UC firmware moltiplicazione
Floating pointer adder

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

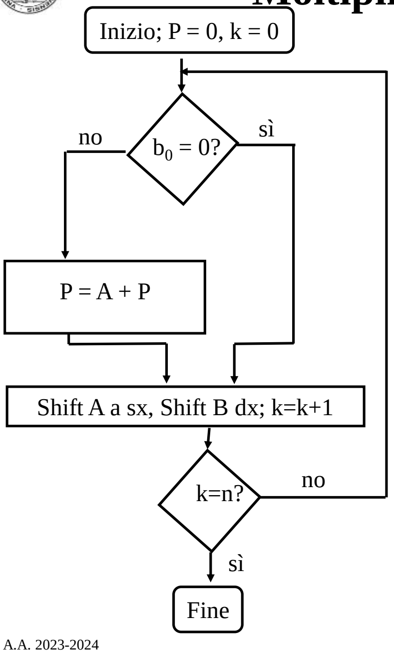
Università degli Studi di Milano

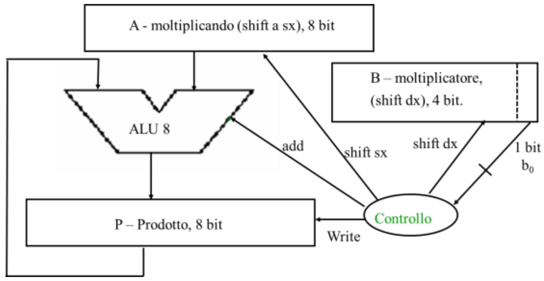
Riferimenti sul Patterson, 6a Ed.: 3.4, 3.5, 4.2

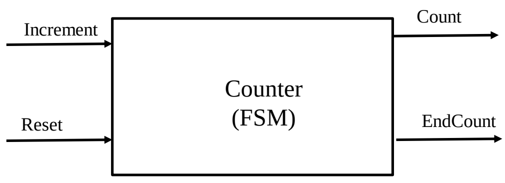
Sommario

- Unità di controllo del firmware
- Somma in virgola mobile

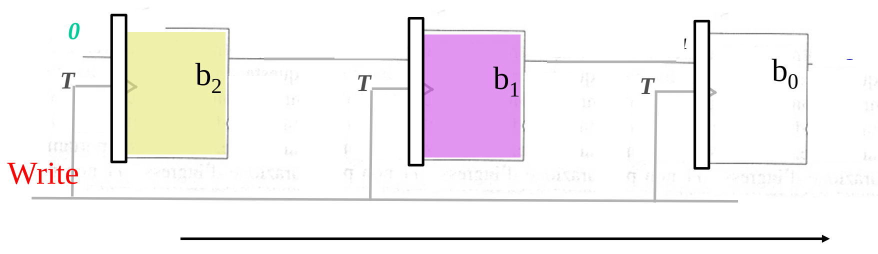
Moltiplicatore firmware







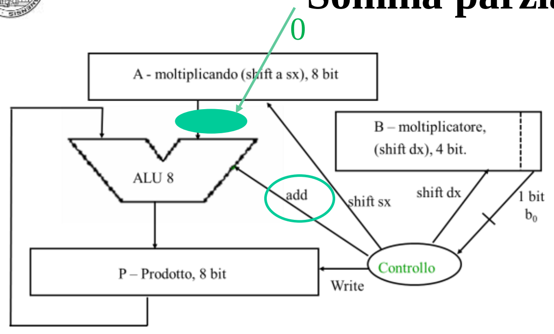
Shift register



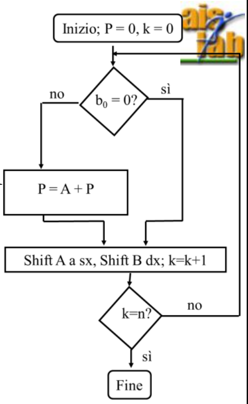
A ogni passo il contenuto dei flip-flop viene fatto scorrere di una posizione verso destra.

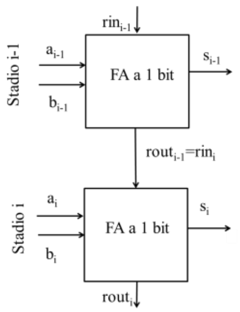
Nel bit più significativo viene inserito 0

Somma parziale



P = P + A
P = P + 0



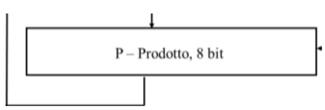


1) Mux all'intresso di ALU 8

2) Abilito scrittura di P

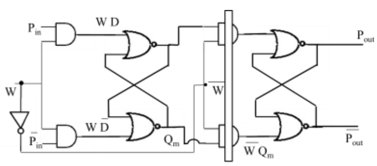
Somma parziale

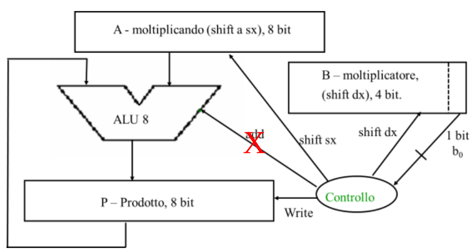
Registro P costituito da 8 flip-flop



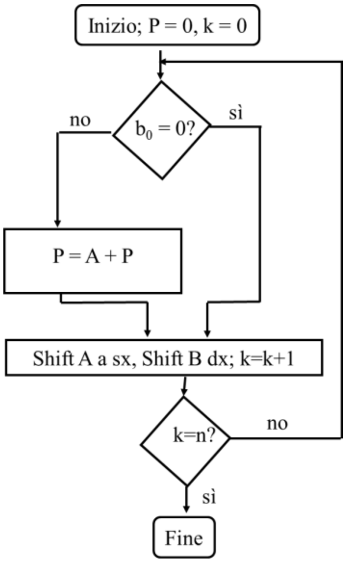
P = P + A   Write = 1

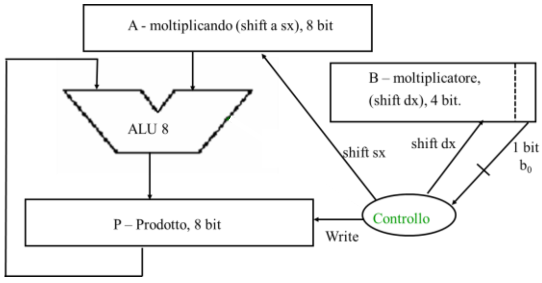
P = P + 0   Write = 0





Operazioni elementari

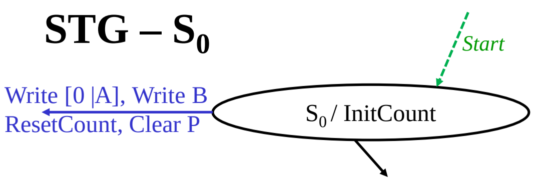




Da eseguire in sequenza:
- Somma (write P)
- Shift sx A; Shift dx B

STG – S_0

Macchina a stati finiti:

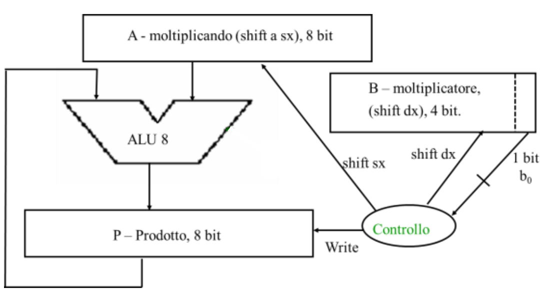


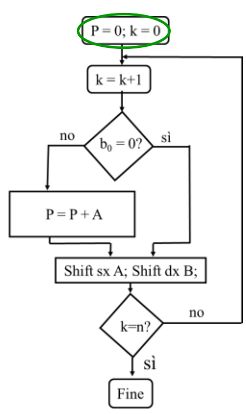
{X} = {initCount,

{I} = {

{Y} = {Write [0 | A], Write B, ResetCount, Clear P,

X_0 = Stato iniziale = InitCount





STG – S_1

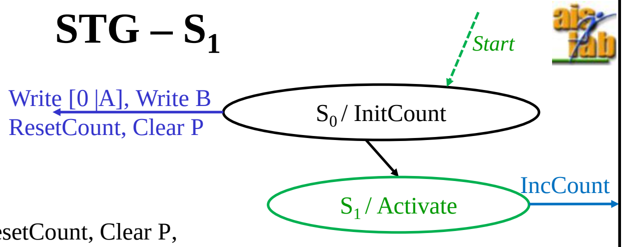
Macchina a stati finiti:

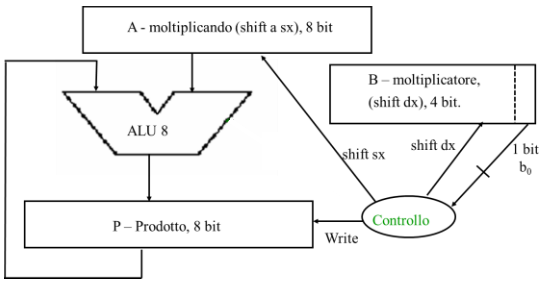
$\{X\}$ = {initCount, Activate,

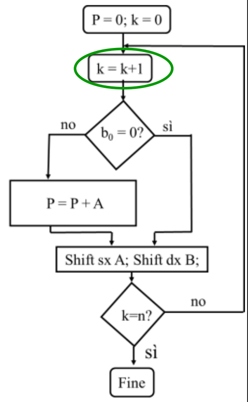
$\{I\}$ = {

$\{Y\}$ = {Write [0 | A], Write B, ResetCount, Clear P,
IncCount,

X_0 = Stato iniziale = InitCount







STG – S_2

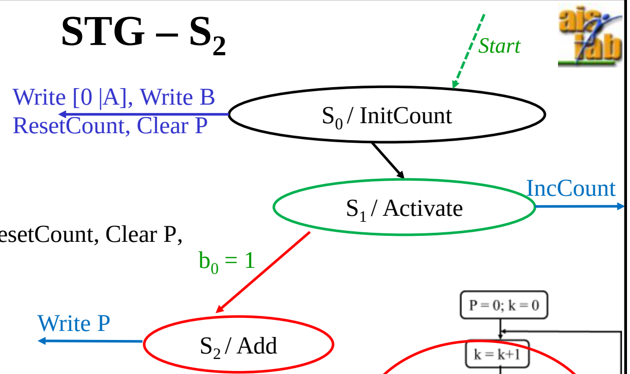
Macchina a stati finiti:

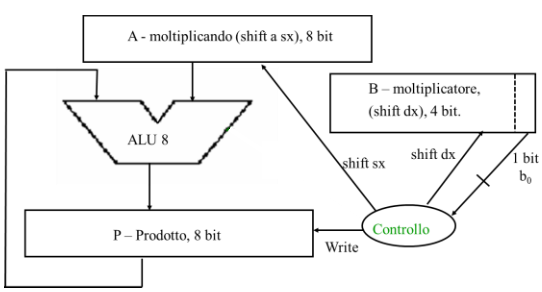
$\{X\}$ = {initCount, Activate, Add,

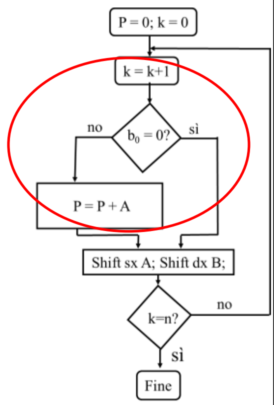
$\{I\}$ = {b_0,

$\{Y\}$ = {Write [0 | A], Write B, ResetCount, Clear P,
IncCount, Write P,

X_0 = Stato iniziale = InitCount







STG – S_3

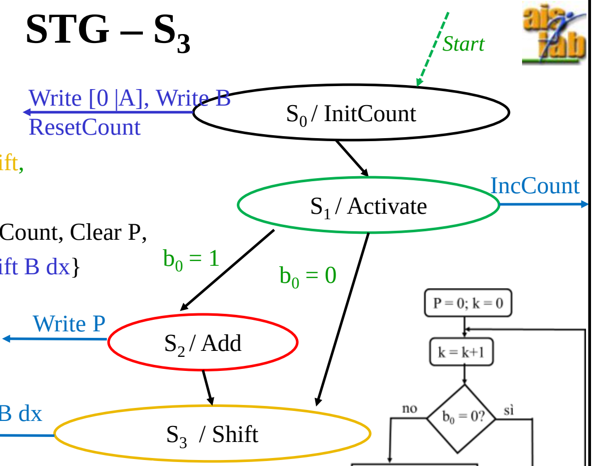
Macchina a stati finiti:

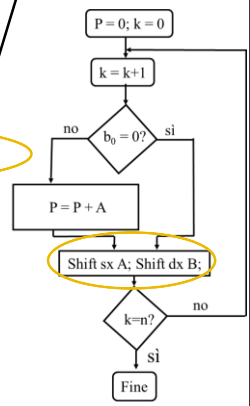
{X} = {initCount, Activate, Add, Shift,

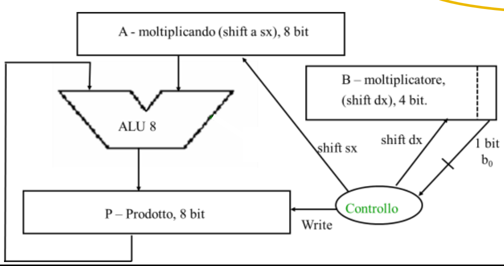
{I} = {b_0,

{Y} = {Write [0 | A], Write B, ResetCount, Clear P,
IncCount, Write P, Shift A sx, Shift B dx}

X_0 – Stato iniziale = InitCount







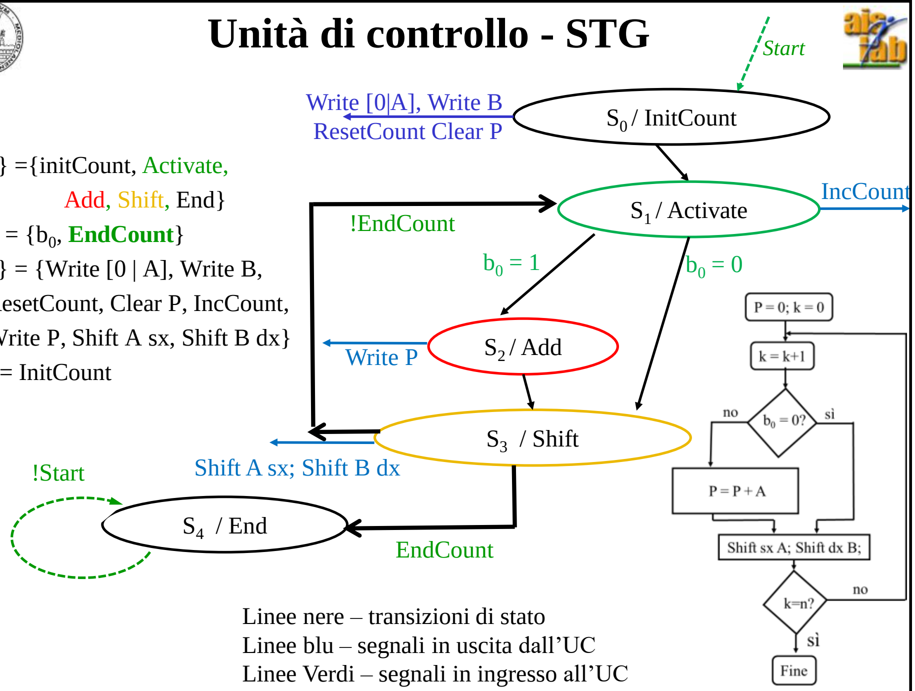
Unità di controllo - STG

{X} ={initCount, Activate,
Add, Shift, End}

{I} = {b_0, **EndCount**}

{Y} = {Write [0 | A], Write B,
ResetCount, Clear P, IncCount,
Write P, Shift A sx, Shift B dx}

X_0 = InitCount



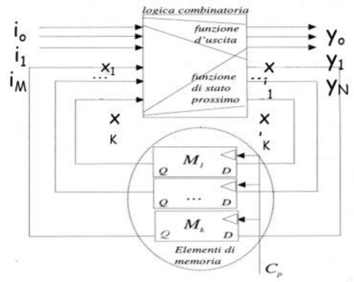
Linee nere – transizioni di stato
Linee blu – segnali in uscita dall'UC
Linee Verdi – segnali in ingresso all'UC

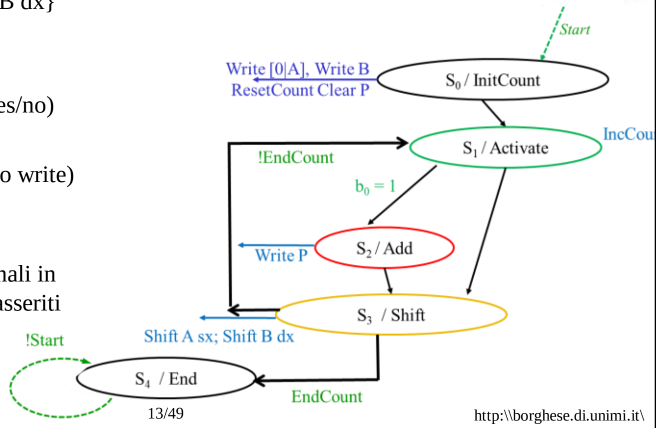
Macchina di Huffman

{X} ={initCount, Activate,
Add, Shift, End}
{I} = {b_0, EndCount}
{Y} = {Write [0 | A], Write B,
ResetCount, Clear P, IncCount,
Write P, Shift A sx, Shift B dx}
X_0 = InitCount

M = 2 - 2 input binary (yes/no)
N = 8 - 8 uscite binarie
(yes/no - write / no write)
K = 3 - 5 stati

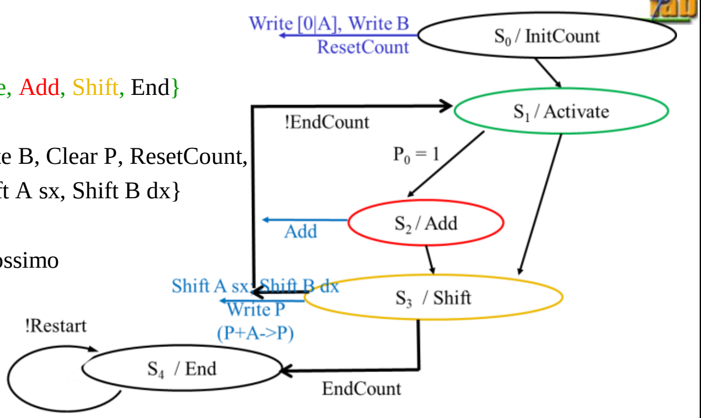
NB Sono riportati solo i segnali in uscita (Y) quando vengono asseriti (=1)





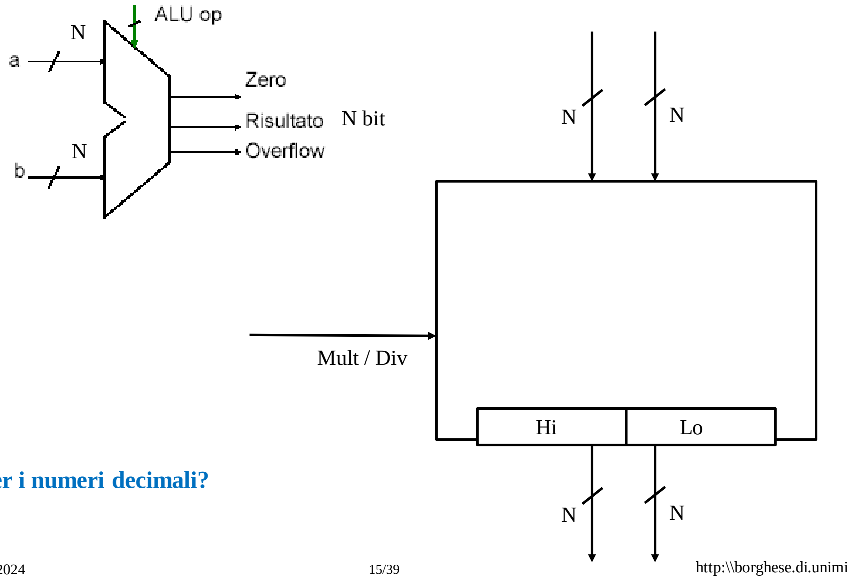
Unità di controllo - STT

{X} = {initCount, Activate, Add, Shift, End}
{I} = {b_0, EndCount}
{Y} = {Write [0 | A], Write B, Clear P, ResetCount,
IncCount, Write P, Shift A sx, Shift B dx}
X_0 = InitCount
f(X,I) – Funzione stato prossimo
g(X) – Funzione di uscita



	!EndCount $b_0 = 0$	EndCount $b_0 = 0$	!EndCount $b_0 = 1$	EndCount $b_0 = 1$	Uscita
InitCount	Activate	Activate	Activate	Activate	Clear P, Write A, Write B, Reset counter, Clear P
Activate	Shift	Shift	Add	Add	Inc counter
Add	Shift	Shift	Shift	Shift	Write P
Shift	Activate	End	Activate	End	Shift A sx, Shift B dx
End	End	End	End	End	

Circuiti operazioni tra numeri interi



E per i numeri decimali?

Sommario

- Unità di controllo del firmware
- Somma in virgola mobile

Codifica in virgola mobile
Standard IEEE 754 (1980)

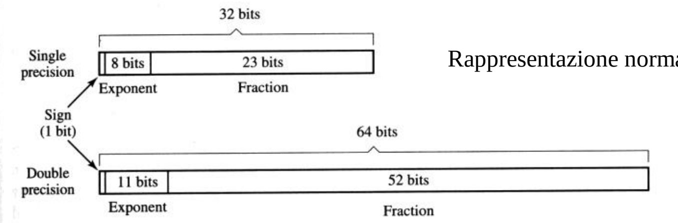


Figure 2-10 Single-precision and double-precision IEEE 754 floating point formats.

Rappresentazione normalizzata = 1,…. x 2^N

Rappresentazione polarizzata dell'esponente:

Polarizzazione pari a 127 per singola precisione =>
1 viene codificato come 1000 0000.

Polarizzazione pari a 1023 in doppia precisione.
1 viene codificato come 1000 0000 000.

Esempio di somma in virgola mobile

a = $7,999 \times 10^1$ b = $1,61 \times 10^{-1}$ a + b = ?

NB I numeri decimali sono normalizzati -> vanno riportati alla stessa base (incolonnati correttamente):

Una possibilità è:

79,99 +
0,161 =

$80,151 \times 10^0$ = 80,151 = $8,0151 \times 10^1$ in forma normalizzata

a = $7,999 \times 10^1 = 79,99 \times 10^0$
b = $1,61 \times 10^{-1} = 0,161 \times 10^0$

Altre possibilità sono:

799,9 +
1,61 =

$801,51 \times 10^{-1}$ = $8,0151 \times 10^1$
in forma normalizzata =

7,999 +
0,0161 =

$8,0151 \times 10^1$

Quale forma conviene utilizzare?

a = 7,999 x 10^1 b = 1,61 x 10^{-1} a + b = ?

Supponiamo di avere 4 cifre in tutto per il risultato del prodotto: 1 per la parte intera e 3 per la parte decimale:

79,99 +	799,9 +	7,999 +
0,161 =	1,61 =	0,0161 =
---------	----------	----------
~~8~~0,151 x 10^0	~~80~~1,51 x 10^{-1}	8,015~~1~~ x 10^1

La rappresentazione **migliore** è:

7,999 +
0,0161 =

8,015~~1~~ x 10^1

Risultato normalizzato

Con la quale posso scrivere: 1 cifra prima della virgola (8) e 3 cifre dopo la virgola (015), 1 va perso, ma è la cifra che pesa di meno.

Con la rappresentazione più a sinistra, perdo le decine, con quella in mezzo decine e centinaia commettendo un errore grande sulla rappresentazione.

Allineo al numero con esponente maggiore (perdo cifre di peso minore).

Approssimazione

Interi -> risultato esatto (o overflow)

Numeri decimali -> Spesso occorrono delle approssimazioni
- Troncamento (floor): 8,0151 -> 8,015
- Arrotondamento alla cifra superiore (ceil): 8,0151 -> 8,016
- Arrotondamento alla cifra più vicina: (round) 8,0151 -> 8,015

IEEE754 prevede 2 bit aggiuntivi nei calcoli per mantenere l’accuratezza.
bit di guardia (guard)
bit di arrotondamento (round)

Invece di approssimare gli operandi, i bit di guardia e arrotondamento consentono di approssimare il risultato finale.

Esempio: aritmetica in floating point accurata

a = 2,34   b = 0,0256   a + b = ?

Codifica su 3 cifre decimali totali (1 prima e 2 dopo la virgola).

Approssimazione mediante **rounding**.

Senza cifre di arrotondamento e utilizzando il troncamento, devo scrivere:

2,34 +
0,02 =   ho troncato il secondo addendo per rimanere nella capacità

2,36

Con le cifre di guardia e di arrotondamento posso scrivere:

2,3400 +
0,0256 =

2,3656

L'arrotondamento finale (round) viene effettuato **sul risultato** per rientrare in 3 cifre decimali fornisce: **2,37**

L'effetto perverso del troncamento

C = A + B
if (**C** > **A**) then
(a)…
else
(b)….

A = $7{,}999 \times 10^1$ B = $1{,}61 \times 10^{-1}$ C = A + B = $(7{,}999 + 0{,}0161) \times 10^1 = 8{,}0151 \times 10^1$

Passando alla codifica su 4 bit con ***troncamento degli operandi*** *ottengo:*

A = $7{,}999 \times 10^1$ B = $1{,}61 \times 10^{-1}$ C = A + B = $(7{,}999 + 0{,}0161) \times 10^1 = 8{,}015$

=> C > A correttamente

A = $7{,}999 \times 10^1$ B = $1{,}61$ $\mathbf{\times 10^{-4}}$ C = A + B = 7,999161

Passando alla codifica su 4 bit con ***troncamento degli operandi*** *ottengo:*

A = $7{,}999 \times 10^1$ B = $1{,}61 \times 10^{-4}$ C = A + B = $(7{,}999 + 0{,}0000161) \times 10^1 = 7{,}999$

=> C = A errore sull'istruzione di test!!!

Questo è un errore molto comune quando si considera l'aritmetica con i numeri decimali

Non vale la proprietà associativa della somma

$Z = A + (B + C)$

$A = -10^{38}$ $B = 10^{38}$ $C = 1$

$(B + C) = 10^{38}$ $\Rightarrow$ $Z = A + 10^{38} = 0$ Risultato sbagliato

$Z = (A + B) + C$

$(A + B) = 0$ $\Rightarrow$ $Z = 0 + 1 = 1$ Risultato corretto

Risultati molto diversi.

Non vale la proprietà associativa!

Problemi di arrotondamento – IEEE 754

A = 4

$B = 1{,}0000003576278686523438 \times 10^0$

In IEEE754:

$A = 1 \times 2^2 = 4$

$B = 1{,}\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 011 \times 2^0$ parte frazionaria su 23 bit

A = 0 1000 0001 00000 00000 00000 00000 000 codifica IEEE754 su 32 bit

B = 0 1111 1111 00000 00000 00000 00000 011 codifica IEEE754 su 32 bit

Allineo B ad A: => $B = 0{,}\ 01000\ 00000\ 00000\ 00000\ 000\cancel{11} \times 2^2$ parte frazionaria su 23 bit

Segue che: => $C = A + B = 1{,}01000\ 00000\ 00000\ 00000\ 000 \times 2^2$ su 23 bit

0,01000 00000 00000 00000 000~~11~~ +	su 23 bit	Base = 2^2
1,00000 00000 00000 00000 000 =	su 23 bit	

1,01000 00000 00000 00000 000	su 23 bit	Base = 2^2

C = A+B = 5 => **errore!**

Problemi di troncamento – IEEE 754

A = 4

B = 1,0000003576278686523438 x 10^0

In IEEE754:

A = 1 x 2^2

B = 1, 00000 00000 00000 00000 011 x 2^0 parte frazionaria su 23 bit

A = 0 1000 0001 00000 00000 00000 00000 000 codifica IEEE754 su 32 bit

B = 0 1111 1111 00000 00000 00000 00000 011 codifica IEEE754 su 32 bit

Senza aggiungere i bit di guardia e arrotondamento quando allineo B ad A (Potenza : 2^2):

```
        0,01000 00000 00000 00000 000 +     su 23 bit     Base = 2^2
        1,00000 00000 00000 00000 000 =     su 23 bit
        ------------------------------------------
Somma   1,01000 00000 00000 00000 000       su 23 bit     Base = 2^2
```

Per rounding, C = 1,01000 00000 00000 00000 000 su 23 bit Base = 2^2

C = A+B = A+1 = 5 **errore!** può essere pericoloso.

Problemi di troncamento – IEEE 754

A = 4

B = 1,0000003576278686523438 x 10^0

In IEEE754:

A = 1 x 2^2

B = 1, 00000 00000 00000 00000 011 x 2^0 parte frazionaria su 23 bit

A = 0 1000 0001 00000 00000 00000 00000 000 codifica IEEE754 su 32 bit

B = 0 1111 1111 00000 00000 00000 00000 011 codifica IEEE754 su 32 bit

Se aggiungo i bit di **guardia e arrotondamento** quando allineo B ad A (Potenza : 2^2):

```
        0,01000 00000 00000 00000 00011 +   su 25 bit     Base = 2^2
        1,00000 00000 00000 00000 00000 =   su 25 bit
        ------------------------------------------
Somma   1,01000 00000 00000 00000 00011     su 25 bit     Base = 2^2
```

Per rounding, C = 1,01000 00000 00000 00000 001 su 23 bit Base = 2^2

C = A+B = 5 + $2^{-23}2^2$ = 5+0.000000476837158203125
molto più vicino al valore vero!

Algoritmo di somma in virgola mobile - I

1) Trasformare **uno dei due numeri (normalizzati)** in modo che le due rappresentazioni abbiano la stessa base: allineamento della virgola. Si allinea all'esponente più alto (denormalizzo il numero più piccolo).

$a = 9{,}12 \times 10^0$ ⇓ $a = 9{,}12 \times 10^0$

$b = 8{,}99 \times 10^{-1}$ ⇓ $b = 0{,}899 \times 10^0$

2) Effettuare la somma delle mantisse.

9,12 +
0,899 =

$10{,}019 \times 10^0$

Se il numero risultante è normalizzato termino qui. Altrimenti:

3) Normalizzare il risultato.

$10{,}019 \times 10^0 \rightarrow 1{,}0019 \times 10^1$

Esempio di somma in virgola mobile - II

$a = 9{,}999 \times 10^1$ $b = 1{,}61 \times 10^{-1}$ $a + b = ?$

Supponiamo di avere a disposizione 4 cifre per la mantissa e due per l'esponente.

1) Esprimo entrambi i numeri con la base 10^1

$1{,}61 \times 10^{-1} = 0{,}0161 \times 10^1$

2) Somma delle mantisse:

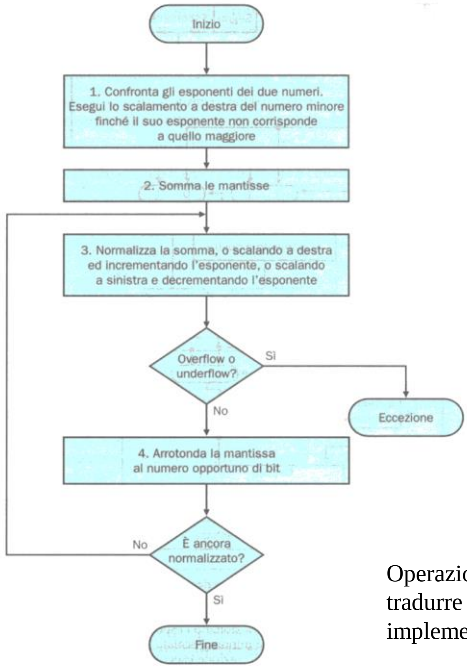
9,999 +
0,016~~(1)~~ = Perdo una cifra perchè non rientra nella capacità della mantissa (troncamento)

$10{,}015 \times 10^1$ Il risultato non è più normalizzato, anche se i due addendi sono normalizzati.

NB: In questa fase si può generare la necessità di rinormalizzare il numero (passo 3):

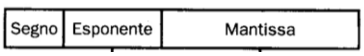
$10{,}015 \times 10^1 = 1{,}001 \times 10^2$ in forma normalizzata (per una cifra per effetto del troncamento)

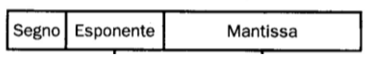
Algoritmo risultante



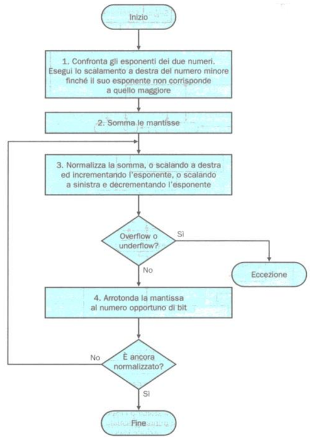
Operazioni complesse da tradurre in operazioni implementabili dall'hardware

Il circuito della somma floating point: gli attori

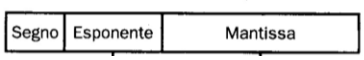




A + B



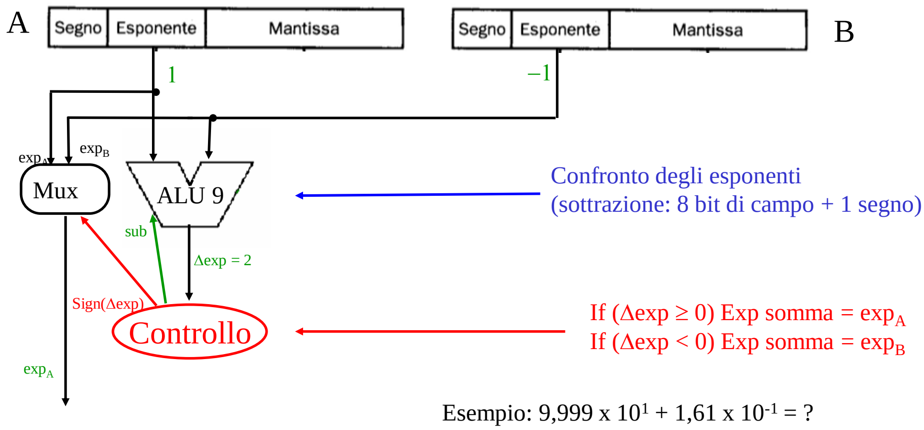
C



Rappresentazione normalizzata IEEE754

Determinazione dell'esponente

Esempio: $9{,}999 \times 10^{1}$ $1{,}61 \times 10^{-1}$



Esempio: $9{,}999 \times 10^{1} + 1{,}61 \times 10^{-1} = ?$

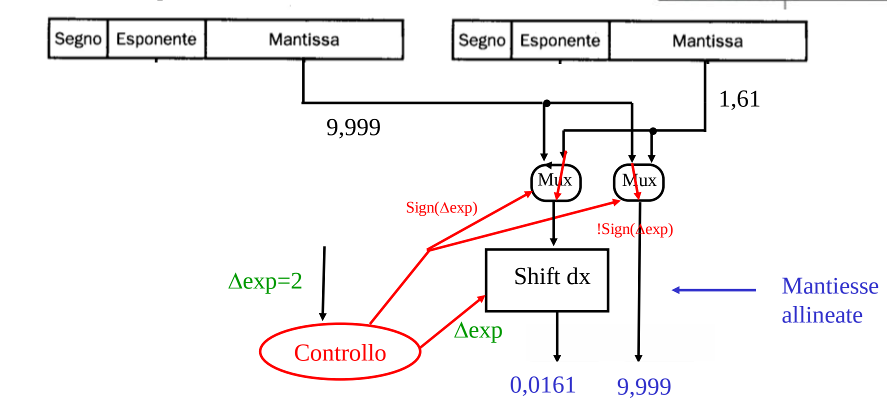
1a) $1{,}61 \times 10^{-1} \Rightarrow 0{,}0161 \times 10^{1} \Rightarrow \Delta exp = +2$

Exp somma = $exp_A = +1 \rightarrow h.hhhhh \times 10^{1}$

Occorre determinare la mantissa

Allineamento mantisse

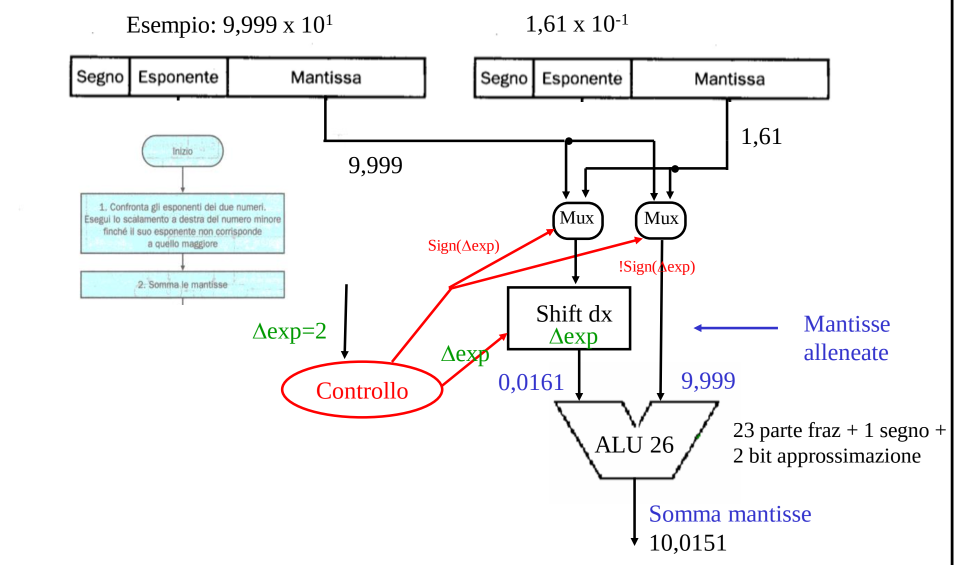
Esempio: $9{,}999 \times 10^{1}$ $1{,}61 \times 10^{-1}$



Esempio: $9{,}999 \times 10^{1} + 1{,}61 \times 10^{-1} = ?$

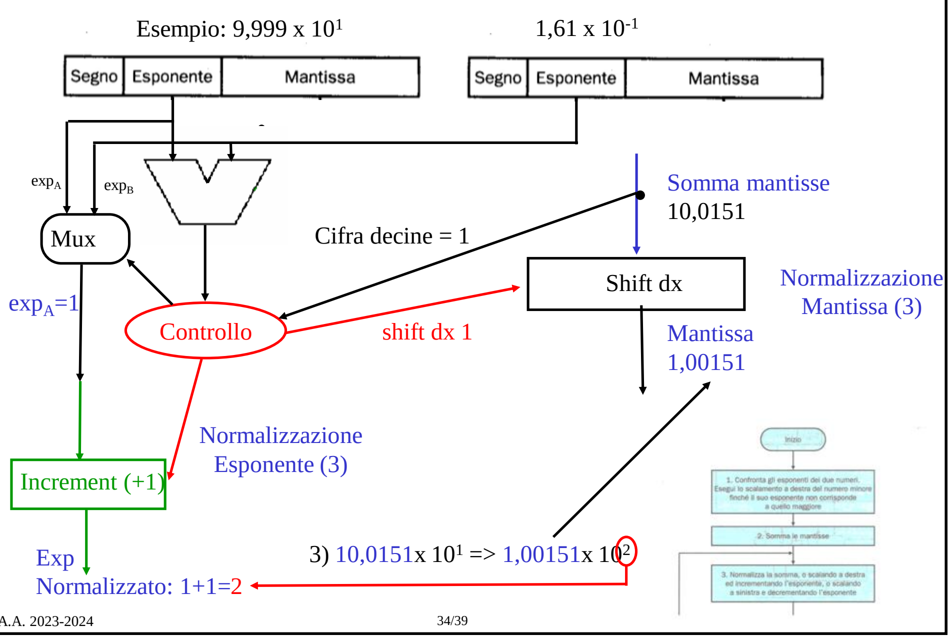
1b) $1{,}61 \times 10^{-1} \Rightarrow 0{,}0161 \times 10^{1} \Rightarrow \Delta exp = +2$

Somma delle mantisse

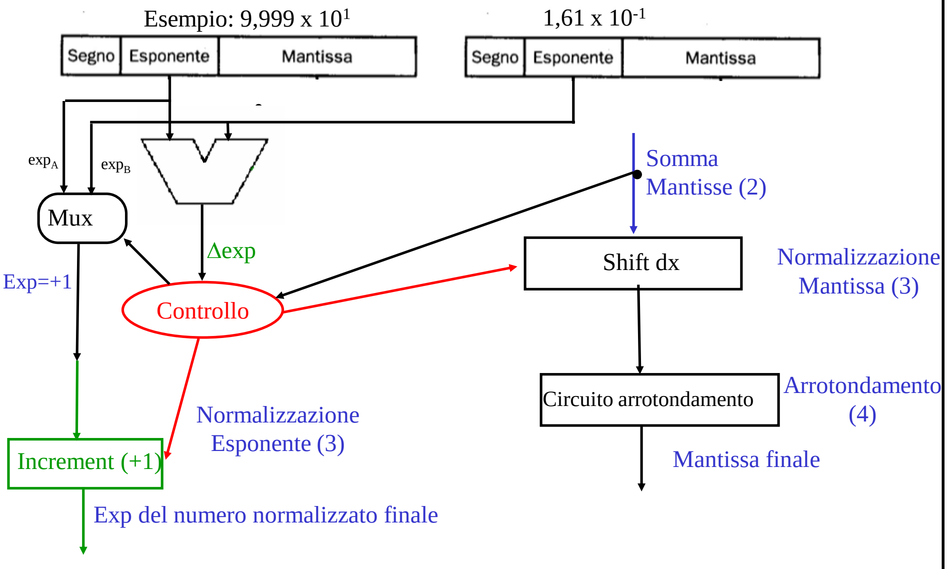


2) Somma delle mantisse: $0{,}0161 \times 10^1 + 9{,}999 \times 10^1 = 10{,}0151 \times 10^1$

Normalizzazione



Il circuito della somma floating point: arrotondamento e normalizzazione



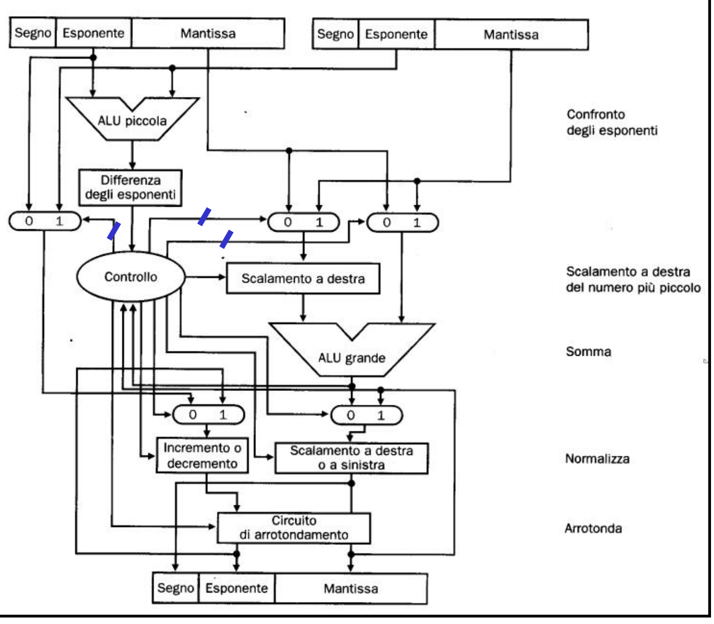
Circuito della somma floating point

Le tre linee in blu contengono lo stesso segnale di controllo (funzione di Δexp).

Gestisce anche la rinormalizzazione: $9{,}99999 \times 10^2 = 10{,}00 \times 10^1$

Gestisce anche i numeri negativi.

Problemi?



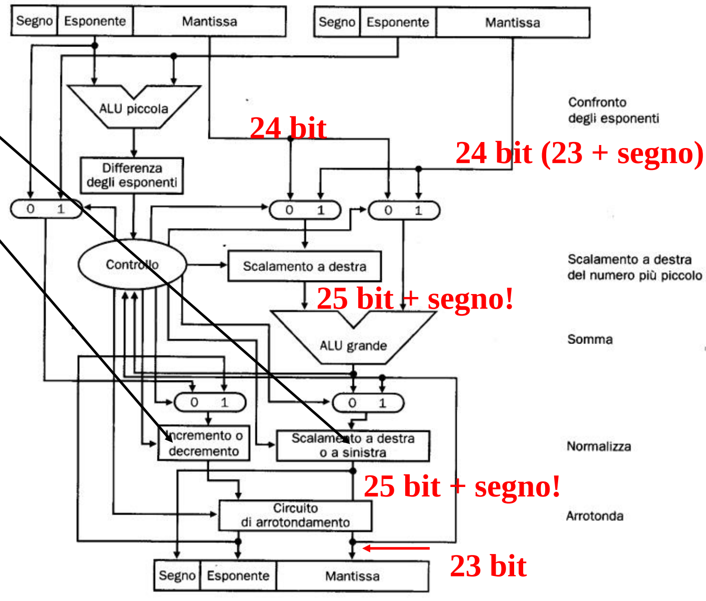
Circuito della somma floating point con bit di arrotondamento

In quale caso la mantissa viene scalata a sx?

In quale caso l'esponente viene decrementato?

La rappresentazione interna, secondo IEEE 754, prevede 2 bit aggiuntivi: bit di guardia e bit di arrotondamento.

Mantissa 1,…



Prodotto e divisione in virgola mobile

- Prodotto delle mantisse
- Somma degli esponenti
- Normalizzazione

- Divisione in virgola mobile = Prodotto di un numero per il suo inverso.

Sommario

- UC del firmware
- Somma in virgola mobile