# Structure from Motion

Alberto Borghese
Laboratory of Motion Analysis, Virtual Reality (MAVR)



# Ricostruzione 3D da immagini monoculari

- Structure from Motion.
- Esempi semplici.
- Campo di moto generato da sequenze di moto traslazionale.
- Structure from Motion da campo di moto.
- Epipoli e punti di fuga.
- Proprietà.
- Cenni sul campo di moto originato da rototraslazione.

## Structure from Motion

- Calcolo dell'optical flow o estrazione delle features.
- Calcolo del campo di moto o determinazione delle corrispondenze.
- Ricostruzione 3D.
- Segmentazione (movimenti diversi).
- Analisi: Riconoscimento, classificazione (high level processing).

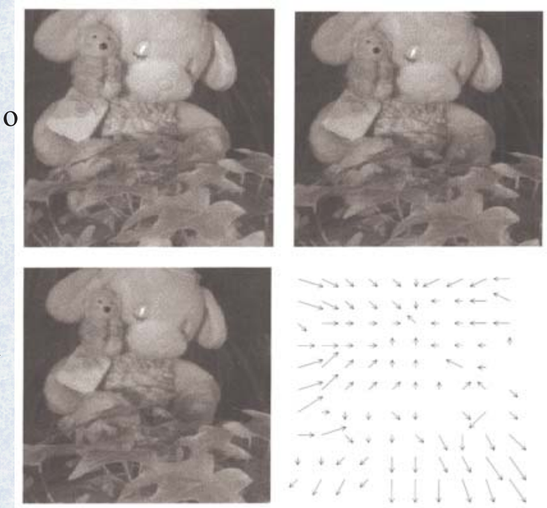


**Figure 8.3** Three frames from a long image sequence (left to right and top to bottom) and the optical flow computed from the sequence, showing that the plant in the foreground is moving towards the camera, and the soft toys away from it.



## Ricostruzione 3D da immagini monoculari

- Viene ripresa una sequenza temporale di immagini della scena.
- Obbiettivo: ricostruzione del movimento relativo della camera rispetto alla scena **e** ricostruzione 3D della scena.

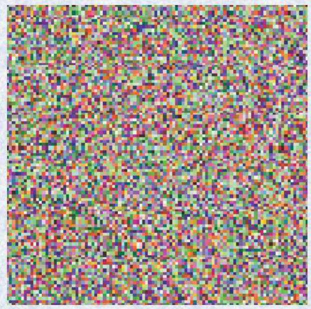
- Analogia con la stereoscopia:
  - Problema della corrispondenza.
  - Problema della ricostruzione.

- Differenze con la stereoscopia:
  - Spostamenti piccoli (stima del moto efficiente per calcolo corrispondenze).
  - Problema mal-posto:
    - Errori nella ricostruzione (base-line piccola).
    - Movimenti diversi per oggetti diversi.

# Random dots

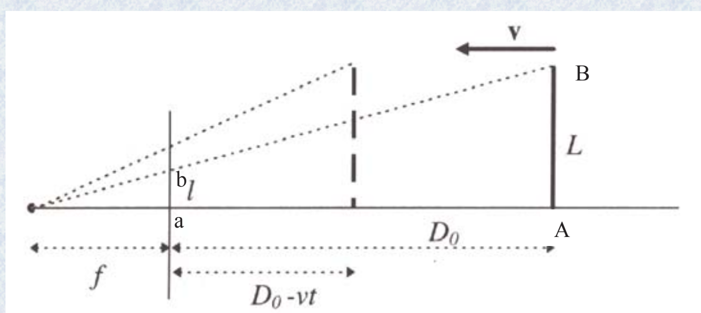
• Il nostro sitema visivo è in grado di operare la ricostruzione 3D anche senza informazione semantica a-priori.

• Variazione di luminosità congruenti con campo di moto solo per il quadrato.



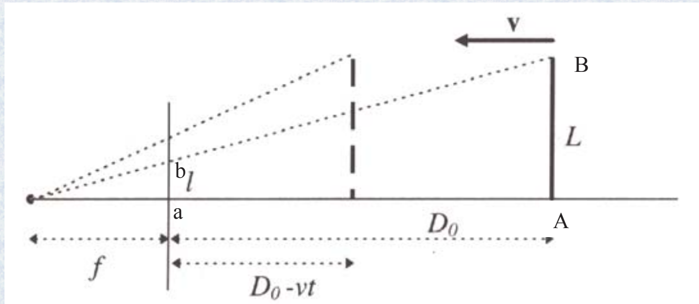


# Time-to-contact




- L distanza tra due features (due spot luminosi sulla superficie dell'oceano), non nota.
- V velocità di discesa, non nota.
- f distanza focale, distanza tra centro del cristallino e retina, nota.
- l immagine del segmento che unisce A e B sulla retina, quantità misurata.

# Computation of time-to-contact




Dall’equazione di moto rettilineo: D(t) = Do – Vt.

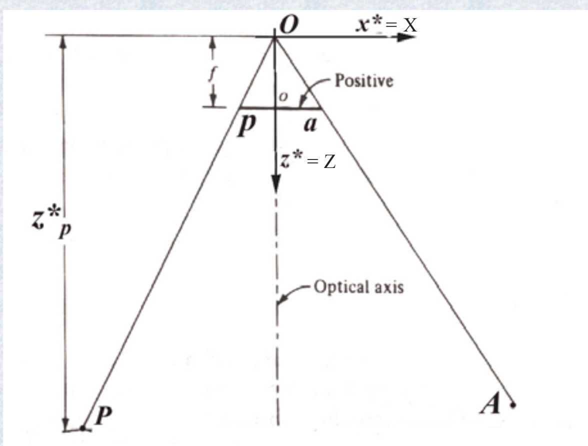
Dalla trasformazione prospettica: l(t) = $\frac{Lf}{D(t)}$

l’(t) = $L\frac{f}{D^2(t)}D'(t) = L\frac{f}{D^2(t)}V(t)$.

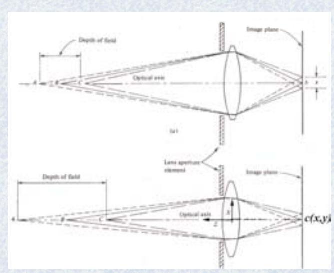
$\frac{l'(t)}{l(t)} = L\frac{f}{D^2(t)}V(t) \;/\; .\frac{Lf}{D(t)} = \frac{V(t)}{D(t)} = \tau$ Time-to-contact.



# Prospettiva semplice



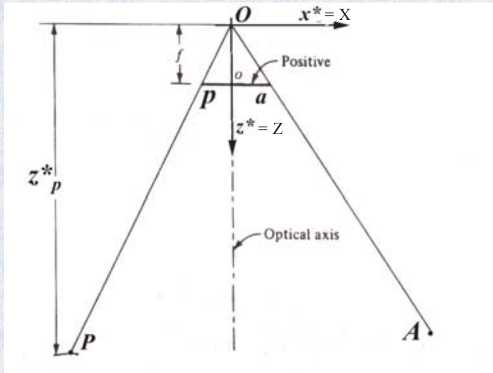

$$\mathbf{p} = f\,\frac{\mathbf{P}}{z_p{}^*}$$




- Supponiamo $x_o = y_o = 0$.
- Focale, *f*, nota.

Equazioni di collinearità per sistemi di riferimento esterni e di camera paralleli.

# Movimento 3D -> Movimento 2D




$$\mathbf{p} = \mathrm{f}\,\frac{\mathbf{P}}{Z} = \left[ f\,\frac{X}{Z}; f\,\frac{Y}{Z}; f\,\frac{Z}{Z} \right]$$

$$\dot{\mathbf{p}} = f\,\frac{\dot{\mathbf{P}}}{Z} - f\,\frac{\mathbf{P}\dot{Z}}{Z^2}$$

$$\mathbf{v_p} = \mathrm{f}\,\left( \frac{\mathbf{V_P}}{Z} - \frac{\mathbf{P}\,V_Z}{Z^2} \right) =$$

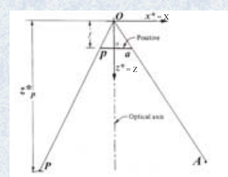
$$\left[ f\,\frac{V_X}{Z} - \frac{XV_Z}{Z^2}; f\,\frac{V_Y}{Z} - \frac{YV_Z}{Z^2}; f\,\frac{V_Z}{Z} - \frac{ZV_Z}{Z^2} \right]$$

Dipende da:
- Velocità dell'oggetto,
- Distanza dell'oggetto,
- Velocità di avvicinamento.



# Moto traslatorio lungo l'asse ottico (Vx=Vy=0)

$$\mathbf{v_p} = \mathrm{f}\,\left( \frac{\mathbf{V_P}}{Z} - \frac{\mathbf{P}\,V_Z}{Z^2} \right)$$

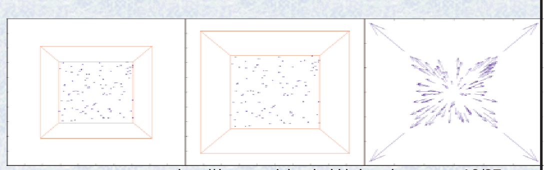


*Sviluppando:*

- $\mathrm{v_x} = \dfrac{V_X f - (fX/Z)V_Z}{Z} = \dfrac{V_X\, f - xV_Z}{Z}$
- $\mathrm{v_y} = \dfrac{V_Y f - (fY/Z)V_Z}{Z} = \dfrac{V_Y\, f - yV_Z}{Z}$ $\quad (\mathrm{v_z} = 0)$

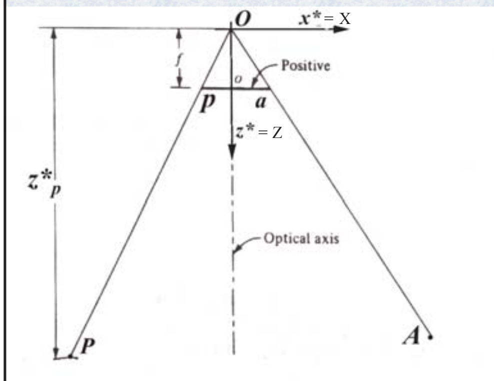
*Traslazione in direzione parallela all'asse Z* ($\mathrm{V_X} = \mathrm{V_Y} = 0$; $\mathrm{V_Z} \neq 0$):

$$\mathrm{v_x} = \frac{-xV_Z}{Z} \qquad \mathrm{v_y} = \frac{-yV_Z}{Z}$$



$\mathbf{p_c}$: fuoco di espansione.

# Structure from Motion: moto // asse

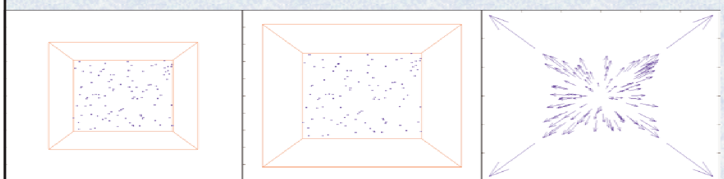



$$v_x = \frac{-xV_Z}{Z}$$

$$v_y = \frac{-yV_Z}{Z}$$

Quali sono le incognite?

$V_Z$, moto (traslatorio);
(X,Y,Z), struttura.





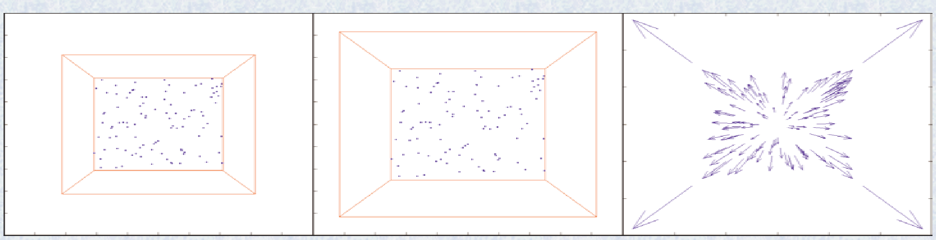
# Calcoliamo Structure from Motion

Invertiamo le equazioni del flusso ottico.

$$v_x = \frac{-xV_Z}{Z} \quad => \quad \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x}$$

$$v_y = \frac{-yV_Z}{Z} \quad => \quad \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$

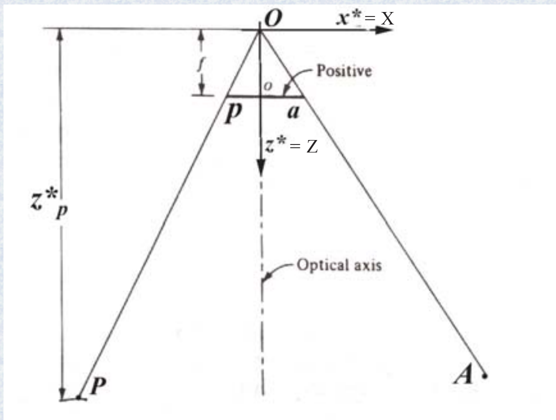
- Time-to-impact
- Non posso stimare la velocità e la distanza.



# Determiniamo Z e Vz

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x} \qquad \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$

E' una corrispondenza biunivoca? No

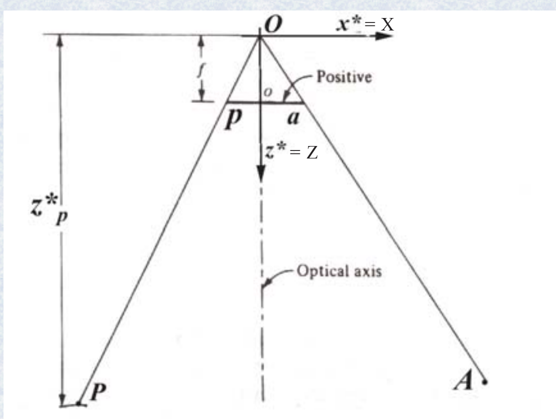



Il mondo visto da due punti può essere scalato. E' "gonfiabile".



# 1) Determiniamo Z e Vz: punto P.

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x} \qquad \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$




Fissiamo $Z_{ref}$ o Vz(**P**):

Posso calcolare Vz.

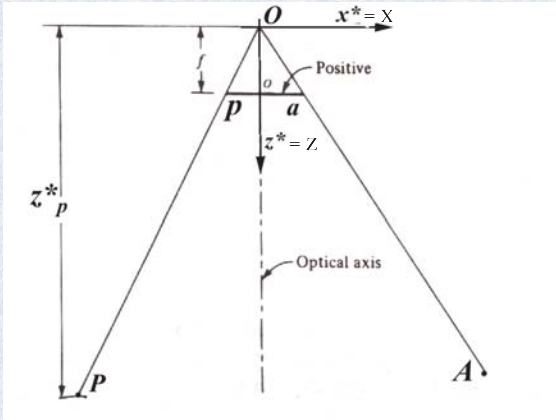
Posso calcolare Z di ogni punto P:

$$Z = -\frac{V_Z}{v_x} x$$

$$Vz(\mathbf{P}) = -\sum_K \frac{v_{x_K} Z_K}{x_K}$$

# 2) Determiniamo Z e Vz: distanza d

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x} \qquad \frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y}$$




Fissiamo $d_{ref} = Z_2 - Z_1$

$$\frac{V_Z}{Z_1} = a \qquad \frac{V_Z}{Z_2} = b$$

$$a\frac{Z_1}{Z_1 + d_{ref}} = b$$

$$Z_1 = \frac{b d_{ref}}{a - b}$$

$$Z_1 = \frac{\frac{V_Z}{Z_2} d_{ref}}{V_Z \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_1 Z_2}} = \frac{Z_{1_{measured}} d_{ref}}{d_{measured}}$$



# Stima robusta

$$Vz = -\sum_K \frac{v_{x_K} Z_K}{x_K} \qquad Vz\ \{mean(Vz(\mathbf{P}));\ \sigma(Vz(\mathbf{P}))\}$$

- Ordino i campioni Vz(**P**) a seconda del valore di |Vz(**P**)-mean(Vz(**P**))|

- Elimino i campioni che sono "troppo lontani" dal valore atteso, cioè Vz(**P**) : |Vz(**P**)-mean(Vz(**P**))| > $\sigma_{ref}$.

- Ripeto la stima:

$$Vz = -\sum_j \frac{v_{x_j} Z_j}{x_j} \qquad \sigma(Vz(X_j, Y_j, Z_j)) < \sigma_{ref}$$

# Completamento calcolo struttura

•*Dal campo di moto:*

$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_x}{x} \quad => \quad \mathrm{v_x} = \frac{-xV_Z}{Z} = f\,\frac{-X}{Z}\frac{V_Z}{Z} \qquad \mathrm{X} = \frac{-v_x}{f}\frac{Z^2}{V_Z}$$

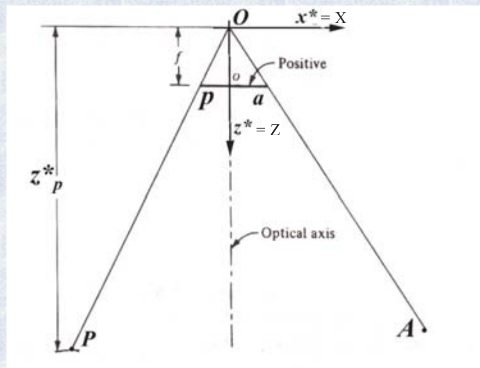
$$\frac{V_Z}{Z} = -\frac{v_y}{y} \quad => \quad \mathrm{v_y} = \frac{-yV_Z}{Z} = f\,\frac{-Y}{Z}\frac{V_Z}{Z} \qquad \mathrm{Y} = \frac{-v_y}{f}\frac{Z^2}{V_Z}$$

•*Dalla geometria:*

$$\mathbf{p} = \mathrm{f}\,\frac{\mathbf{P}}{Z} = \left[ f\frac{X}{Z}; f\frac{Y}{Z}; f\frac{Z}{Z} \right]$$

$$\mathrm{X} = \frac{x}{f}Z\,.$$

$$\mathrm{Y} = \frac{y}{f}Z\,.$$






# Valutazione dell'accuratezza

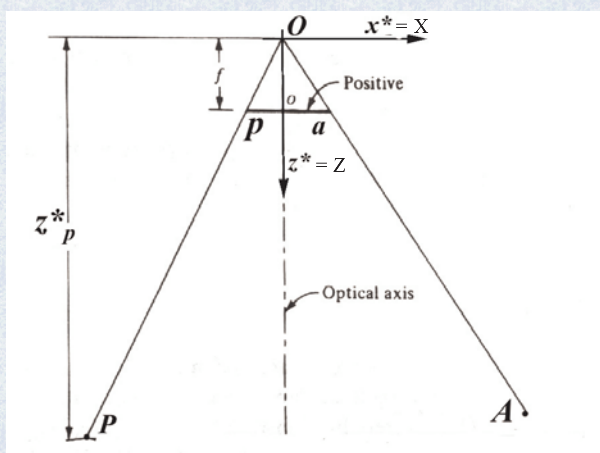
$$Z = -\frac{V_Z}{v_x}x \qquad \text{differenziale: } dZ = \frac{dZ}{dv_x}dv_x = \frac{V_Z}{v_x^2}dv_x$$

*Ricordando che:* $\mathrm{v_x} = \frac{-fXV_Z}{Z^2} \quad \mathrm{v_y} = \frac{-fYV_Z}{Z^2}$

$$\mathrm{dZ} = \frac{V_Z}{\frac{f^2X^2V_Z^{\,2}}{Z^4}}dv_x = \frac{Z^4}{f^2X^2V_Z}dv_x = \frac{Z^2}{x^2V_Z}dv_x$$

•Altre coordinate:

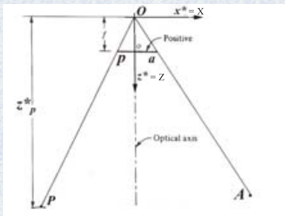
$$\mathrm{X} = \frac{x}{f}Z\,.$$



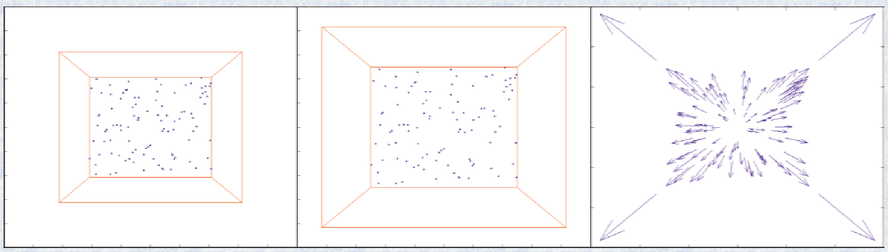
# Accelerazioni nel campo di moto

$$\mathbf{v_p} = f\left(\frac{\mathbf{V_P}}{Z} - \frac{\mathbf{P}V_Z}{Z^2}\right)$$

E' costante il campo di moto (v(p)) se **V(P)** = costante?

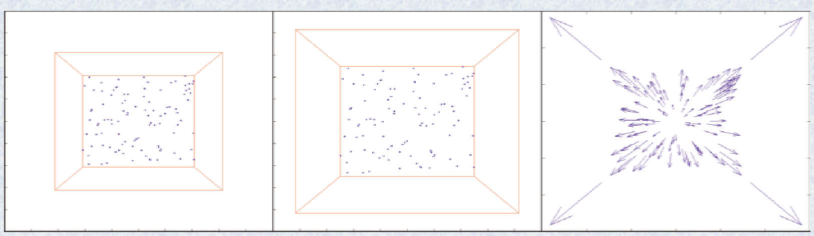



$$\mathbf{a_p} = f\left(\left(\frac{\frac{\mathbf{dV_P}}{\mathbf{dt}}}{Z} - \frac{\mathbf{V_P}}{Z^2}\frac{dZ}{dt}\right) - \left(\frac{\frac{\mathbf{dP}}{\mathbf{dt}}V_Z}{Z^2} + \frac{\mathbf{P}\frac{dV_Z}{dt}}{Z^2} - \frac{\mathbf{P}V_Z}{Z^3}\frac{dZ}{dt}\right)\right)$$





# Accelerazioni nel campo di moto

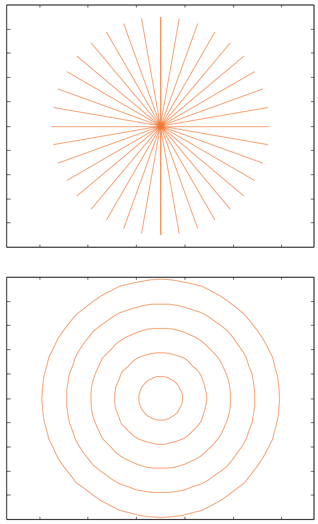


Supponiamo **Vp** = [0 0 Vz] = costante. E' costante il campo di moto?

$$\mathbf{a_p} = f\left(\left(\frac{\frac{\mathbf{dV_P}}{\mathbf{dt}}}{Z} - \frac{\mathbf{V_P}}{Z^2}\frac{dZ}{dt}\right) - \left(\frac{\frac{\mathbf{dP}}{\mathbf{dt}}V_Z}{Z^2} + \frac{\mathbf{P}\frac{dV_Z}{dt}}{Z^2} - \frac{\mathbf{P}V_Z}{Z^3}\frac{dZ}{dt}\right)\right) =$$

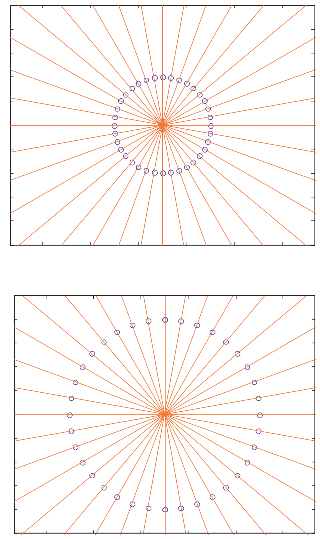
$$f\left[\frac{XV^2{}_z}{Z^3}\ \frac{YV^2{}_z}{Z^3}\ \frac{ZV^2{}_z}{Z^3} - \frac{ZV^2{}_z}{Z^3}\right] = f\left[\frac{xV^2{}_z}{Z^2}\ \frac{yV^2{}_z}{Z^2}\ 0\right]$$

<u>**Quali movimenti possiamo calcolare?**</u>



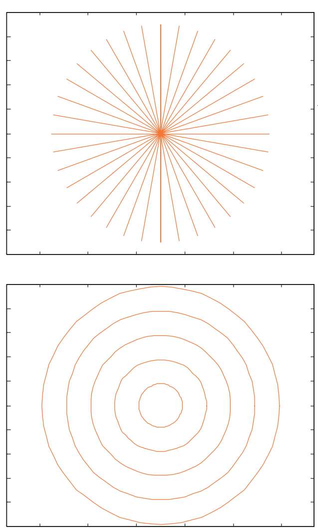
No

Sì



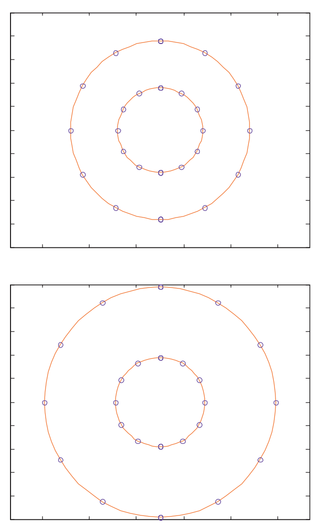


# Quali movimenti possiamo calcolare?

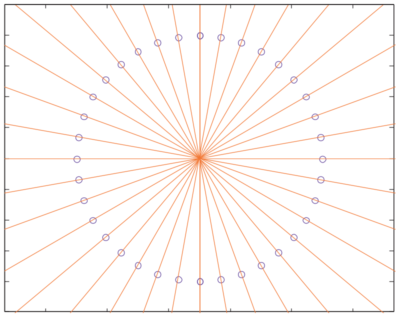


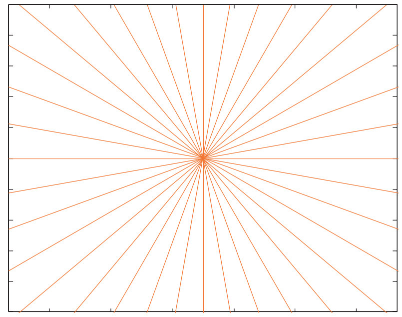
No

Sì



# Effetto del campo di moto

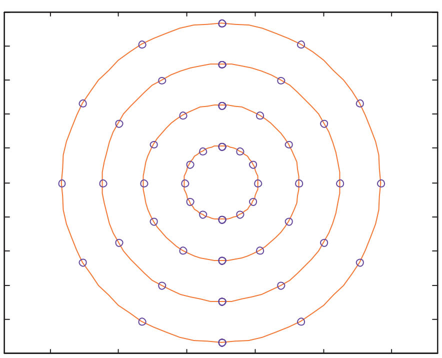


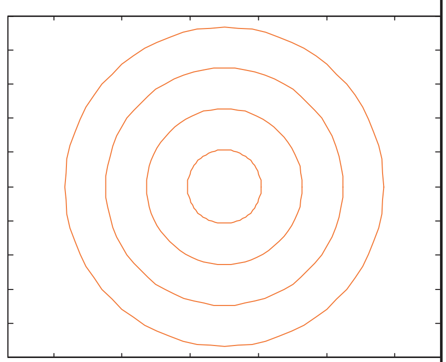


Movimento 3D indistinguibile



# Effetto del campo di moto





Movimento 3D distinguibile

## Moto traslatorio lungo l'asse, Vx = Vy = 0 (riassunto)

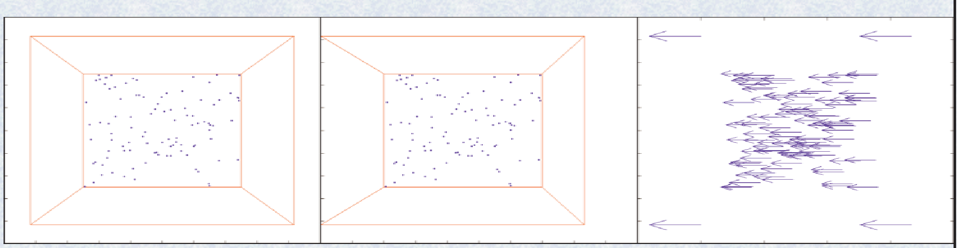
- Se $Vz \neq 0$, il campo di moto è radiale. Tutti i vettori puntano verso un punto, $\mathbf{p_e}$.
- La lunghezza dei vettori spostamento è inversamente proporzionale alla distanza dal piano immagine, Z e direttamente proporzionale a Vz
- La risoluzione della profondità varia linearmente con la distanza.
- A velocità 3D costante, non corrisponde una velocità apparente costante.
- $\mathbf{p_c}$ è il punto di fuga della direzione di traslazione.
- Vz/Z è il "time to contact".
- Per disambiguarli occorre una misura metrica.
- Si possono poi determinare X,Y dalle equazioni proiettive.



## Moto traslatorio perpendicolare all'asse ottico (Z = cost, Vz = 0)

- $v_x = \dfrac{V_X f - xV_Z}{Z} = \dfrac{V_X f}{Z}$
- $v_y = \dfrac{V_Y f - yV_Z}{Z} = \dfrac{V_Y f}{Z}$

$v_z = 0$

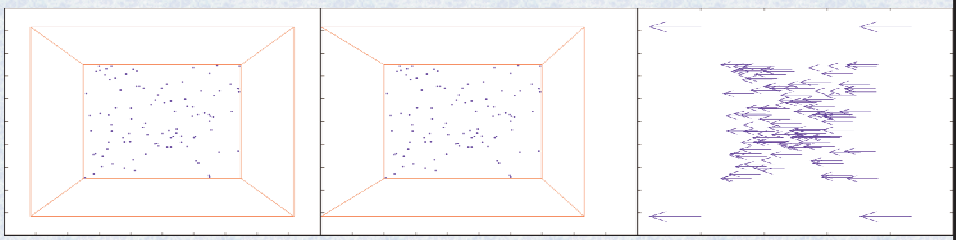


- Vettori di moto paralleli

Punto di fuga: all'infinito.

# Structure from Moto traslatorio (Vz = 0)

•$v_x = \dfrac{V_X f - xV_Z}{Z} = \dfrac{V_X f}{Z}$ •$v_y = \dfrac{V_Y f - yV_Z}{Z} = \dfrac{V_Y f}{Z}$ •$v_z = 0$



• $\dfrac{V_X}{Z} = \dfrac{v_x}{f}$ • $\dfrac{V_Y}{Z} = \dfrac{v_y}{f}$

• Fisso la distanza di un punto, $Z_{ref}$.

• Dalle equazioni proiettive:

$$X = \frac{x}{f} Z .$$

$$Y = \frac{y}{f} Z .$$

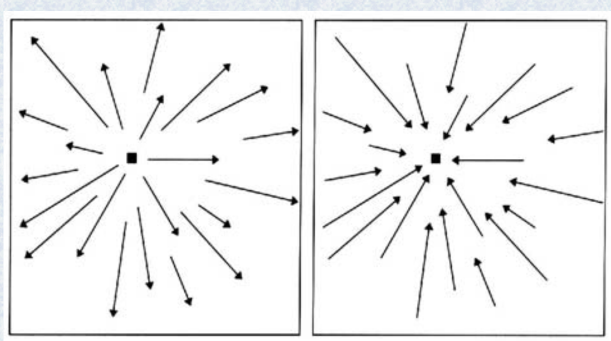


# Moto traslatorio generico ($V_Z \neq 0$)

$$v_x = \frac{V_X f - xV_Z}{Z}$$

$$v_y = \frac{V_Y f - yV_Z}{Z}$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{V_Y f - yV_Z}{V_X f - xV_Z}$$

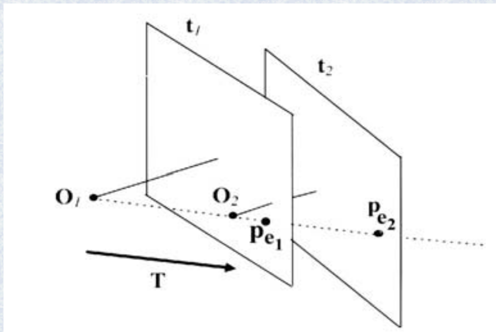


(a) (b)

# Punto 2D che non ha moto apparente

$$\frac{V_X}{V_Z} = \frac{x}{f} \Rightarrow x_e = \frac{V_X f}{V_Z} \qquad \frac{V_Y}{V_Z} = \frac{y}{f} \Rightarrow y_e = \frac{V_Y f}{V_Z}$$

*Punto* ***p****(x,y) con velocità nulla,* $\boldsymbol{p_e}$. Quale?




Quello che "vede" sulla propria retta di proiezione entrambi i centri di proiezione.

Questa retta coincide con la direzione di traslazione.



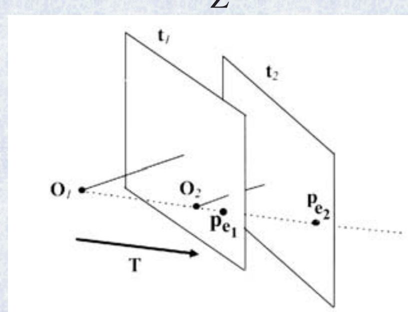
# Punto di fuga della traslazione

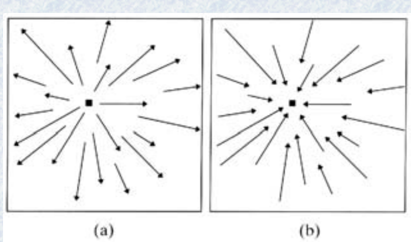
$$v_x = \frac{V_X f - xV_Z}{Z} \qquad v_y = \frac{V_Y f - yV_Z}{Z}$$

*Punto con velocità nulla,* $\boldsymbol{p_e}$:

$$x_e = \frac{V_X f}{V_Z}$$

$$y_e = \frac{V_Y f}{V_Z}$$




*Il campo di moto è:*

$$v_x = -(x - x_e)\frac{V_Z}{Z}$$

$$v_y = -(y - y_e)\frac{V_Z}{Z}$$

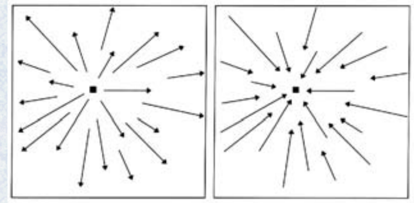
## Structure from Motion (traslazione)

*1) Determino l'epipolo* $\boldsymbol{p_e}$.

$\forall \mathbf{p_k(x_k,y_k)}$ calcolo il vettore di moto:

$(y-y_k) = (v_y/v_x)(x-x_k)$

$y = mx + q$



(a) (b)

- L'epipolo è il punto di intersezione di tutte le rette:

$$\{y - m_k x = q_k\} \quad => \quad \mathbf{p_e}\ (x_e,y_e)$$

- Si possono pesare i diversi vettori di moto (ad esempio con $\lambda_2$)

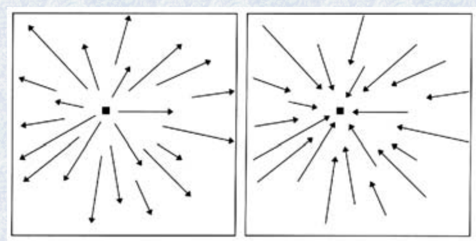


## Structure from Motion (traslazione)

*2) Determino la direzione della traslazione.*

$$x_e = \frac{V_X f}{V_Z} \qquad y_e = \frac{V_Y f}{V_Z}$$

$$\frac{V_X}{V_Z} = \frac{x_e}{f} \qquad \frac{V_Y}{V_Z} = \frac{y_e}{f} \qquad V_Z = 1$$



(a) (b)

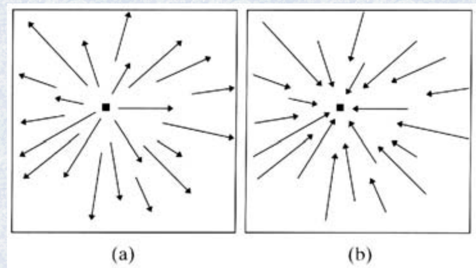
•Normalizzando, d= $\sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}} = 1$ calcolo il versore traslazione:

$\mathbf{V_u} = [V_X/d;\ V_Y/d;\ 1/d]$

## Structure from Motion (traslazione / profondità)

*3) Determino la traslazione, dato un punto.*

$$\frac{V_X}{V_Z} = \frac{x_e}{f} \qquad \frac{V_Y}{V_Z} = \frac{y_e}{f}$$



•Considero le equazioni del campo di moto:

$$v_x = \frac{V_X f - xV_Z}{Z} = \frac{V_X}{V_Z} f - x\frac{V_Z}{Z}$$

$$v_y = \frac{V_Y f - yV_Z}{Z} = \frac{V_Y}{V_Z} f - y\frac{V_Z}{Z}$$

$$\frac{V_Z}{Z} = \frac{\left(\frac{V_X}{V_Z} f - v_x\right)}{x}$$

• Ricavo Vz -> Ricavo Vx,Vy -> Ricavo X,Y,Z ∀punto **P**.



## Campo di moto traslatorio (riassunto)

• Se Tz≠ 0, il campo di moto è radiale. Tutti i vettori puntano verso un punto, $\mathbf{p_e}$.

• Se Tz = 0, il campo di moto è costituito da vettori paralleli.

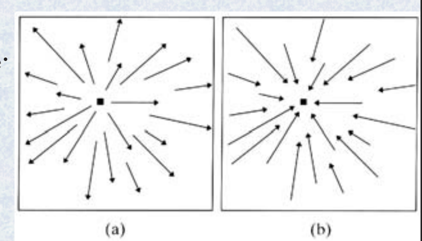
• La lunghezza dei vettori spostamento è inversamente proporzionale alla distanza dal piano immagine, Z.

• A velocità 3D costante, non corrisponde una velocità apparente costante.

• La lunghezza dei vettori spostamento è proporzionale alla distanza di **p** da $\mathbf{p_e}$.

•$\mathbf{p_e}$ è il punto di fuga della direzione di traslazione.

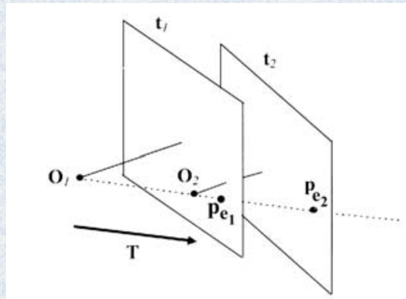
• $\mathbf{p_e}$ è l'intersezione del vettore traslazione passante per i due centri di proiezione ed il piano immagine.



•

# Campo di moto traslatorio (Structure from Motion)

• Determino l'epipolo dal campo di moto.
• Determino la direzione della traslazione dalla posizione dell'epipolo (l'epipolo determina la direzione della traslazione).
• Data una misura presa sul campo, determino il vettore traslazione (il valore di Vz).
• Lo spostamento di tutti i punti 3D è identico.
• Dalla traslazione, posso calcolare la posizione 3D di tutti i punti.
• Ciascuna di queste quantità può essere stimata in modo robusto.






# Possiamo risolvere il problema di Structure from Motion

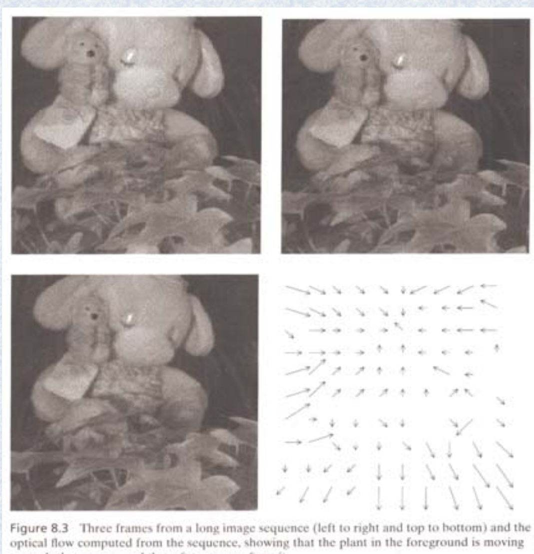


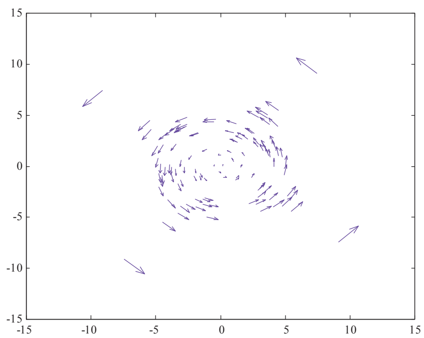
Figure 8.3 Three frames from a long image sequence (left to right and top to bottom) and the optical flow computed from the sequence, showing that the plant in the foreground is moving towards the camera, and the soft toys away from it.

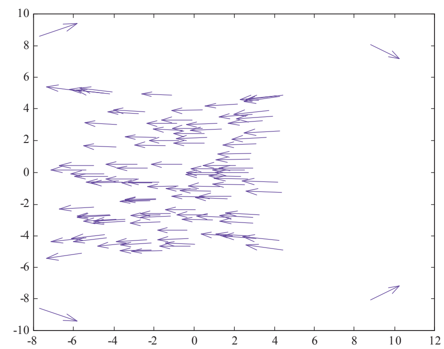
# Rotazione

$$\mathbf{v_P} = f\left(\frac{\mathbf{V_P}}{Z} - \frac{\mathbf{P}V_Z}{Z^2}\right) \qquad \mathbf{V_P} = d\mathbf{P}/dt = \boldsymbol{\omega} \,\Lambda\, \mathbf{P}$$

$$v_x = (\omega_y Z - \omega_z Y)(f/Z) - fX(\omega_x Y - \omega_y X)/Z^2 = f\omega_y - \omega_z y - xy\omega_x/f + \omega_y x^2/f$$
$$v_y = (-\omega_x Z + \omega_z X)(f/Z) - fY(\omega_x Y - \omega_y X)/Z^2 = -f\omega_x + \omega_z x - xy\omega_y/f + \omega_x y^2/f.$$

- Non dipende da Z, non è possibile vedere la struttura con solo rotazione.






# Link interessanti

http://profs.sci.univr.it/%7Efusiello/teaching/visione/appunti.pdf
http://www.photogrammetry.ethz.ch/
http://cvlab.epfl.ch/index.html
http://www.vision.cs.ucla.edu/
http://www.vision.caltech.edu/html-files/overview.html
http://www.ai.mit.edu/projects/cbcl/web-pis/poggio/