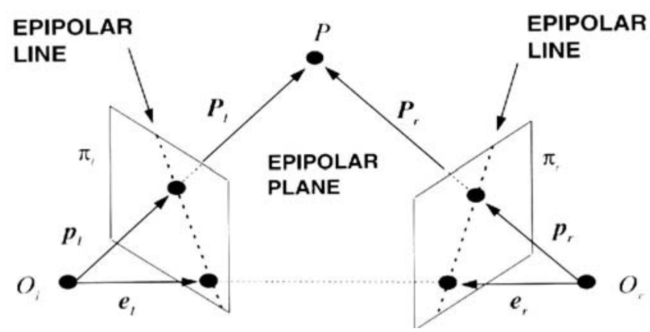
Geometria Epipolare

Alberto Borghese
Department of Computer Science
University of Milano
http://www.inb.mi.cnr.it/borghese.html
borghese@dsi.unimi.it

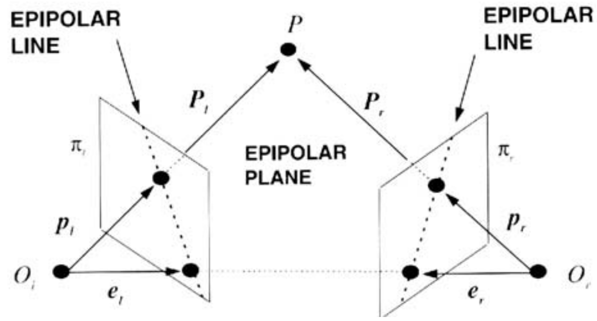
Elementi di geometria epipolare



Epipolo: è l'intersezione della linea per il centro di proiezione O, ed il piano immagine, π, in due istanti successivi (direzione traslazione).

P, $\mathbf{p_l}$ e $\mathbf{p_r}$ stanno sullo stesso piano: *il piano epipolare*.

Proprietà della geometria epipolare



$\mathbf{e_l}$ è proiezione di $\mathbf{O_r}$ sulla prima posizione e viceversa.

Dato il movimento della camera, come si può trovare $\mathbf{p_l}$ che corrisponda a $\mathbf{p_r}$?

Retta: $\mathbf{p_l O_l}$ Piano epipolare $\mathbf{O_l O_r p_l}$ Retta epipolare: $\mathbf{e_r p_r}$

$\mathbf{p_r} \in$ piano epipolare.

Geometria epipolare

Presa una camera in *due posizioni*, il piano per un punto **P** ed il centro di proiezione nelle due posizioni si chiama *piano epipolare*. Le rette intersezione del piano epipolare con il piano immagine nelle due posizioni sono le *rette epipolari*.

Gli epipoli sono la proiezione del centro di proiezione in una posizione sul piano immagine nella seconda posizione.

Data una prospettiva della camera (parametri interni) ed il movimento, i punti su una retta epipolare della seconda posizione sono tutti quelli che possono corrispondere ad un punto individuato sul piano immagine nella prima posizione.

Derivazione della matrice Essenziale

Rappresentazione matriciale:

$\mathbf{E p_r} = \mathbf{l_l}$
$\mathbf{p_r^T\ E\ p_l = 0}$

con **E** matrice essenziale e contiene i parametri di movimento della camera.

La matrice Essenziale

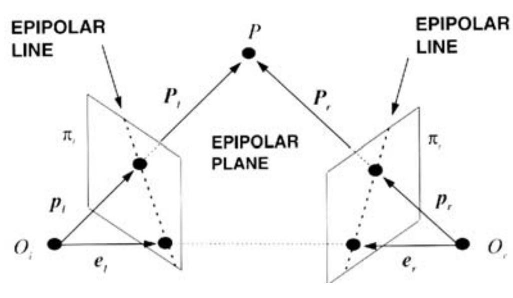
Ipotesi:

$\mathbf{P_l} = [X_l, Y_l, Z_l]$ = coordinate 3-D di P viste dalla prima posizione.
$\mathbf{P_r} = [X_r, Y_r, Z_r]$=coordinate 3-D di P viste dalla seconda posizione.

T = vettore traslazione
R = matrice di rotazione

Equazione del piano epipolare usando la condizione di coplanarità dei vettori $\mathbf{P_l}$,**T**, $\mathbf{P_l} - \mathbf{T}$:

$(\mathbf{P_l} - \mathbf{T})^T \mathbf{T} \times \mathbf{P_l} = 0$



La matrice essenziale (II)

$(\mathbf{P_l} - \mathbf{T})^T \mathbf{T} \times \mathbf{P_l} = 0$

sapendo che : $\mathbf{P_r} = \mathbf{R}(\mathbf{P_l} - \mathbf{T})$,

vale: $(\mathbf{R}^T\mathbf{P_r})^T \mathbf{T} \times \mathbf{P_l} = 0$,

Troviamo un'espressione migliore per il prodotto vettore:

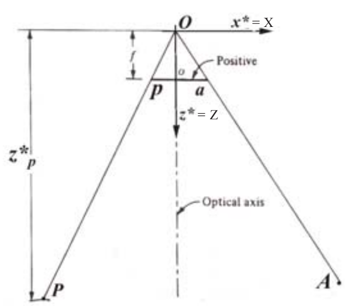
$$(\mathbf{T}\wedge) = \begin{bmatrix} 0 & -T_z & T_y \\ T_z & 0 & -T_x \\ -T_y & T_x & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T} \times \mathbf{P_l} = (\mathbf{T}\wedge)\ \mathbf{P}$

Definisco: $\mathbf{E} = \mathbf{R}(\mathbf{T}\wedge)$ contiene i parametri esterni.

$\mathbf{P_r}^T \mathbf{E} \mathbf{P_l} = 0$

La matrice essenziale funzione delle coordinate sul piano immagine



$\mathbf{P_r}^T \mathbf{E} \mathbf{P_l} = 0$

$\mathbf{P_l}$, $\mathbf{P_r}$ stesso punto, viste diverse.

Consideriamo le <u>coordinate normalizzate</u>:

$$\frac{(\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_{ol})}{f_l} = \mathbf{p'_l} \qquad \frac{(\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_{or})}{f_r} = \mathbf{p'_r}$$

$$\mathbf{p'}_l = \frac{\mathbf{P}_l}{Z_l} \qquad \mathbf{p'}_r = \frac{\mathbf{P}_r}{Z_r} \qquad \boxed{\mathbf{p'_r}^T \mathbf{E}\mathbf{p'}_l = 0}$$

NB: Si perde l'informazione metrica.

Determinazione della matrice E

•N punti che si corrispondono nelle due immagini.

•Scrivo l'equazione della matrice Essenziale per ogni punto: $\mathbf{p_r E p_l} = 0$.

•Ottengo un sistema omogeneo: la matrice **E** sarà la soluzione non banale del sistema, definita a meno di un fattore di scala.

• In pratica riscrivo il sistema come $\mathbf{AX} = 0$. Sovradeterminato (size(**A**) è Nx9).

• Risolvo il sistema tramite SVD come: $\mathbf{UWVX} = 0$. La soluzione è $\mathbf{V}^9$.

• $\mathbf{V}^9 \Rightarrow \mathbf{E}$

Determinazione di R e T

$\mathbf{E} = \mathbf{RS} = \mathbf{R}\,(\mathbf{T}\Lambda)$

$\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \mathbf{S}^T\mathbf{R}^T\mathbf{RS}. = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$ => **T**, a meno del segno e di un fattore di scala.

det(**E**) = 0 $\mathbf{E} = \mathbf{U\,W\,V}^T$ con $\mathbf{W} = \mathrm{diag}[\lambda, \lambda, 0]$

R è tale per cui: $\mathbf{R} = \mathbf{UEV}^T$ $\mathbf{R} = \mathbf{UE}^T\mathbf{V}^T$

Posizione frontale dei punti per determinare la soluzione.

Determino il modulo di T a partire dalla distanza di due punti nello spazio 3D e dalla sua proiezione.

Structure from Motion (Riassunto)

• Identifico coppie di features in due immagini consecutive.

• Scrivo l'equazione di coplanarità per ogni coppia di features.

• Stimo la matrice essenziale, **E**, tramite SVD.

• Dalla matrice essenziale al quadrato, ricavo **T** a meno del segno.

• Tramite SVD della matrice essenziale ricavo **R** a meno del verso di rotazione.

• Calcolo il segno corretto di **T** ed **R** controllando che i punti siano ricostruiti frontalmente.

• Determinazione della norma di **T** da misure 3D sul campo.

• Da **R**, **T** (e f, $\mathbf{p_o}$) posso ricostruire la posizione 3D delle features.

Dalla matrice essenziale alla matrice fondamentale

La matrice essenziale contiene i parametri esterni fattorizzati ma non contiene i parametri interni perché le coordinate sono già considerate normalizzate.

La matrice fondamentale F

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -f & 0 & x_c \\ 0 & -f & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{p'}_r^T \mathbf{E} \mathbf{p'}_l = 0}$$

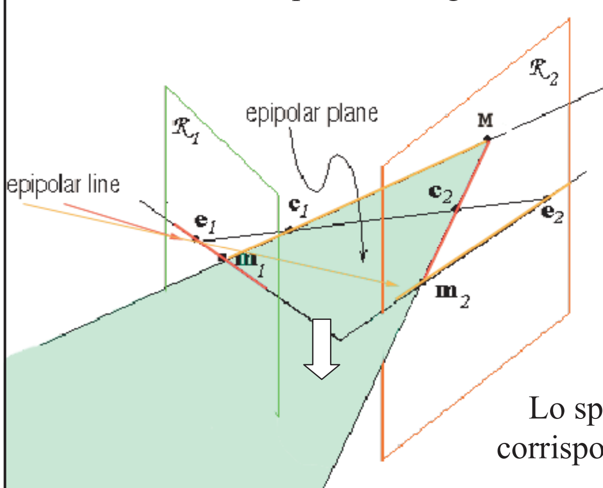
$\mathbf{p}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{p'}_l$
$\mathbf{p}_r = \mathbf{K}_r \mathbf{p'}_r$

$$\mathbf{p}_r^T \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{E} \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{p'}_l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{p}_r^T \mathbf{F} \mathbf{p'}_l = 0}$$

F ha rango 2 e si può dimostrare che consente di determinare al più 7 parametri.

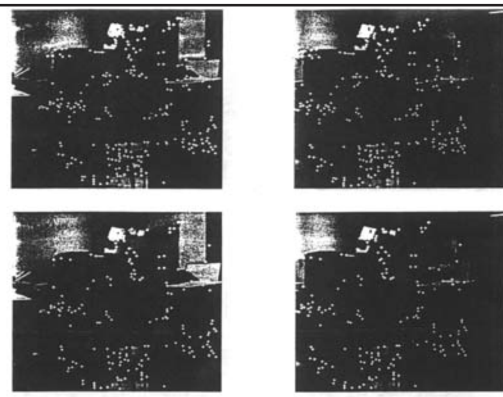
Vincolo epipolare

Dato un punto sul primo piano immagine, il corrispondente sul secondo piano deve giacere sulla retta epipolare



Lo spazio in cui cercare una corrispondenza si riduce da 2 a 1 dimensione

Feature matching



Occlusioni
Viste incomplete

Algoritmi di livello superiore su un numero ristretto di features.

Calibrazione epipolare

Problema di ottimizzazione: trovare i parametri per i quali il vincolo epipolare è soddisfatto per tutti i punti, con il vincolo che la distanza tra 2 punti sia quella reale.

Non si passa dal sistema di riferimento assoluto ma si trasforma un piano immagine nel secondo piano immagine.

Calibrazione epipolare

Si possono determinare solamente sette parametri in forma chiusa.

Gli altri parametri devono essere determinati con algoritmi di ottimizzazione iterativi.