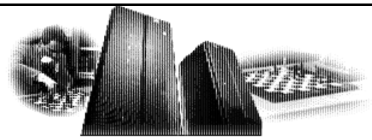
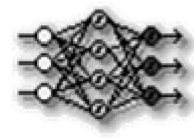




# Sistemi Intelligenti
# Fondamenti di elaborazione dei segnali

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it



## Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

# Gli spazi matematici

Spazi vettoriali.

Spazi metrici.

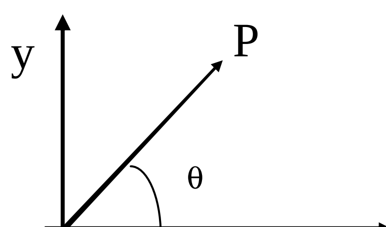
Spazi vettoriali normati e metrici (Spazi di Banach).

Spazi vettoriali normati, metrici, dotati di prodotto interno (Spazi di Hilbert).



# Spazi vettoriali

Corrispondenza tra n-ple di numeri reali [$x_1$, $x_2$, .... $x_N$] e punti nello spazio n-dimensionale. **Vettore** è il segmento orientato che unisce l'origine con il punto P($x_1$, $x_2$, .... $x_N$).



Spazio Euclideo

X è spazio di elementi **{x}.**
Λ è un campo (e.g. Numeri reali).

X è uno spazio vettoriale rispetto a Λ se:
1) E' definita la somma tra gli elementi **{x}.**
2) E' definita l'operazione di moltiplicazione di un elemento di X per uno scalare di Λ.

## Proprietà degli operatori sui vettori

1) Somma: ad ogni coppia di elementi **x,y** $\in$ X, deve corrispondere un elemento somma, **z** $\in$ X. Devono valere:
   - Proprietà commutativa.
   - Proprietà associativa.
   - Esistenza dell'elemento neutro (o nullo), denominato 0.
   - Esistenza dell'elemento opposto.

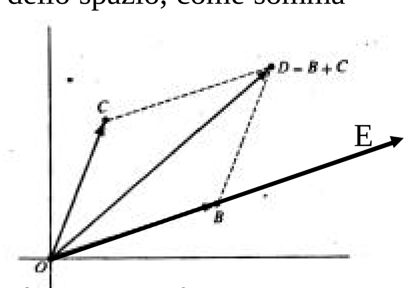
2) Moltiplicazione: ad ogni elemento **x** $\in$ X e $\lambda \in \Lambda$, deve corrispondere un elemento **z** $\in$ X. Devono valere:
   - Proprietà commutativa.
   - Proprietà associativa.
   - Proprietà distributiva.
   - Esistenza dell'elemento neutro, denominato 1.



## Descrizione di un elemento dello spazio vettoriale

Posso individuare un qualsiasi punto dello spazio, come somma opportuna di vettori.

**D** = **B** + **C**
**D** = **C** + ½ ***E**




NB Qui è implicita la definizione di norma di un vettore

Si dimostra che è possibile scegliere un vettore per ogni dimensione dello spazio ed ottenere un qualsiasi altro vettore come somma pesata dei vettori di base (combinazione lineare).

NB Non abbiamo ancora parlato esplicitamente di distanza.

# Base di uno spazio vettoriale

N vettori linearmente indipendenti costituiscono una base, B, dello spazio vettoriale n-dimensionale, X.

$$B = [\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ......, \mathbf{b_N}]$$

Linearmente indipendenti: $\lambda_1\mathbf{b_1}+\lambda_2\mathbf{b_2}+ ...+\lambda_N\mathbf{b_N} = 0$, Iff $\lambda_1=\lambda_2=...= \lambda_N= 0$.

Qualsiasi vettore $\mathbf{x} \in X$, può essere rappresentato come combinazione lineare della base.

$$\boxed{\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{b_1}+\lambda_2\mathbf{b_2}+ ...+\lambda_N\mathbf{b_N}}$$



# Spazi metrici

Per ogni coppia di elementi di un generico spazio S: [**x**, **y**], viene definito un funzionale: d(**x**,**y**), detto ***distanza,*** tale che:

1) d(x,y) = 0 (d(x,y) = 0 sse x = y).
2) d(x,y) = d(y,x) (proprietà di simmetria).
3) d(x,y) = d(x,z) + d(z, x) (proprietà triangolare).

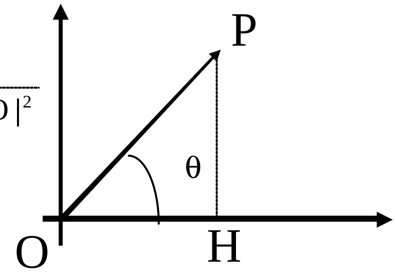
Gli spazi S, sui quali è definita una metrica, sono chiamati spazi metrici. Questi spazi possono anche essere non vettoriali.

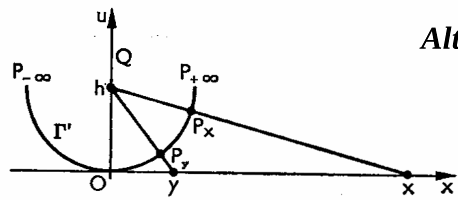
# Esempi di metrica

$d_1$ : $d(x,y) = \sum_k |x_k - y_k|$ = |PH| + |HO|

$d_2$ : $d(x,y) = \sqrt{\sum_k |x_k - y_k|^2} = \sqrt{|PH|^2 + |HO|^2}$

Norma utilizzata negli spazi Euclidei. Non è ancora il momento....




***Altre metriche possibili:***

$d(x,y) = \overline{P_x P_y}$



# Spazi vettoriali normati

Viene definita una norma, || . ||, associata allo spazio vettoriale X. Per ogni elementi di X: **x,** ed ogni elemento λ di Λ, valgono:

1. || **x** || = 0 (|| **x** || = 0 sse **x** = 0).
2. || λ**x** || = |λ | || **x** || ∀λ , ∀**x**
3. || **x** + **y** || = || **x** || + || **y** || (disuguaglianza triangolare).

Uno spazio vettoriale normato, può essere reso **metrico** scegliendo come **misura della distanza** tra due vettori, la **norma della differenza**:

d(x,y) = || x – y || Che differenza c'è tra norma e distanza?

Gli spazi vettoriali normati (e completi) sono detti spazi di Banach (1932).

# Spazi di Hilbert

Partiamo da uno spazio vettoriale, H, non necessariamente normato.
Introduciamo il **prodotto scalare**, tra due elementi, indicato con $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ o $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$

1. Il prodotto scalare è un funzionale lineare del primo fattore, cioè:
   $(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y})$
   $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
2. Vale la proprietà pseudo-commutativa: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$
3. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ sse $x = 0$.

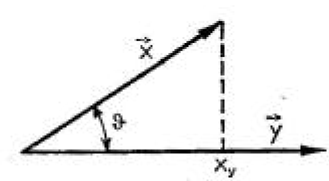
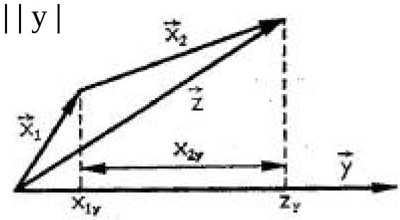
Definisco come **norma** nello spazio vettoriale H: $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$
$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$

**Gli spazi di Hilbert sono spazi di Banach per i quali la norma (e quindi la misura della distanza) è derivata dalla definizione di prodotto scalare.**



# Esempio di prodotto interno (proiezione ortogonale)

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = | \mathbf{x} | \, | \mathbf{y} | \cos(\theta) = | x_y | \, | y |$

Proprietà commutativa: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
Annullamento del prodotto: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ sse $\mathbf{x} = 0$
Funzione lineare del primo fattore:
$(\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
$(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x_1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{y}$

Lo scalare $\lambda$ può essere inteso come coordinata lungo un asse $\mathbf{y}$ (versore).

Condizione di ortogonalità: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

# Lo spazio Euclideo

E' un esempio di spazio Hilbertiano. Con la definizione di norma e prodotto scalare si possono ricavare tutte le proprietà ben note dello spazio geometrico Euclideo.

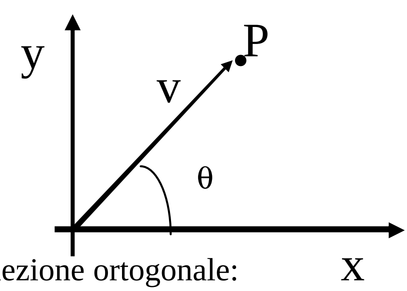
La posizione di ogni punto è definita da un vettore rispetto all'origine e valgono tutte le proprietà di uno spazio vettoriale.

La norma di un vettore è definita come il modulo, questo può essere espresso come prodotto interno del vettore per sè stesso.

Come base dello spazio vettoriale n-dimensionale, Hilbertiano Euclideo possono essere presi n vettori linearmente indipendenti. Solitamente si considerano vettori tutti ortogonali tra loro (i versori degli assi).



# Espressione di un punto funzione della base dello spazio Euclideo




$\mathbf{v} = (P – O)$.
$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ base dello spazio

$\lambda_x$, $\lambda_y$ coordinate.

Ottengo le coordinate per proiezione ortogonale:

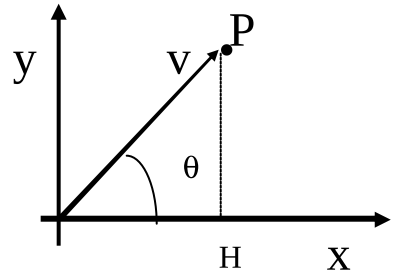
$\lambda_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$

$\lambda_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})$

Ricostruisco come combinazione lineare degli elmenti di base: $\mathbf{v} = \lambda_x \mathbf{x} + \lambda_y \mathbf{y}$.

# Ipotesi implicita

Ortogonalità della base: **x** ^ **y**




Vale il teorema di Pitagora.

$\| x \| = \sqrt{(x, x)}$
d(x,y) = | x – y | = ‖ x – y ‖

$$\| v \| = |v| = \sqrt{(P-O),(P-O)} = \sqrt{(l_x\mathbf{x} + l_y\mathbf{y}),(l_x\mathbf{x} + l_y\mathbf{y})} =$$

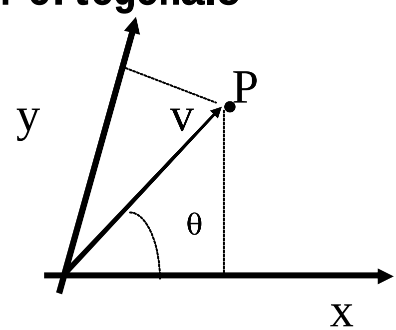
$$\sqrt{(l_x\mathbf{x}),(l_x\mathbf{x}) + (l_x\mathbf{x}),(l_y\mathbf{y}) + (l_y\mathbf{y}),(l_y\mathbf{x}) + (l_y\mathbf{y}, l_y\mathbf{y})} =$$

$$\sqrt{(l^2{}_x\mathbf{x}^2 + l^2{}_y\mathbf{y}^2} = \sqrt{(P-H)^2 + (H-O)^2} = \sqrt{l_x{}^2 + l_y{}^2}$$



# Base non ortogonale

Ortogonalità della base: **x** ^ **y**




$\lambda_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \qquad \lambda_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})$

**v** ? $\lambda_x\mathbf{x} + \lambda_y\mathbf{y}$.

**Solo con basi ortogonali si ottengono i coefficienti per proiezione sulla base e la ricostruzione come combinazione lineare dei coefficienti per la base.**

# Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.



# Spazio vettoriale e funzioni continue

Sia f(x) una funzione continua tra a e b.

$X = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \; .... \; \xi_N\}$ $\qquad 0 = \xi_\kappa = N$

Guardando ad ogni valore della funzione: $x(\xi)$, $a = \xi = b$, possiamo considerare il caso continuo come un passaggio al limite, $k \to \infty$, del caso discreto:

$X = x(\xi) \qquad a = \xi = b$

Le funzioni continue ($C^0$), appartengono ad uno spazio vettoriale, sono complete e normate in metrica $d^\infty$.

Le funzioni che appartengono ad $L^1$ sono complete nella metrica $d^1$.

# Spazio vettoriale e funzioni continue

Sia f($\mathbf{x}$) una funzione continua tra a e b, (f($\mathbf{x}$) $\in C^0$).

1) Somma: ad ogni coppia di elementi $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C^0$, deve corrispondere un elemento somma, $\mathbf{z} \in C^0$. Devono valere: Proprietà commutativa.
   Proprietà associativa.
   Esistenza dell'elemento neutro (o nullo), denominato 0, [f($\mathbf{x}$) = 0], .
   Esistenza dell'elemento opposto.

2) Moltiplicazione: ad ogni elemento $\mathbf{x} \in X$ e $\lambda \in \Lambda$, deve corrispondere un elemento $\mathbf{z} \in X$. Devono valere: Proprietà commutativa.
   Proprietà associativa.
   Proprietà distributiva.
   Esistenza dell'elemento neutro, denominato 1, [$\lambda = 1$], .



# Funzioni continue e base spazio vettoriale

E' possibile definire una base per rappresentare le funzioni in $C^0$.

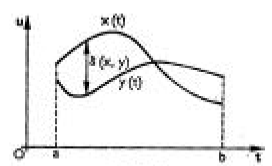
Passaggio dal discreto, n dimensioni, al continuo $\infty$ dimensioni.
Somma sulle n dimensioni -> Serie di funzioni (sviluppo di Taylor delle funzioni continue).

Posso quindi esprimere la mia funzione come combinazione lineare di un numero infinito di basi (nel caso dello sviluppo in serie di Taylor, come numero infinito di funzioni potenza). Le funzioni potenza costituiscono la base del mio spazio.

Perchè $C^0$?

# Possibili norme per uno spazio funzionale normato (non necessariamente vettoriale).

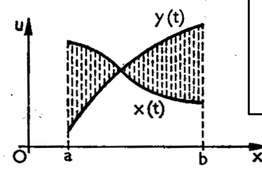
Metrica del massimo (o Lagrangiana, spazio $L^{oo}$):
d(x,y) = max |x – y|




Metrica integrale di ordine 1 (spazio $L^1$): è

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$

associato alla teoria della misura in un insieme.




Metrica integrale di ordine 2 (spazio $L^2$): $d_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}$

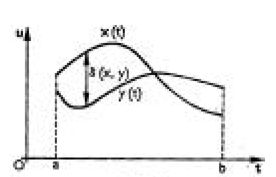
Metrica integrale di ordine p (spazio $L^p$): $d_p(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt}$



# Spazi funzionali vettoriali e metrici (spazi di Banach)

|| x(P) – y(P) || = norma .

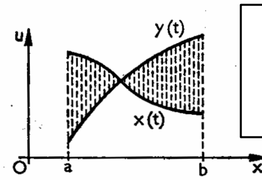
Metrica del massimo (o Lagrangiana, spazio $L^{oo}$):
d(x,y) = max |x – y| = || x(P) – y(P) ||




Metrica integrale di ordine 1 (spazio $L^1$): è

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt \quad = \| x(P)-y(P) \|$$

associato alla teoria della misura in un insieme.




$$d_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt} \quad = \| x(P)-y(P) \|$$

# Spazi funzionali di Hilbert

$$\|\mathbf{x}\| \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\int_T x(P)x(P)dP}$$

**x** · **y** = | x | | y | cos(θ) = | $x_y$ | | y |

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \int_T x(P)y(P)dP$$

Il prodotto interno è massimo quando le due funzioni sono uguali, è minimo quando sono simmetriche rispetto ad y.

Quando è = 0?



# Basi funzionali ortogonali

Ortogonalità della base: **x** ^ **y** (x,y) = 0 (e.g. Assi ortogonali)

Le basi della serie di potenze non sono ortogonali: $\int_T x^p(x)y^q(x)dx \neq 0$

Se le basi non sono ortogonali, non si possono calcolare i coefficienti per proiezione.

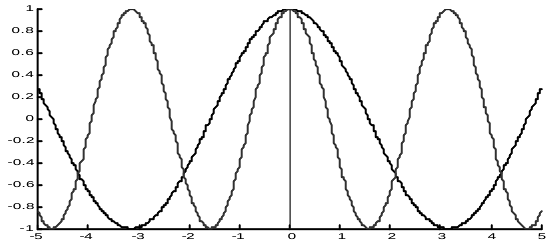
Funzioni trigonometriche: $\int_0^{2p} \cos(px)\cos(qx)dx$ p e q interi

$$\int_0^{2p} \cos(qx)\cos(px)dx = \int_0^{2p} \{\cos((p-q)x) + \cos((p+q)x)\}dx$$
$$= 1/(p-q)[-\sin[(p-q)x]_0^{2p} + 1/(p+q)[-\sin[(p+q)x]_0^{2p}$$

q = p = 0 2π
q = p > 0 π
q ? p 0

# Base circolare o trigonometrica

y = cos(nx)




y=cos(x)

T=2π f = 1/2π

y=cos(2*x)

T=2π/2 = π f = 1/π.

<----------- T ----------->

"Due periodi al prezzo di uno": Se n è intero, le frequenze sono multiple, "tutte le cosinusoidi iniziano dallo stesso punto".

**y=cos(x-1)**

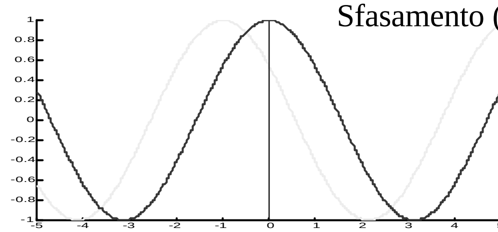
**T=2**p **f = 1/(2**p)

**Fase** j **= -1**

La forma più generale è:

$y = \cos(nx + \varphi)$

Sfasamento (ϕ)






# Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

.

## Rappresentazione in serie di Fourier

Rappresento una funzione periodica di periodo T, come serie di funzioni trigonometriche:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \qquad \text{Periodo } 2\pi / n.$$

Moti circolari, ondulatori......

***Condizioni di Dirichelet***. La funzione deve avere al massimo un numero finito di punti di discontinuità (nei quali può anche non essere definita), e appartiene allo spazio $L^1$.

Se la funzione è definita su un generico periodo T.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(\frac{2p}{T} nx) + b_n \sin(\frac{2p}{T} nx)] = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]$$

T = periodo $\qquad 2\pi/T = \omega_o$ = armonica fondamentale



## Calcolo dei coefficienti della Serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]$$

$$(f(x),\cos(w_o kx)) = ((\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]),(\cos(w_o kx))$$

**Calcolo di $a_0$ (k = 0)**

$$(f(x),1) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx = \int_{-T/2}^{+T/2} a_o dx \qquad \Rightarrow a_o = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx$$

Valore medio nel periodo

# Calcolo di $a_k$ ($b_k$) per k ? 0

Parto da: f(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]$

Proietto su: $\cos(w_o kx)$ $\Rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(w_o kx)dx = \int_{-T/2}^{+T/2} a_o \cos(w_o kx)dx + \quad = 0 \text{ per k ? 0}$$

$$\sum_{n=1, n\neq k}^{\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} [a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)](\cos(w_o kx)dx + \quad = 0 \text{ per ortogonalità}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} [a_k \cos(w_o kx) + b_k \sin(w_o kx)](\cos(w_o kx)dx \quad = T/2 * a_k$$

$$a_k = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(w_o kx)dx$$



# Rappresentazione della serie di Fourier mediante modulo e fase

f(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(w_o nx + f_n)$ Difficile da trattare analiticamente

**Formule di prostaferesi sulla n-esima armonica**

$A_n*\cos(\phi_n)*\cos(nw_o x) + A_n*\sin(\phi_n)*\sin(nw_o x) = a_n \cos(nw_o x) + b_n \sin(nw_o x)$.

$a_n = A_n*\cos(\phi_n)$ $\qquad$ $a_n^2 + b_n^2 = A_n^2$

$b_n = A_n*\sin(\phi_n)$ $\qquad$ $b_n / a_n = \tan(\phi_n)$

# $[a_k, b_k]$ o $[A_k, f_k]$ commenti

Possiamo quindi “isolare” l’armonica con contenuto in frequenza k, semplicemente proiettando sulla base coseno (seno).

$a_k^2 + b_k^2 = A_k^2$ rappresenta il contenuto di energia del nostro segnale di partenza associata all’armonica k.

$b_k / a_k = \tan(\phi_k)$ rappresenta la fase (sfasamento rispetto all’origine) dell’armonica k.



# Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

# Rappresentazione in serie di potenze

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ....$$

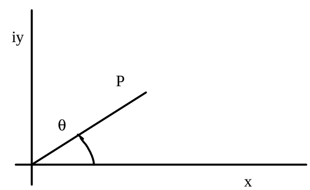
$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!}$$

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ....$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!}$$

$$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} ....$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n)}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} ....$$




$$sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$



# Forma trigonometrica combinata della serie di Fourier

Possiamo scrivere l'esponenziale complessa in funzione di sin(z) e cos(z):
**$e^{iz}$ = cos(z) + isin(z).**
Se **z = nw$_o$x,** reale, risulta: $e^{inw_o x}$ = cos(nw$_o$x) + isin(nw$_o$x).

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(w_o nx) + b_n \sin(w_o nx)]$$

Dimostriamo che:

$$a_k \cos(kw_o x) + b_k \sin(kw_o x) = c_k e^{jkw_0 x} + c_{-k} e^{-jkw_0 x}$$

Ponendo: $a_n = c_n + c_{-n}$ $\quad b_n = i(c_n - c_{-n})$

$$(c_n + c_{-n}) \frac{e^{inw_0 x} + e^{-inw_0 x}}{2} + i(c_n - c_{-n}) \frac{e^{inw_0 x} - e^{-inw_0 x}}{2i} = c_n e^{inw_o x} + c_{-n} e^{-inw_o x}$$

Posso determinare i coefficienti come: $\boxed{c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx}$

# Serie di Fourier - riassunto

1) Una funzione con supporto finito o periodica, appartenente agli spazi L[1] (assolutamente integrabile, con un numero finito di discontinuità), può essere rappresentata come combinazione lineare di funzioni di base circolari (Serie di Fourier).

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(w_o nx) + b_n sin(w_o nx)]$$

2) Per via dell'ortogonalità delle basi, i coefficienti delle basi possono essere calcolati proiettando la funzione sulle basi stesse.

$$a_n = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(nw_o x)dx \qquad b_n = 2/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\sin(nw_o x)dx$$

3) I coefficienti rappresentano l'ampiezza e lo sfasamento delle cosinusoidi che costituiscono la funzione. La Serie di Fourier fa l'analisi in frequenza della funzione.

$$f(x) = c_o + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(w_o nx + f_n)$$

4) Utilizzando le funzioni esponenziali complesse (fasori) si può scrivere la serie di Fourier in modo compatto come:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx$$



# Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

# Trasformata di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \qquad c_n = 1/T \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-jnw_o x} dx \qquad w_o = 2\pi/T$$

f(x) definita tra $-\infty$ e $+\infty$, assolutamente integrabile (T $\rightarrow$ $+\infty$).

$$f(x) = 1/2p \int_{-\infty}^{+\infty} F(jw) e^{jwx} dw \qquad F(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jwx} dx$$

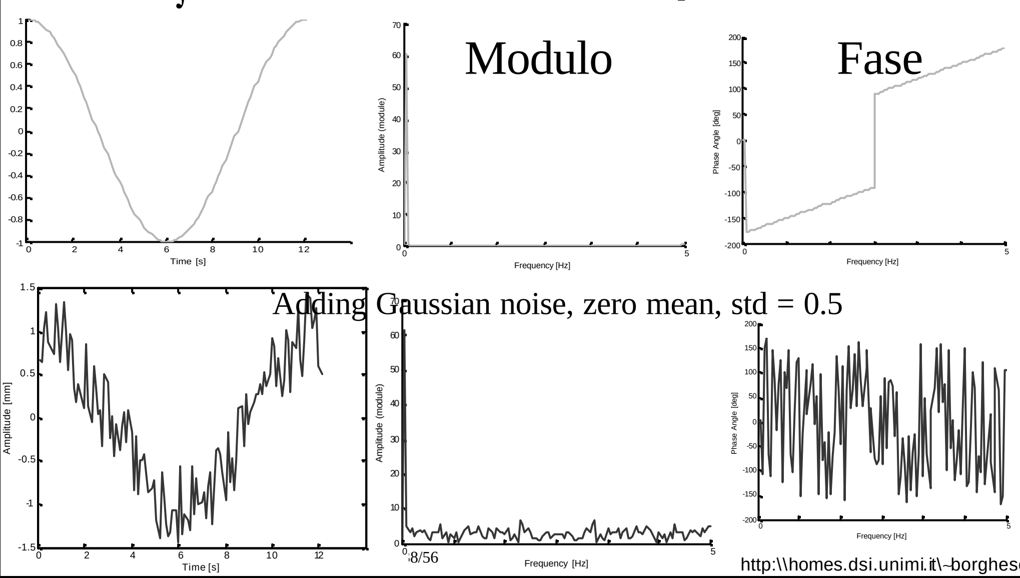
Le frequenze da numerabili, diventano infinite.



# Esempio di rappresentazione grafica

$$F(jw) = \int^{+\infty} f(x) e^{-jwx} dx$$

E' una funzione complessa: modulo + fase

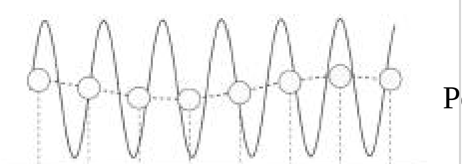


# Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.



# Segnali campionati e DFT



Perchè si utilizzano i segnali campionati?

**<u>Teorema di Whittaker-Shannon o del campionamento</u>.** Condizione sulla frequenza: $\nu_{max} < \nu_S/2$.

*Si introduce la Trasformata Discreta di Fourier (**DFT**):*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_o x} \Longrightarrow f(x_k) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{jnw_o x_k}$$

m quanto vale? $f(x_k) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{jn\left(\frac{2p}{T}\right)x_k} = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{jn\left(\frac{2p}{N}\right)x_k}$ $T = n\,\Delta t$

# Definizione di filtro

Ogni sistema fisico può vedersi come un "filtro"

Considereremo filtri lineari e tempo-invarianti.

Definisco un sistema S(f(t)) Lineare e Tempo-Invariante, un sistema descritto dall'operatore S(.) che trasforma f(t) in modo tale che valgano queste proprietà:

- Lineare: S(f(t)+g(t)) = S(f(t))+S(g(t)) e S(a*f(t)) = a*S(f(t))
- Tempo invariante: S(f(t))=g(t) implica $S(f(t-t_0))=g(t-t_0)$ (invariante alla traslazione).

- Il rapporto ingresso/uscita di ogni filtro (ovvero il suo "comportamento") è univocamente determinato dalla sua risposta all'impulso.



# Definizione di impulso

Viene rappresentato dalla δ di Dirac (δ(t)). Rappresenta una funzione che vale zero ovunque, tranne che in t = 0.

δ(.) è una distribuzione, vale cioè che: $\int d(t)dt = 1$ .
E' una funzione impulsiva, nel senso che la funzione è "concentrata" in t = 0.

La trasformata di Fourier di δ(t) è F(δ(t)) = $\int_{-\infty}^{+\infty} d(t)\, e^{iwt}\, dt.$ = 1.

Infatti δ(t) è ? 0 solo per t = 0, punto nel quale $e^{i\omega t} = 1$.

NB δ(t) soddisfa le ipotesi di linearità: δ(t-a) = 1 sse t = a.

# Funzionamento dell'impulso

Consideriamo un generico segnale f(t), continuo.

Analizziamo cosa succede se elaboro f(t) in questo modo: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, d(t-a)\, da$

Dimostriamo che: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, d(t-a)\, da = f(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, d(t-a)\, da = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d(t-a)\, da = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d(t-a)\, da = f(t) \cdot 1 \qquad \text{c.v.d.}$$

Per t ? a, d(t-a) = 0, posso quindi sostituire f(a) con f(t).

f(t) è indipendente dalla variabile di integrazione.

Rappresento quindi il mio segnale come integrale del prodotto di f(t) per la traslazione dell'impulso lungo l'asse dei tempi.



# Prodotto di convoluzione

Input → (Linear) System = Filter – h(x) → Output

$$out(x_k) = 1/M \sum_{n=0}^{M} h(x_n) input(x_n - x_k) = h(x) * input(x) \qquad \text{Caso discreto}$$

$$out(x) = \int h(\tilde{x}) input(x - \tilde{x}) d\tilde{x} = h(x) * input(x) \qquad \text{Caso continuo}$$

Cosa succede se ho come modello del filtro un impulso:

($h(x_k) = \delta(x_k) = 1$ sse $x = x_k$, $h(x_k) = 0$ altrove)?

# Prodotto di convoluzione con impulso

Input = f(t) → (Linear) System = Filter – h(t) → Output = ?

La risposta del filtro all'impulso del sistema (lineare) è: $S(\delta(t)) = h(t)$.

$$S(f(t)) = S\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\delta(t-a)da\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)S(\delta(t-a))da =$$

Per la linearità del sistema S(.)

Per la tempo-invarianza del sistema S(.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t-a)da$$

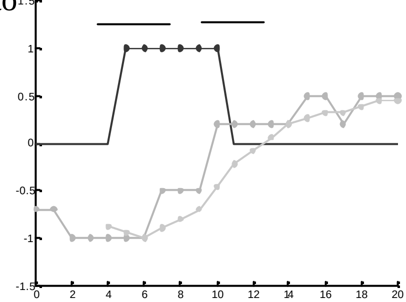


# Prodotto di convoluzione (visualizzazione grafica)

Input → (Linear) System = Filter – h(x) → Output

$$out(x_k) = 1/M\sum_{n=0}^{M} h(x_n)input(x_n - x_k) = h(x) * input(x)$$

Filtro "media mobile", perchè?




Il segnale "scorre" verso destra e sinistra rispetto al filtro al variare del valore di $x_n$".

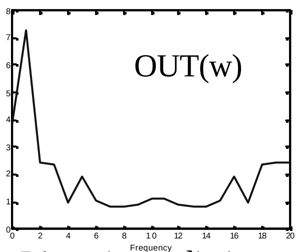
In ogni posizione viene effettuata la somma dei prodotti dei campioni del segnale e del fiotro.

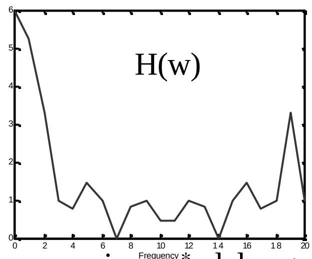
Il primo valore di uscita si ha per $x_n = 5$ pari all'ampiezza del filtro.

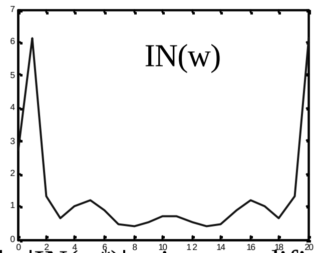
# Rappresentazione nel dominio delle trasformate

Input → (Linear) System = Filter – H(w) → Output

La convoluzione nel dominio dello spazio equivale ad un prodotto nel dominio delle frequenze $out(x) = \int h(\tilde{x})input(x-\tilde{x})d\tilde{x}$ $\quad OUT(w) = H(w) * IN(w)$








L'ampiezza di ciascuna armonica, $\omega^*$, del segnale $|IN(\omega^*)|$, viene modificata selettivamente a seconda dell'ampiezza di $|H(\omega^*)|$.



# Teorema di Parseval

La Trasformata di Fourier mantiene la norma $L_2$ di un segnale ovverosia l'energia.

$$\sqrt{\int x(P)x(P)dP} = \sqrt{\int X(w)X(w)dw}$$

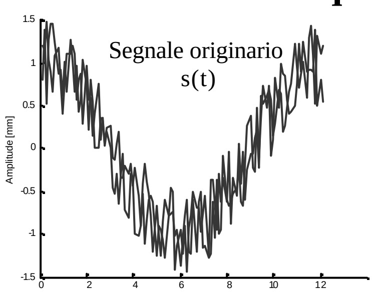
$X(\omega) = F(x(P))$

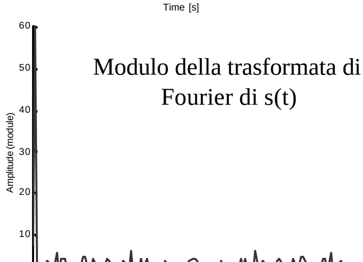
# Riassunto della lezione

- Spazi matematici. Spazi vettoriali e di Hilbert. Concetto di base. Prodotto interno.
- Spazi funzionali. Base trigonometrica.
- Rappresentazione in Serie di Fourier.
- I fasori.
- Trasformata di Fourier continua.
- Filtraggio di un segnale nel tempo e Prodotto di convoluzione.
- Segnali campionati.
- Filtraggio di un segnale nel dominio delle frequenze. Filtro passa basso e filtro passa alto.

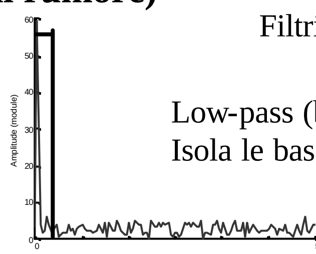


# Filtraggio nel dominio delle frequenze
## (E.g. Separazione delle armoniche di segnale da quelle di rumore)

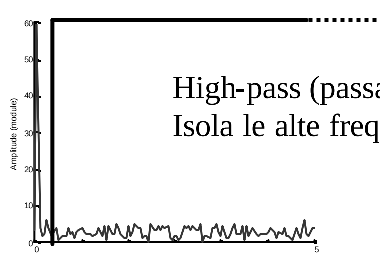



Filtri ideali



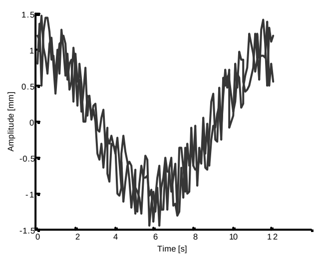

Low-pass (bassa basso)
Isola le basse frequenze.

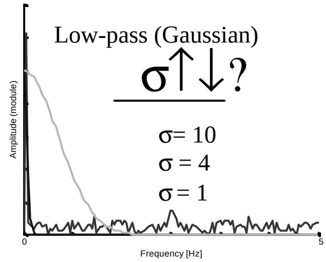


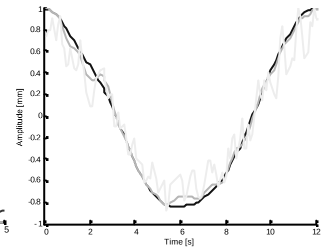

High-pass (passa alto)
Isola le alte frequenze.

I filtri ideali non sono implementabili in tempo finito su un segnale non-periodico.

# Filtraggio reale passa-basso Gaussiano




Consideriamo il filtro Gaussiano: $h(x;x_c) = g(x - x_c;\sigma) = e^{-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma^2}}$

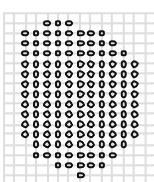
La posizione della Gaussiana è definita da $x_c$, la sua ampiezza da σ.

La sua Trasformata di Fourier è ancora una Gaussiana: $H(\omega) = e^{-1/4\sigma^2\omega^2} e^{-2\pi j\nu x_c}$

$|H(\omega)| = e^{-1/4\sigma^2\omega^2}$ A parità di ω, l'ampiezza cresce con il decresce di σ. σ regola l'ampiezza della banda passante del filtro.

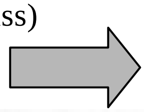


# Role of the scale σ

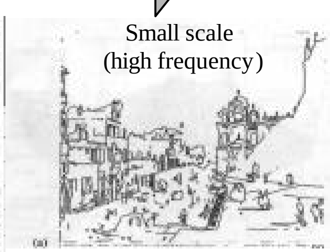


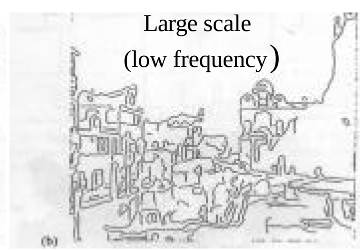
Linear filter
(low-pass)

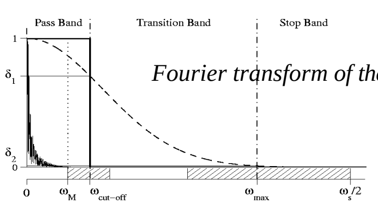
$$S(P) = \sum_k^M S_k G(P - P_k \mid \sigma)$$



σ – Scale of the filter (bandwidth)




*Fourier transform of the Gaussian is a Gaussian:* $\mathcal{F}(G(P_k;\sigma)) = e^{-\pi^2\omega^2\sigma^2\nu^2}$

**Setting σ, we set the spatial frequency of the reconstruction.**

# Caratteristiche spaziali o temporali di un filtro

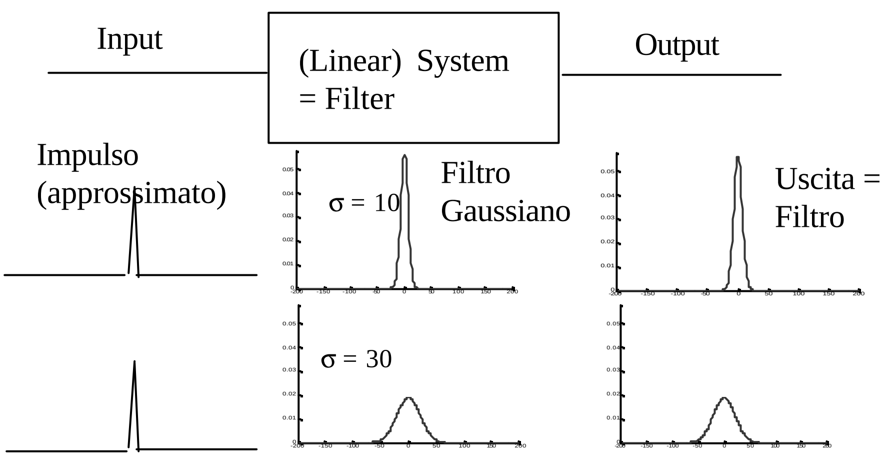
Per analizzare il comportamento di un filtro si utilizzano due particolari input:

Impulso: definito matematicamente come una distribuzione con dominio infinitesimo, codominio infinito ed area finita. Consente di analizzare quanto rapidamente un sistema torna al suo stato iniziale.

Scalino: definito matematicamente come una discontinuita' del primo ordine. Consente di analizzare quanto rapidamente un sistema segue delle variazioni brusche in ingresso.

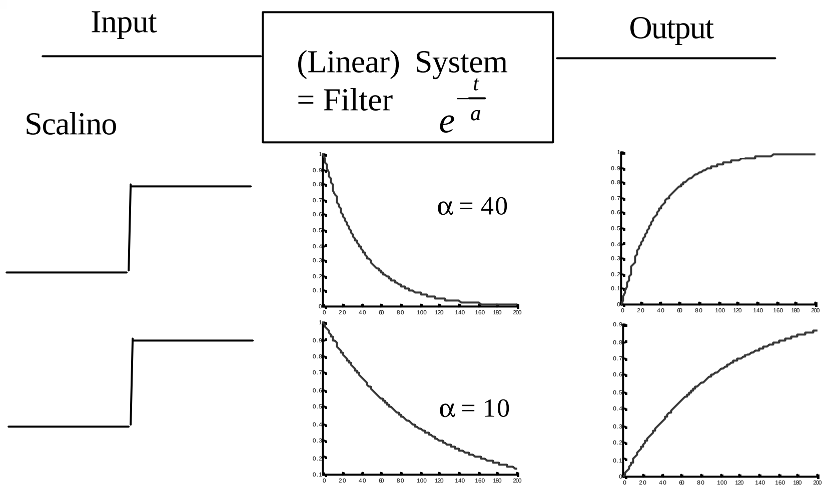


# Risposta all'impulso




L'uscita di un sistema lineare, sollecitato da un impulso, è equivalente al filtro stesso. Maggiore è la capacità filtrante, maggiore è la dispersione nello spazio, e la velocità di ritorno a zero, minore è l'ampiezza della risposta (l'area è la stessa)

# Risposta ad uno scalino




L'uscita di un sistema lineare, sollecitato da uno scalino, è tanto più veloce e segue tanto più fedelmente lo scalino, tanto minore è la costante di tempo (1/α). Tanto minore è la costante di tempo, tanto maggiore la banda passante del filtro.

# I concetti principali

Ogni sistema che riceve un input e produce un output può essere rappresentato come un filtro.

L'operazione di filtraggio, nei sistemi lineari, si esprime come prodotto di convoluzione nel dominio dello spazio (tempo) e come prodotto nel dominio delle frequenze.

La banda passante di un filtro, determina quali frequenze vengono riprodotte in uscita. Maggiore è la banda passante, maggiore la fedeltà al segnale di partenza e la rapidita' di risposta, ma minore e' la capacita' di filtrare rumore.