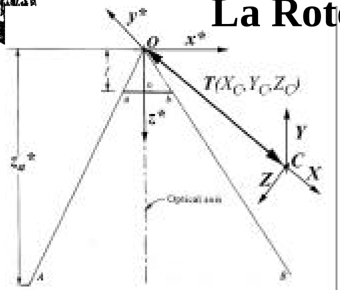


La Rotazione 3D

$$x^*_A = X_A \cos(xx^*) + Y_A \cos(yx^*) + Z_A \cos(zx^*)$$
$$y^*_A = X_A \cos(xy^*) + Y_A \cos(yy^*) + Z_A \cos(xy^*)$$
$$z^*_A = X_A \cos(xz^*) + Y_A \cos(yz^*) + Z_A \cos(zz^*)$$

In forma compatta: $\mathbf{p^*} = \mathbf{R}\ \mathbf{P}$

La Rototraslazione 3D



Traslazione: 3 componenti: $\mathbf{T}(X_C, Y_C, Z_C)$.
Rotazione: 3 componenti: $R(\omega, \phi, k)$.

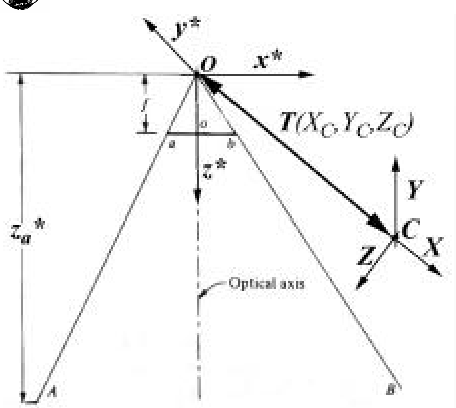
Matrice di rotazione con : w, f, k, è:

$$R\begin{bmatrix} \cos(j)\cos(k) & -\cos(j)sin(k) & -sin(k) \\ \cos(w)sin(k) - sin(w)sin(j)\cos(k) & \cos(w)\cos(k) + sin(w)sin(j)sin(k) & -sin(w)\cos(j) \\ sin(w)sin(k) + \cos(w)sin(j)\cos(k) & sin(w)\cos(k) - \cos(w)sin(j)sin(k) & \cos(w)\cos(j) \end{bmatrix}$$

In forma compatta: **p* = R (P' - T)**

I parametri esterni sono perciò 6.

Dal 3D al 2D



$$a(x_a; y_a; z_a) \rightarrow \begin{cases} x_a = x^*_A \, f / z^*_A \\ y_a = y^*_A \, f / z^*_A \\ z_a = f \end{cases}$$

$$\mathbf{p_A^* = R\,(P_A - T)}$$

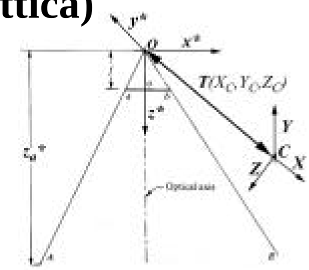
$A(X_A,Y_A,Z_A) \Rightarrow A(x^*_a, y^*_a, z^*_a) \Rightarrow a(x_a,y_a,f)$.

Equazioni di collinearità (rappresentazione perspettica)

$x^*_A = r_{11}(X_A-X_C) + r_{12}(Y_A-Y_C) + r_{13}(Z_A-Z_C)$

$y^*_A = r_{21}(X_A-X_C) + r_{22}(Y_A-Y_C) + r_{23}(Z_A-Z_C)$

$z^*_A = r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)$



$$x_a - x_o = x^*_A\, f / z^*_A = f \, \frac{r_{11}(X_A-X_C) + r_{12}(Y_A-Y_C) + r_{13}(Z_A-Z_C)}{r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)}$$

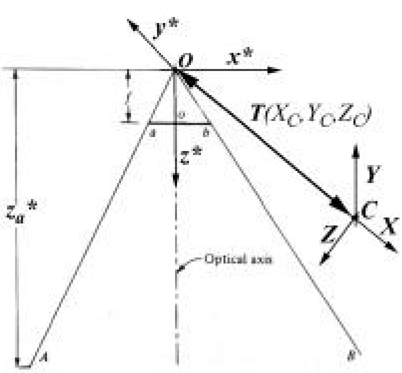
$$y_a - y_o = y^*_A\, f / z^*_A = f \, \frac{r_{21}(X_A-X_C) + r_{22}(Y_A-Y_C) + r_{23}(Z_A-Z_C)}{r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)}$$

Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.

Proiezione prospettica (in forma matriciale)

$$\begin{bmatrix} X^*_P \\ Y^*_P \\ Z^*_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parametri esterni



$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

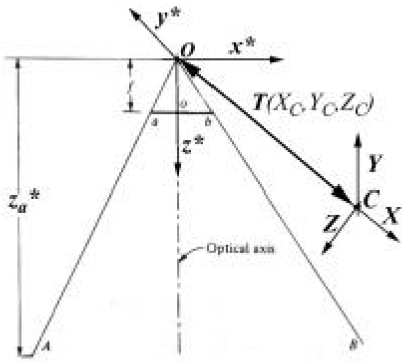
$$P^* = A\,P$$

Proiezione prospettica (in forma matriciale)

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f & 0 & x_o \\ 0 & -f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^*_P \\ Y^*_P \\ Z^*_P \end{bmatrix}$$

Parametri interni

Quanto vale z_a?



$$a(x_a; y_a; z_a) \rightarrow \begin{cases} x_a - x_o = x^*_A \, f / z^*_A \\ y_a - y_o = y^*_A \, f / z^*_A \\ z_a = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -f & 0 & p_{o_u} \\ 0 & -f & p_{o_v} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione proiettiva in forma matriciale

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -f & 0 & p_{o_u} \\ 0 & -f & p_{o_v} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

p = KMA P

Trasformazioni

Trasformazione tra spazi. Un caso particolare è la proiezione.

Proiezione centrale ha due formulazioni: rappresentazione perspettiva, mediante le equazioni di collinearità e rappresentazione proiettiva, mediante le equazioni proiettive.