Introduzione ai sistemi fuzzy

I Fuzzy set

Nella logica classica $A \cap A^c = \emptyset$. $A = T \Leftrightarrow A^c = F$. $A = [T, F]$.

Nella teoria fuzzy, tutto è questione di gradazione.

Dal punto di vista matematico, fuzzy e' equivalente ad una proposizione logica che puo' assumere un numero infinito di valori tra vero e falso.


La funzione verita' generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy o $\mathbf{L_1}$.

La funzione verità fuzzy

La funzione verita' generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy o $\mathbf{L_1}$.

$A \cap A^c \neq \emptyset$ Viene violata la legge di non contraddizione.

$A \cup A^c \neq X$ Viene violata la legge degli "excluded middle" o mutua esclusione.

Esempio di Fuzzy set

Costruiamo una montagnetta di granelli di sabbia, S.

Non esiste un particolare granello per cui S = T diventi S = F.

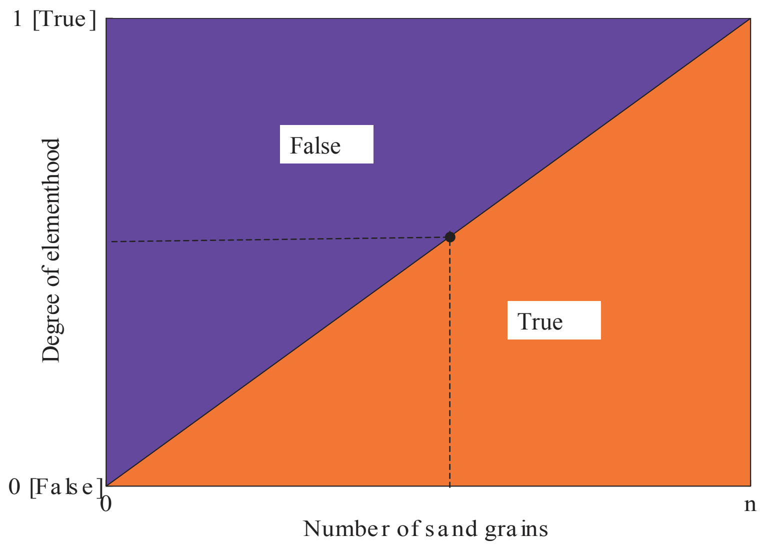
Supponendo di avere una montagnetta di n granelli di sabbia, possiamo scrivere: $T(S_{n-m}) = 1 - d_{n-m}$. d esprime un margine di dubbio.

Vale la relazione $0 \leq d_n \leq d_{n-1} \leq d_{n-2} \leq d_{n-3} \leq \ldots.. \leq d_1 \leq d_0 \leq 1$.

Nulla e' detto ancora sulla forma della funzione che passa da 0 ad 1.

(cf. l'esperimento di Moravec)

La funzione di appartenenza (membership function)



 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Fuzzyness versus probability

La **fuzzyness** descrive l'ambiguità insita in un evento.
La **probabilità** descrive l'incertezza che l'evento avvenga.

Che un evento accada o meno è una questione di probabilità, in quale misura accada è un questione di fuzzyness.

Esempio: "C'è il 20% di probabilità che domani ci sia pioggia leggera".

Ma anche: "Errori piccoli", "Clienti soddisfatti", "paesi in via di sviluppo", "segnali affetti da rumore",….

Una soluzione potrebbe essere definire meglio i confini degli insiemi. E' possibile? Quale vantaggio se ne trarrebbe?

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Fuzzyness versus Probabilità (esempi)

•Propongo un libro ad un editore (che può rispedirlo al mittente o chiederne la revisione).

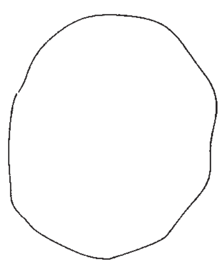
•Apro il frigorifero in cui trovo una mezza mela.

•Parcheggio la mia automobile (non è previsto che venga parcheggiata a cavallo delle strisce: si rischia la contravvenzione).

Dopo che un evento è avvenuto, la sua probabilità svanisce.

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Fuzzy versus probabilità (formalmente)



Ha più senso dire che questo è un ellisse fuzzy o che è proabilmente un ellisse?

Pur essendoci tutti gli elementi dell'evento, l'incertezza rimane. A cosa è dovuta?

Possiamo scrivere che: $m_A(x) = \text{Prob}\{x \in A\}$ true? NO.

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Gli operatori logici fuzzy

T(A **AND** B) = ***min***(**T**(A), **T**(B))

T(A **OR** B) = ***max***(**T**(A), **T**(B))

T(**NOT-**A) = 1 – **T**(A)

Lukasiewicz, 1969.

Segue che: **T**(A **AND** A^c) + **T**(A **OR** A^c) = 1.

Rapporto con gli operatori della logica classica?

Valgono se vale il principio di mutua esclusione e di non contraddizione.

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Esempio sugli operatori logici fuzzy

Oggetto: temporale forte (A), temporale leggero (B).
Classi fuzzy: pioggia pesante, molti fulmini, pioggia leggera, vento forte.

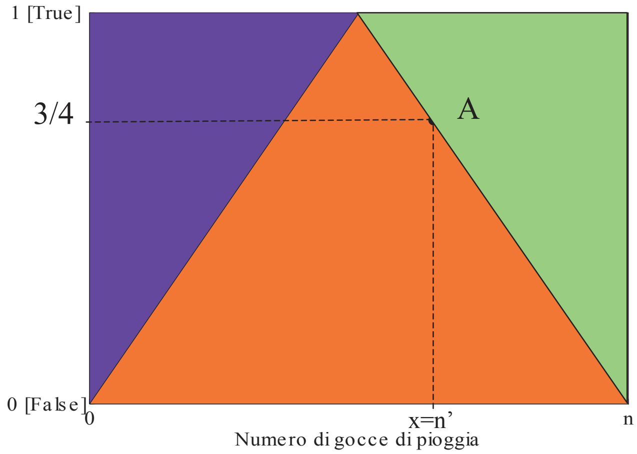
A = (1. .8 0. .5)
B = (.4 .4 .7 .7)

$A \cup B$ = (1. .8 .7 .7)
$A \cap B$ = (.4 .4 0. .5)

A^c = (0 .2 1. .5)
$A \cap A^c$ = (0 .2 0. .5) $\mathbf{A \cap A^c \neq \emptyset}$
$A \cup A^c$ = (1 .8 1. .5) $\mathbf{A \cup A^c \neq X}$

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Verso l'entropia fuzzy

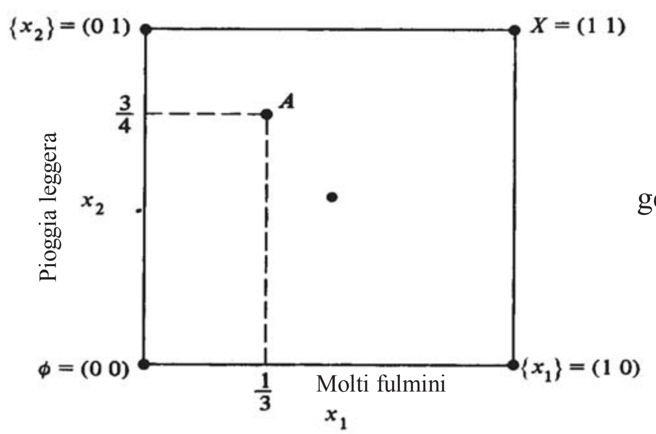


Funzione di appartenenza.
Appartenenza ad 1 classe.

Esempio: $m_A(x=n') = 3/4$

Sta piovendo in modo leggero?

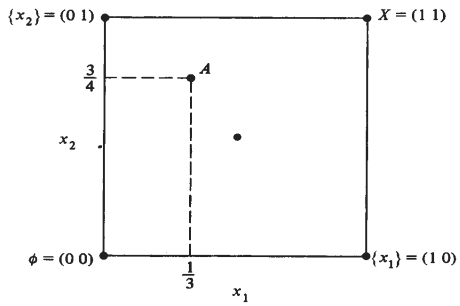
Cosa succede quando si considerano più classi?



Rappresentazione geometrica di 2 classi fuzzy.

Un certo insieme fuzzy (di fulmini e gocce di pioggia) è un punto in un ipercubo di dimensioni $I_2 = [0,1]x[0,1] = [0,1]^2$, in generale, $I_n = [0,1]^n$.

Proprietà dello spazio fuzzy



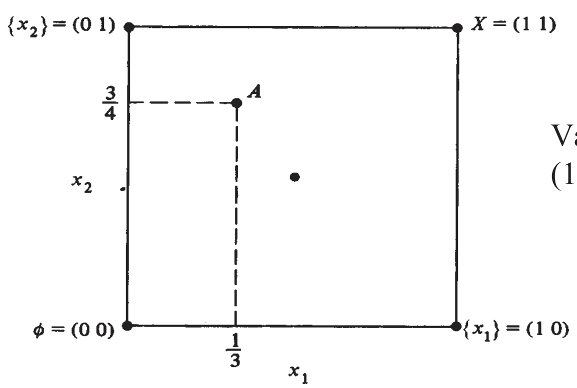
I vertici dell'ipercubo cosa rappresentano?

NF = {Ø, X, {x_1}, {x_2}}.

Questi 4 elementi rappresentano i 4 insiemi non fuzzy dello spazio fuzzy definito dalle 2 classi: pioggia leggera e molti fulmini.

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Proprietà dello spazio fuzzy (II)



Valore di **<u>fit</u>** di A = (1/3 3/4).

Dove troviamo la massima fuzzyness?

Al centro: A U A_c = A $\cap A_c$

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Paradossi associati al centro

Il bugiardo di Creta che diceva che tutti a Creta erano bugiardi.

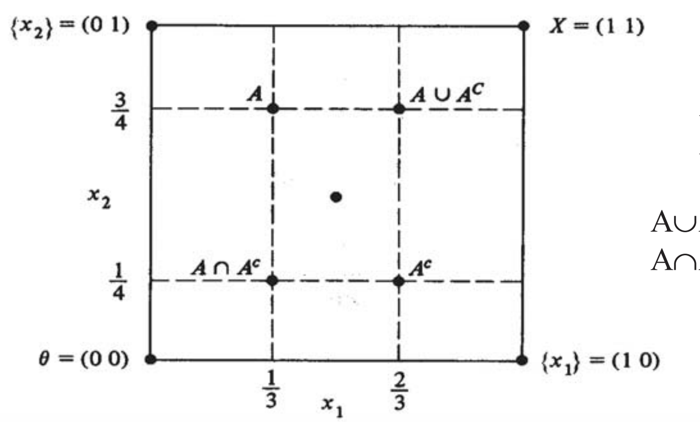
Il barbiere di Bertrand Russell. Fuori dal suo negozio era appeso un cartello che diceva: "il barbiere taglia la barba solamente a tutti quelli che non se la tagliano da soli". Chi taglia la barba al barbiere?

Prendiamo una carte che dice su un lato: "Quello che è riportato sull'altro lato è vero" e sull'altro: "Quello che è riportato sull'altro lato è falso".

Bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto.

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Ipercubo fuzzy interno.



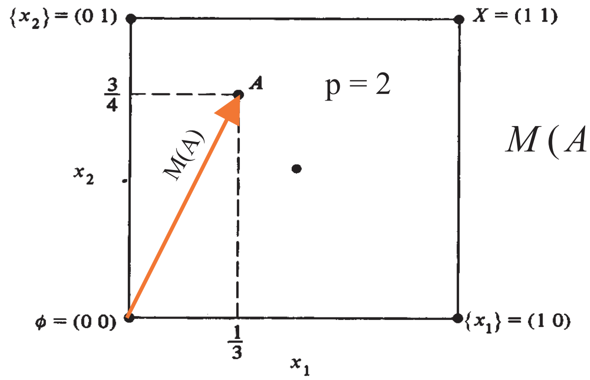
$A = (1/3 \quad 3/4)$
$A^c = (2/3 \quad 1/4)$

$A \cup A^c = (2/3 \quad 3/4)$
$A \cap A^c = (1/3 \quad 1/4)$

•Dipende da A.
•Può degenerare se una proprietà è massimamente fuzzy. Se sono fuzzy sia x_1 che x_2: $A \cup A^c = A \cap A^c = (1/2 \quad 1/2)$.

Copyright N.A. Borghese Università di Milano 27/08/2002 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Ampiezza di un insieme fuzzy



$$M(A) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |m_A(x_i)|^p}$$

Per p = 2 misuriamo la lunghezza del vettore A – O.

Distanza fuzzy di Hamming ***-> l_1***

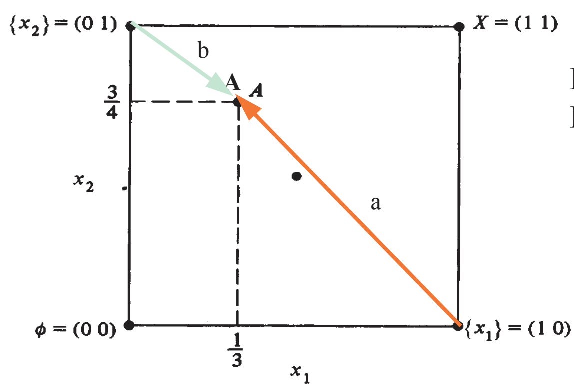
Distanza euclidea. ***-> l_2***

M(A) = 1/3+3/4 = 13/12

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Entropia fuzzy

How (much) fuzzy is a fuzzy set?



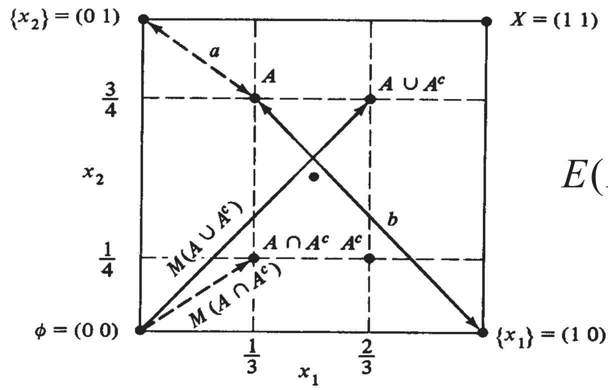
E(A) = 0 nei vertici
E(A) = 1 nel centro

$$E(A) = \frac{a}{b} = \frac{l^1(A, A_{vicino})}{l^1(A, A_{lon\tan o})}$$

$$E(A) = \frac{1/3 + 1/4}{2/3 + 3/4} = 7/17$$

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Teorema dell'entropia fuzzy



$$E(A) = \frac{M(A \cap A^c)}{M(A \cup A^c)}$$

Formulazione collegata alla misura di entropia probabilistica: log(1/p).

$$E(A) = \begin{cases} \dfrac{f}{1-f} & f \leq 1/2 \\ \dfrac{1-f}{f} & f \geq 1/2 \end{cases}$$

Riassunto

•Fuzzyness descrive l'ambiguità di un evento.

•La funzione di appartenenza descrive il grado di appartenenza di un evento ad un insieme di classi (non mutuamente esclusive).

•La fuzzyness si distingue dalla probabilità che misura la probabilità che un evento, nella sua interezza si verifichi o meno.

•Un oggetto fuzzy si può rappresentare come un punto all'interno di un ipercubo di dimensionalità pari al numero di elementi che caratterizzano l'oggetto.

•E' possibile associare ad un insieme fuzzy una misura di entropia che rappresenta il rapporto tra la misura della violazione della legge di reciproca esclusione e di reciproca complementazione.

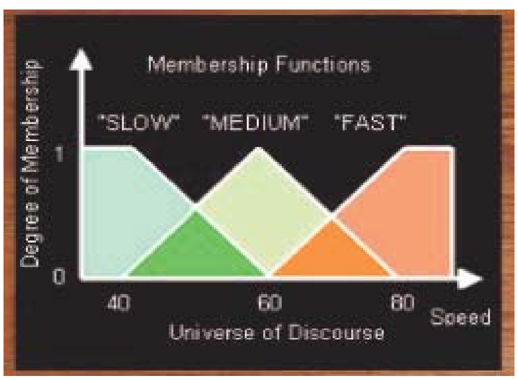
Breve storia

Max Black (1937). Applico' i principi della logica fuzzy a liste di elementi o simboli. Sviluppo' la prima funzione di appartenenza fuzzy e chiamo' l'incertezza dell'appartenenza **vaghezza** (vagueness).

Lofti Zadeh (1965). "Fuzzy sets" sviluppo' una teoria sulla logica fuzzy e su un motore di inferenza sui fuzzy set.

Dal 1985 ad oggi applicazioni tecnologiche con successo crescente in campi più diversi, dal controllo, alla ricerca nei data base, all'elaborazione delle immagini alla classificazione. Vediamo di capirne i fondamenti del successo.

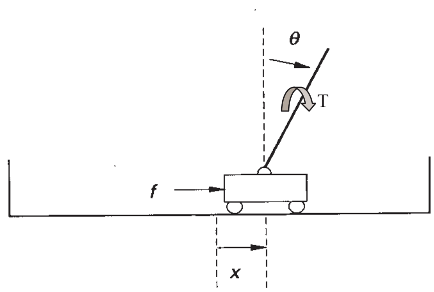
I sistemi fuzzy



I fuzzy set consentono di codificare una conoscenza strutturata in una rappresentazione numerica flessibile.

Dai fuzzy set ai sistemi fuzzy

Cart-pole



Input: A{θ(t), θ'(t), x(t), x'(t)}

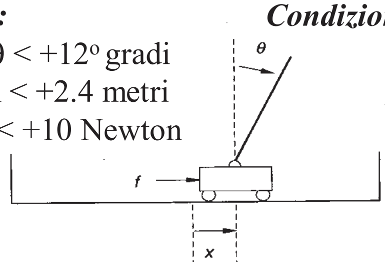
Output: B{f(t), T(t)}

Scopo del sistema di controllo è non fare cadere il bastone e mantenere il carrello sulla rotaia.

Parametri del sistema Cart-pole

Vincoli:
- $-12^o < \theta < +12^o$ gradi
- $-2.4 < x < +2.4$ metri
- $-10 < f < +10$ Newton

Condizioni iniziali: $\theta(0) = \theta'(0), x(0), x'(0) = 0$



Parametri:

g 9.8m/s
m 1.1kg (massa carrello + palo)
m_p 0.1kg (massa del palo)
l 0.5m distanza della cerniera dal centro di massa del palo.
Δt 0.02s (intervallo di campionamento e di controllo).

Equazioni del moto:

$\theta(t+1) = \theta(t) + \theta'(t)\,\Delta t$

$x(t+1) = x(t) + x'(t)\,\Delta t$

$$\vartheta'(t+1) = \vartheta(t) + \frac{mg\sin(\vartheta(t)) - \cos(\vartheta(t))\left(f(t) + m_p l(\vartheta'(t)\pi/180)^2 \sin(\vartheta(t))\right)}{(4/3)ml - m_p l\cos^2(\vartheta(t))}\Delta t$$

$$x'(t+1) = x(t) + \frac{f(t) + m_p l\left((\vartheta'(t)\pi/180)^2 \sin(\vartheta(t)) - \vartheta''(t)\pi/180\cos(\vartheta(t))\right)}{m}\Delta t$$

Fuzzy Associative Memory (FAM)

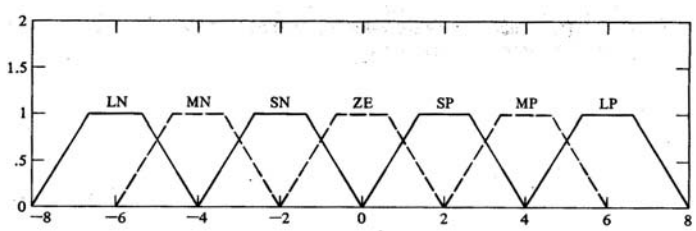
Una FAM trasforma una spazio di input in uno spazio di output.

1) Spazi continui.
2) Spazi fuzzy.

Matematicamente una FAM opera la seguente trasformazione: $I^n \rightarrow I^p$ dove n è il numero di classi della variabile fuzzy di ingresso e p è il numero di classi della variabile fuzzy di uscita.

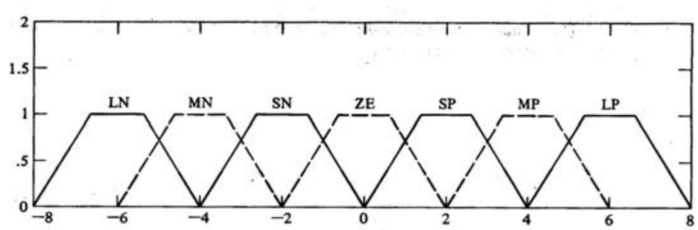
Dato un insieme fuzzy A ∈ I^n, viene definito un insieme B ∈ I^p, che gli corrisponde (notazione alternativa (A,B))

Fuzzy Associative Memory (FAM)



Output

Input



Come si costruisce una FAM?

Codifichiamo la conoscenza strutturata con regole di inferenza logica.

Esempi:

Se il carrello sta traslando velocemente verso sinistra, ***allora*** esercita una forza elevata verso destra.
Se il traffico è elevato in una direzione, ***allora*** mantieni il semaforo verde più a lungo.

Template:
If <classe di appartenenza>, ***then*** <azione richiesta>

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

FAM multi-input

Esempio:

Il palo sta ruotando velocemente in senso orario, il carrello sta traslando velocemente verso destra, il carrello è lontano dal bordo destro della rotaia, la soluzione migliore sarebbe quello di continuare a spingere il carrello verso destra.

Le 4 diverse FAM che associano le variabili di stato alla forza sul carrello danno risposte diverse.

Le FAM non possono perciò lavorare in modo indipendente, ma devono tenere conto di tutti gli attributi in ingresso. Ciascuna FAM non può guardare solo al suo orticello

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Approccio linguistico alle FAM multi-input

Il template:
if <classe di appartenenza>, ***then*** <azione richiesta>
viene modificato in una ***proposizione linguistica composta***:

if <classe di appartenenza variabile 1> and(or)
<classe di appartenenza variabile 2> and(or)
…..
<classe di appartenenza variabile N>
then <azione richiesta>

In forma compatta, la trasformazione FAM diventa: $(A^1, A^2, \quad A^N; B)$

Si possono inserire anche affermazioni negate del tipo:
if !<classe di appartenenza variabile j>

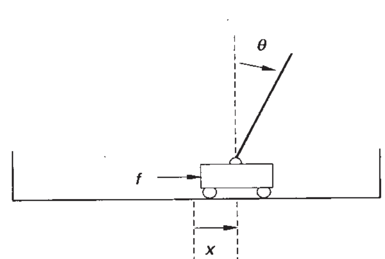
 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

FAM per il cart-pole: definizione

Consideriamo solamente il pendolo inverso semplificato:

1a) ***Identificazione delle variabili del sistema:***
Input: $A\{\theta(t), \theta'(t)\}$ Output: $B\{f(t)\}$

1b) ***Definizione dei range delle 3 variabili:***
$\theta(t)$ range [-90 +90]gradi
$\theta'(t)\}$ range $[-\infty \quad +\infty]$gradi/s
$f(t)$ range [-10 +10]Nm



 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

FAM per il cart-pole: classi fuzzy

2) Quantificazione delle variabili in classi fuzzy:
   a) Definizione delle classi fuzzy.
   b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza.

Esempio di classi fuzzy:

NL:	Molto negativo
NM:	Mediamente negativo
NS:	Poco negativo
ZE:	Zero
PS:	Poco positivo
PM:	Mediamente positivo
PL:	Molto positivo

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

FAM per il cart-pole: costruzione della relazione I/O

La trasformazione della FAM è costituita da 3 variabili: (A_1^{θ}, $A_2^{\theta'}$; B^T).
Una delle possibili relazioni della FAM può essere: (NM, ZE; PM).

if <l'orientamento del pendolo è negativa media> ***e***
<la velocità di rotazione è circa nulla>
allora
<il motore dovrà fornire una coppia positiva media>

Possiamo anche scrivere la trasformazione della FAM come:
(θ, θ'; $F(\theta, \theta')$). Lo spazio di controllo è in questo caso una superficie in R^3.

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

FAM per il cart-pole: costruzione grafica della relazione I/O

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			

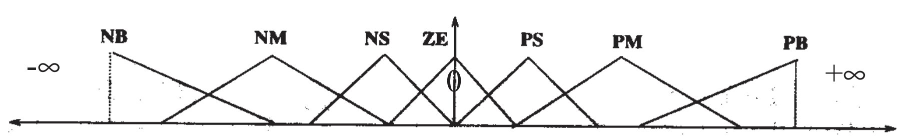
Vengono codificate solamente 15 regole.

La tabella rappresenta una superficie in R^3.

Riduciamo la matematica ad un discorso linguistico intuitivo. Questo è particolarmente interessante quando si vuole trasferire della conoscenza, che di per sé viene espressa in termini linguistici (e non matematica)!

FAM per il cart-pole: funzioni di appartenenza

2b) Definizione della forma e dei boundary delle funzioni di appartenenza per ciascuna variabile fuzzy (di input e di output).

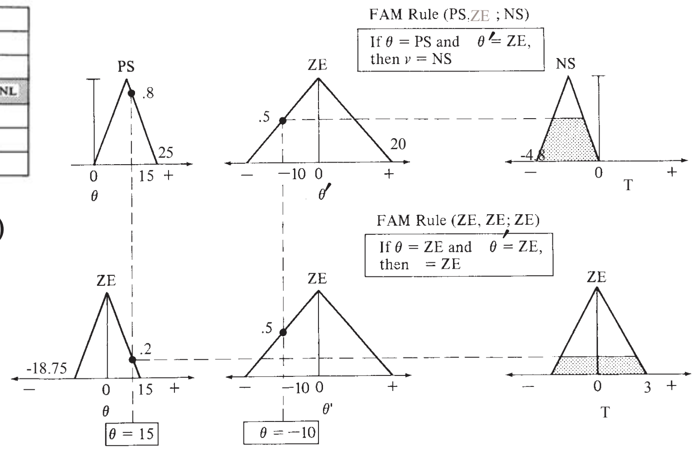


Le regioni sono solitamente triangolari o trapezoidali.
Sovrapposizione, empiricamente 25%.

http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

FAM per il cart-pole: funzionamento

θ' \ θ	NL	NM	NS	ZE	PS	PM	PL
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS	NS		
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS			PS	NS			
PM				NM			
PL				NL			



Input: (θ = 15, θ' = -10)

Classi attivate:
(ZE,ZE) & (PS,NS) &
(PS,ZE) & (ZE,NS)

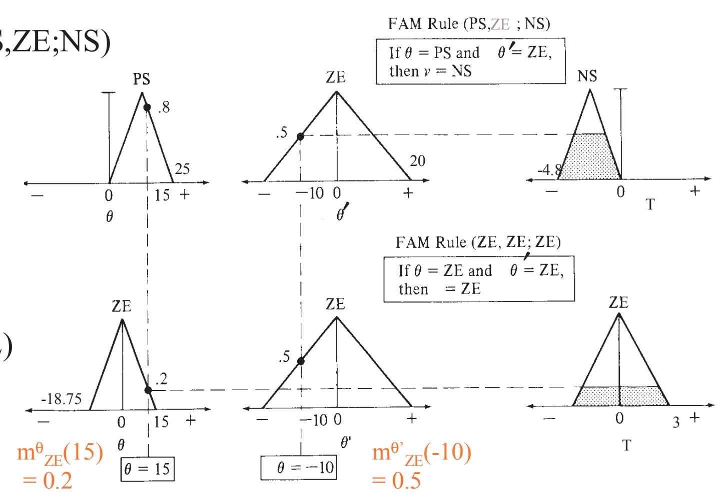
Regole FAM:
(ZE,ZE;ZE) & (PS,NS;NS) &
(PS,ZE;NS) & (ZE,NS;PS)

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Pesatura delle regole

(θ, θ')=(-15, 10) ➔ (PS,ZE;NS)
Grado di appartenenza
di T a NS: 0.5

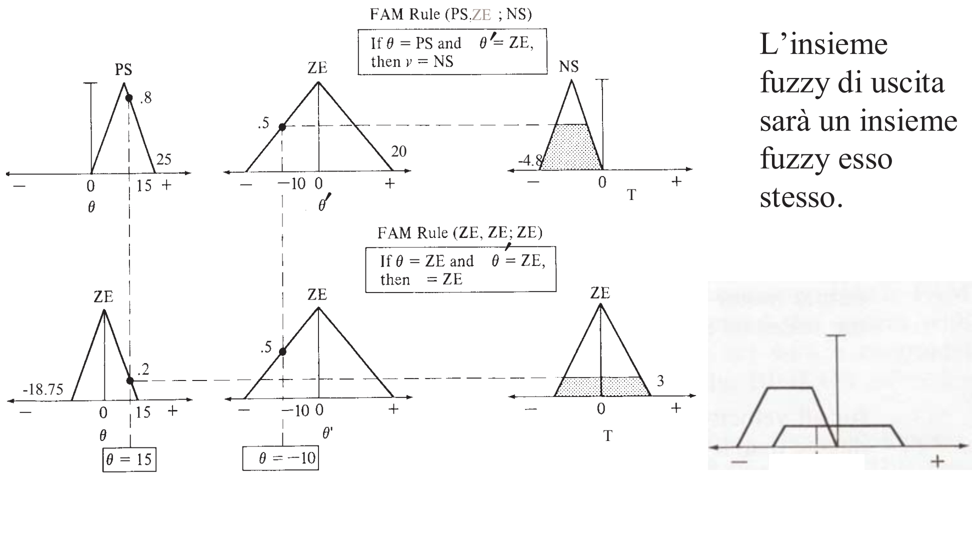
(-15, 10) ➔ (ZE,ZE;ZE)
Grado di appartenenza
di T a ZE: 0.2



Ciascuna regola dà un contributo secondo la logica fuzzy (AND OR).

 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Fuzzy output

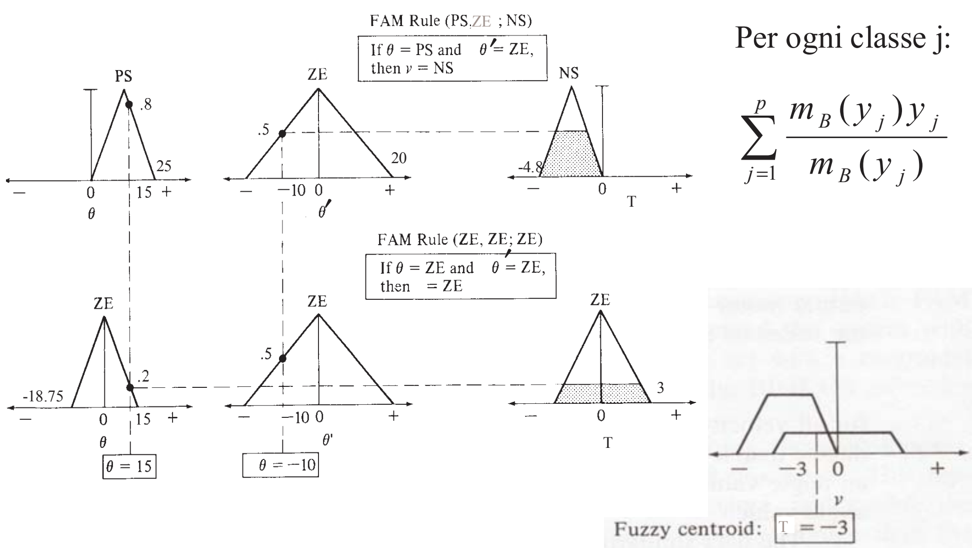


L'insieme fuzzy di uscita sarà un insieme fuzzy esso stesso.

Defuzzyficazione

Per ogni classe j:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{m_B(y_j)\, y_j}{m_B(y_j)}$$



Banco di FAM

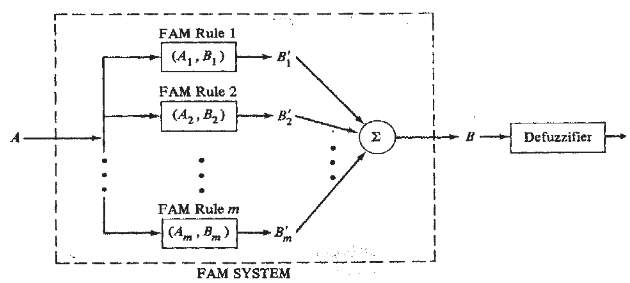
Generalizzazione naturale ai sistemi multi-output.
Ciascuna variabile di uscita è generata da una FAM diversa.

Esempio relativo al cart-pole.
Sia A l'input (stato del sistema, 4 variabili), e B l'output (la forza, ed il momento, 2 variabili), avremo 2 FAM del tipo: (A_i, B_i), dove ciascuna FAM ha 4 variabili di ingresso e 1 di uscita.

Queste FAM parziali sono dette ***elementari o minime.***

Il numero di FAM cresce velocemente con il numero di variabili in uscita.

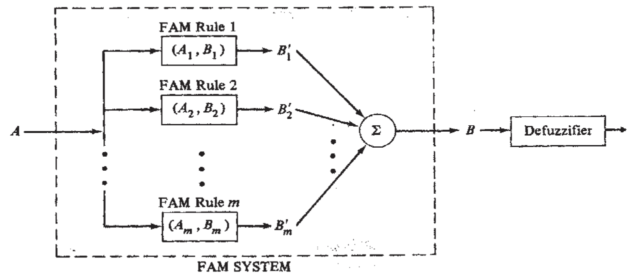
Riassunto (I)



1) Identificazione delle variabili del sistema e del loro range (A e B).
2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere.
3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole fuzzy: per ogni combinazione di classi fuzzy di input è possibile definire una classe di output (FAM).

Copyright N.A. Borghese Università di Milano 27/08/2002 http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese

Riassunto (II)



4) Identificazione delle regole attivate da un certo insieme fuzzy in ingresso.
5) Valutazione del grado di fit della regola.
6) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti.
7) Calcolo del centroide degli insiemi risultanti (defuzzyficazione).

