



I sommatori

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borgnese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice B5 prima parte.



Sommario

Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto



Implementazione di funzioni algebriche



And, Or, Not per ottenere:

Operazioni algebriche (somme, prodotti, sottrazioni e divisioni) su numeri binari.

Operazioni logiche su numeri binari.



Operazione di somma



1110	← Riporto	111
1011 +	← Addendo 1	01011 +
110 =	← Addendo 2	00110 =
-----		-----
10001		10001

3 Attori: addendo 1, addendo 2, riporto.

Gli addendi sono presenti all'inizio

Il riporto viene generato via via che la somma viene svolta

Viene eseguita sequenzialmente da dx a sx.



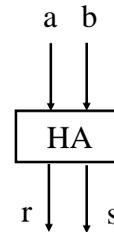
(Half) Adder a 1 bit



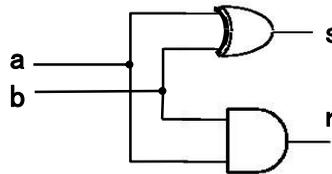
Tabella della verità della somma:

a b	somma	riporto
0 0	0	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

a +
b =



a b	xor	s = a ⊕ b	r = ab
0 0	0		
0 1	1		
1 0	1		
1 1	0		



La somma è diventata un'operazione logica!

Cammini critici:

Somma = 1;

Riporto = 1;

Complessità

Somma = 1 porta;

Riporto = 1 porta;



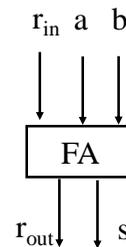
Full Adder a 1 bit



Tabella della verità della somma completa:

a b r _{in}	somma	riporto
0 0 0	0	0
0 1 0	1	0
1 0 0	1	0
1 1 0	0	1
0 0 1	1	0
0 1 1	0	1
1 0 1	0	1
1 1 1	1	1

r_{in} +
a +
b



$$s = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

$$r = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$



Full Adder a 1 bit – espressione logica di s



Tabella della verità della somma completa:

$$s = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

a	b	r _{in}	somma	riporto
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

$$s = \overline{a} \overline{b} r_{in} + \overline{a} b r_{in} + a \overline{b} r_{in} + a b r_{in} =$$

$$= (\overline{a} b + a \overline{b}) r_{in} + (\overline{a} b + a b) r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) r_{in} + (\overline{a} b + a b) r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) r_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$\text{XOR}(a,b) = \overline{a} b + a \overline{b}$$

XOR

a	b	y	y
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

7/: $\text{!XOR}(a,b) = \text{XNOR}(a,b) = \overline{(\overline{a} b + a \overline{b})}$ hese.di.unimi.it/



Full Adder a 1 bit – espressione logica di r_{out}



Tabella della verità della somma completa:

$$r = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

a	b	r _{in}	somma	riporto
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

$$r_{out} = \overline{a} \overline{b} r_{in} + \overline{a} b r_{in} + a \overline{b} r_{in} + a b r_{in} =$$

$$1) \overline{a} b + (a \oplus b) r_{in}$$

$$2) a r_{in} + (a \oplus r_{in}) b$$

Quale è meglio?



Implementazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

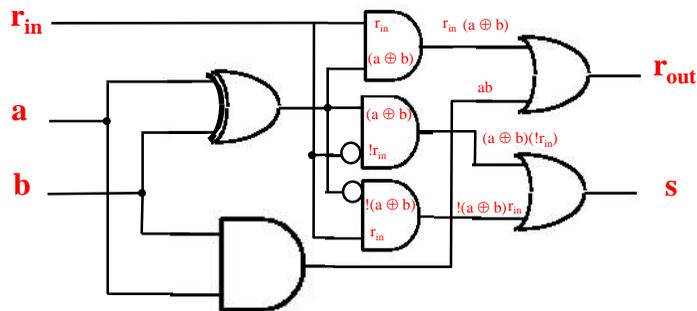
$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = a r_{in} + (a \oplus r_{in}) b$$

Complessità: 7 porte logiche
(Riutilizzo l'XOR 2 volte)

Complessità: 8 porte logiche
(Riutilizzo l'XOR 1 volta)



Complessità: 7 porte logiche.
Cammini critici: $s \rightarrow 3$; $r_{out} \rightarrow 3$



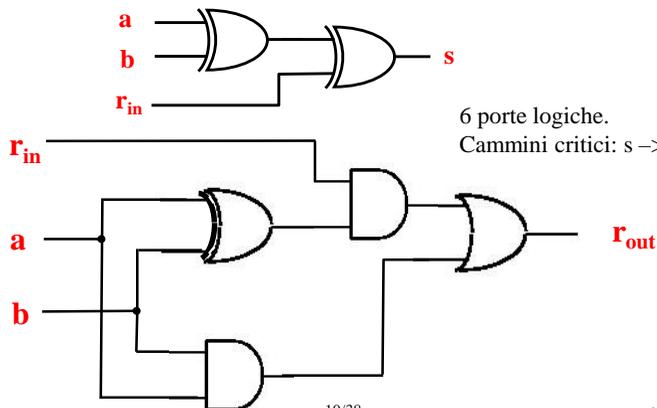
Semplificazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in} = a \oplus b \oplus r_{in}$$

$$z \triangleq (a \oplus b) \rightarrow z \bar{r}_{in} + z r_{in} = (z \oplus r_{in}) = ((a \oplus b) \oplus r_{in}) = a \oplus b \oplus r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



6 porte logiche.
Cammini critici: $s \rightarrow 2$; $r_{out} \rightarrow 3$

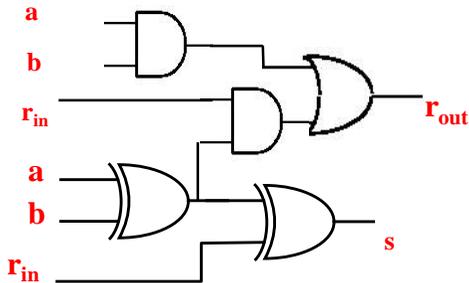


Semplificazione ulteriore



$$s = a \oplus b \oplus r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



5 porte logiche.

Cammini critici: $s \rightarrow 2$; $r_{out} \rightarrow 3$

s - rilevatore di (dis)parità

r_{out} - riporto se generato ($a = b = 1$) o se propagato ($a \oplus b = 1$) $r_{out} = r_{in}$

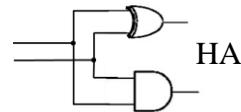


Circuito costruito con HA



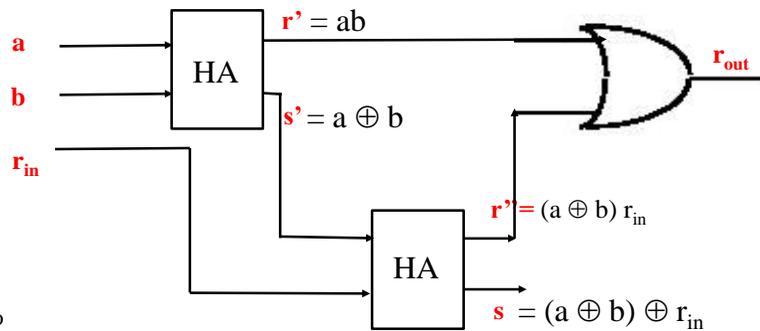
$$s = a \oplus b \oplus r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



5 porte logiche.

Cammini critici: $s \rightarrow 2$; $r_{out} \rightarrow 3$



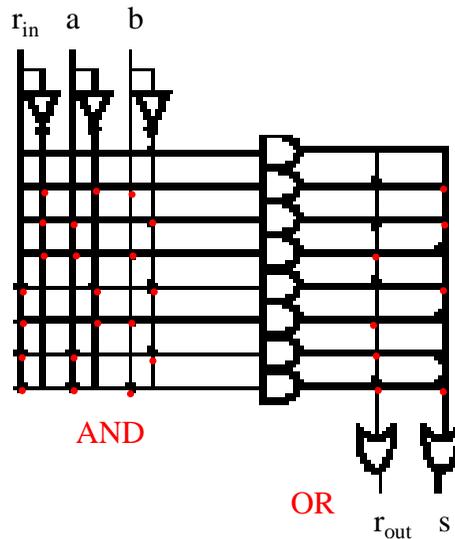
Raggruppo
AND e XOR in un HA



Implementazione mediante PLA



a	b	r_{in}	somma	r_{out}
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1



SOP: costruisco i mintermini e li sommo



Esercizi con ROM e PLA



Implementare il circuito del Full Adder mediante ROM

Scrivere il circuito che esegue la somma di: $3 + 4$ in base 2.

Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

Scrivere il circuito che esegue la seguente sottrazione: $5 - 2$ in base

2. Riportare tutte le uscite delle porte logiche.



Sommario



Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto



Operazione di somma



1110	← Riporto
01011 +	← Addendo 1
00110 =	← Addendo 2

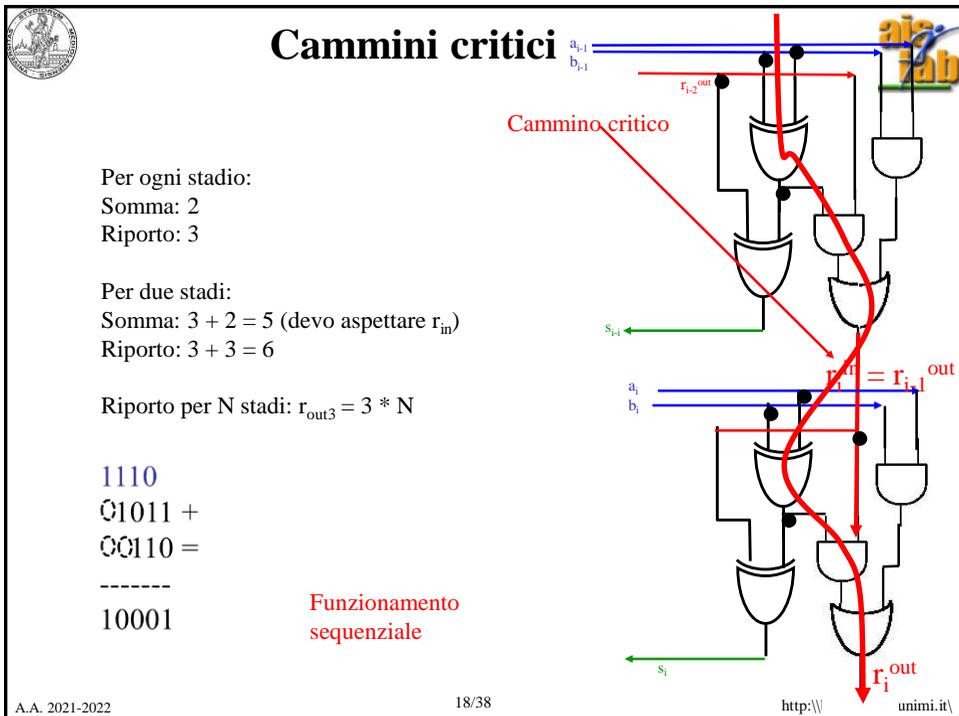
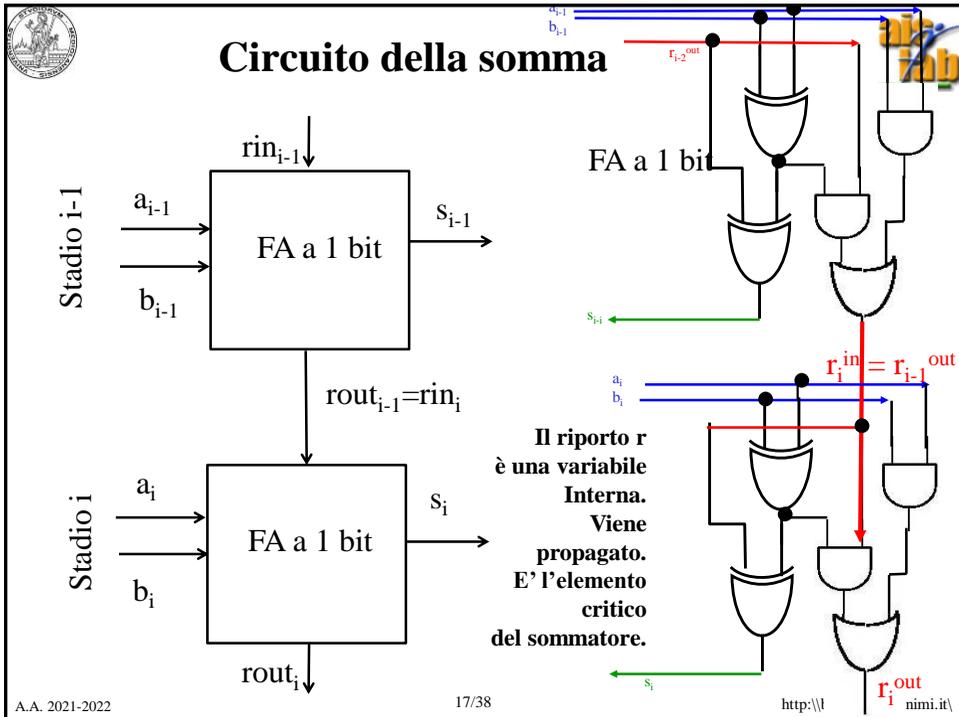
10001	

Per ogni bit ho 3 Attori: addendo 1, addendo 2, riporto.

Gli addendi sono presenti all'inizio

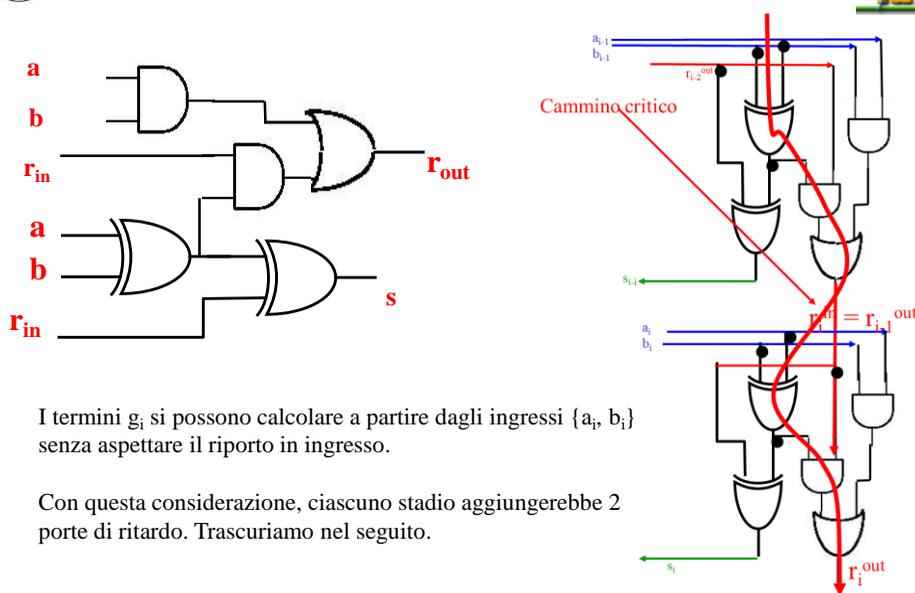
Il riporto viene generato via via che la somma viene svolta

Viene eseguita sequenzialmente da dx a sx.





Osservazioni sul cammino critico

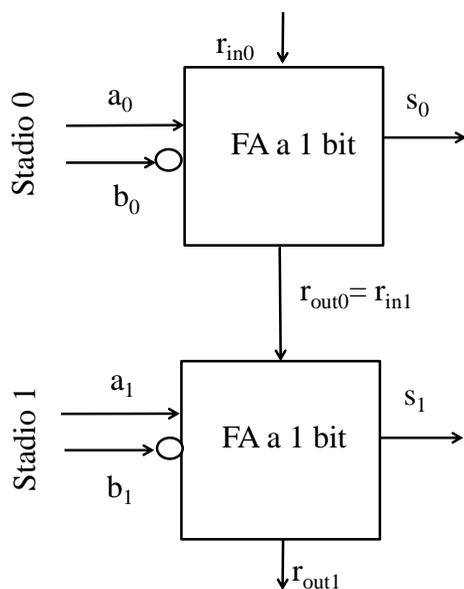


I termini g_i si possono calcolare a partire dagli ingressi $\{a_i, b_i\}$ senza aspettare il riporto in ingresso.

Con questa considerazione, ciascuno stadio aggiungerebbe 2 porte di ritardo. Trascuriamo nel seguito.



Circuito della sottrazione



Sommo i seguenti 2 numeri $11 + (-13)$:

$$A = 01011_2 = 11_{10}$$

$$B = 10011_2 = -13_{10}$$

E' equivalente ad effettuare la differenza:

$$S = A - B = 11 - 13$$

$$B = +13_{10} = 01101_2 \Rightarrow$$

complemento a 1 $\Rightarrow 10010 \quad \bar{B} = B$

Sommo 1 per ottenere il complemento a 2:

$$10010 + \mathbf{1} = 10011_2 = -13_{10}$$

Il complemento a 2 di B, $-B$, si ottiene come:

$$-B = (\bar{B} + 1)$$

La sottrazione diventa $S = A + (\bar{B} + 1)$

Nella sottrazione avrò $r_{in0} = +1$



I problemi del full-adder



Il full adder con propagazione del riporto è lento.

- Il riporto si propaga sequenzialmente
caratteristica dell'algoritmo di calcolo
- la commutazione dei circuiti non è istantanea (tempo di commutazione)
caratteristica fisica dei dispositivi
- Soluzioni
modificare l'algoritmo
modificare i dispositivi



Prima possibilità: forma tabellare



Riscrivo le equazioni del riporto in modo non sequenziale. Come?

$$\{r_{out3}, s_{out3}, s_{out2}, s_{out1}, s_{out0}\} = f(r_{in0}, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

Scrivo la tabella della verità dove in uscita ho il riporto in uscita e I bit di somma e
In ingresso $2 * N$ valori (gli N bit dei 2 addendi).

La tabella della verità ha $2^{(2N+1)}$ righe (per $N=32$, ...)



Carry look-ahead (anticipazione di riporto)

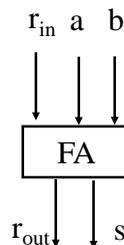


Approccio strutturato per diminuire la latenza della somma.

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

Analisi del singolo stadio.

Quando si genera un riporto in uscita?



Quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè almeno due «1» tra r_{in} , a e b .

11000 riporto

$$\begin{array}{r} \text{0}1101 + \\ \text{0}0100 = \\ \hline 10001 \end{array}$$



Propagazione e generazione



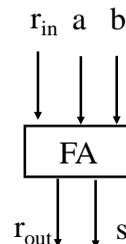
Ho riporto quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè tra r_{in} , a e b .

a	b	r_{in}	somma	riporto
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Osservazioni:

- Viene generato un riporto dallo stadio i , qualsiasi sia il riporto in ingresso se $a_i = b_i = 1 \Rightarrow g_i = a_i b_i$.
- Viene generato un riporto allo stadio i , se il riporto in ingresso è = 1 ed una delle due variabili in ingresso è = 1 \Rightarrow se $p_i = (a_i \oplus b_i) \Rightarrow$ viene generato riporto se $p_i r_{in} = 1$ (p_i propaga il segnale di riporto r_{in}).

Quando sia la condizione 1) che la condizione 2) è verificata? Cosa succede se entrambe le condizioni sono verificate?





Esempio



Sono interessato ad r_4^{out} . Supponiamo anche il riporto in ingresso al primo stadio: $r_0^{in} = 0$.

r_{in} 000000	0111000	0111000
a 10101101 +	10101101 +	10111101 +
b 00010000 =	00011010 =	00011000 =
10111111	11100111	11010101

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 0$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

Per propagazione

Per generazione

$$p_4 = (a_4 \oplus b_4)r_4^{in}$$

$$g_4 = a_4b_4$$



Sviluppo della funzione logica riporto

$$r_i^{out} = ab + (a \oplus b)r_i^{in}$$

$$r_i^{out} = g_i + p_i r_i^{in}$$

$$r_0^{out} = g_0 + p_0 r_0^{in}$$

$$r_1^{out} = g_1 + p_1 r_1^{in} = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0^{in}$$

$$r_1^{out} \leftarrow 111 \quad r_0^{in} \leftarrow$$

$$\begin{array}{r} 1001 + \\ 0010 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_0 = 0 \\ p_0 = p_1 = 1 \end{array}$$

$$r_1^{out} \leftarrow 110$$

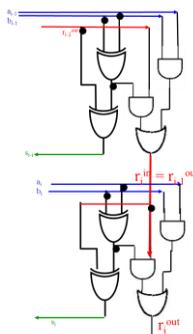
$$\begin{array}{r} 1001 + \\ 0011 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_0 = 1 \\ p_1 = 1 \end{array}$$

$$r_1^{out} \leftarrow 10$$

$$\begin{array}{r} 1010 + \\ 0011 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$g_1 = 1$$





Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{\text{out}} = ab + (a \oplus b) r_i^{\text{in}}$$

$$r_i^{\text{out}} = g_i + p_i r_i^{\text{in}}$$

$$r_0 = g_0 + p_0 r_0$$

$$r_1 = g_1 + p_1 r_0 = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0$$

$$r_2 = g_2 + p_2 r_1 = g_2 + p_2(g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0) = g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0$$

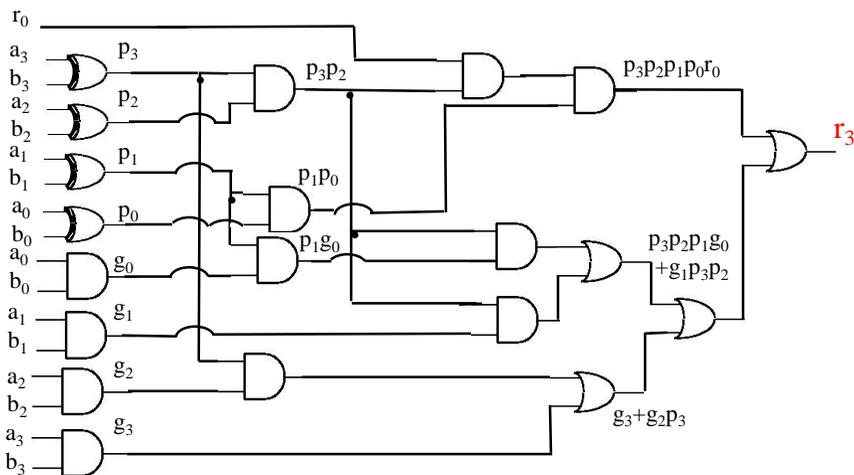
$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Determinazione del cammino critico.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



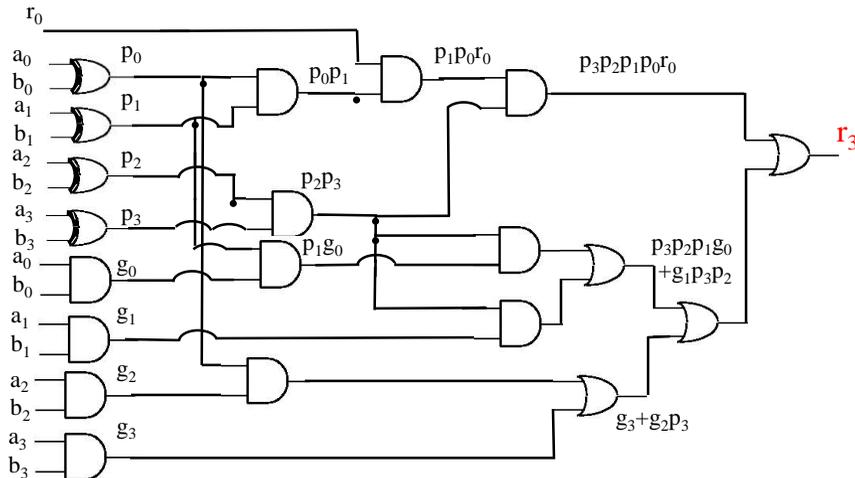
Cammino critico = 6, senza anticipazione sarebbe $3 * 4 = 12$



Determinazione la complessità.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0.$$



Complessità di $r_3 = 20$ porte logiche + porte per la somma e per i riporti interni



Complessità aggiuntiva per gli altri bit di riporto



$$r_2 = g_2 + p_2 r_1 = g_2 + p_2(g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0) = g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0$$

In rosso le porte già presenti nel circuito di r_{out3}

Complessità aggiuntiva pari a 6 porte logiche.

$$r_1 = g_1 + p_1 r_0 = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0$$

Complessità aggiuntiva pari a 2 porte logiche.

Complessità aggiuntiva totale: 8 porte logiche.



Complessità aggiuntiva per i bit di somma



$$s_k = (a_k \oplus b_k) \oplus r_{k\text{in}} = p_k \oplus r_{k\text{in}}$$

Ogni bit di somma aggiunge una porta logica XOR =>
La complessità aumenta di $N * 1 = 4$ porte logiche.

Un CLA su 4 bit ha quindi una complessità di $20 + 6 + 2 + 4 = 32$ porte logiche.

Un sommatore a propagazione di riporto ha una complessità di $4 * 5 = 20$ porte logiche.



Quanto si guadagna con l'anticipazione del riporto per N stadi?



Cammino critico per le variabili interne:

$$r_0^{\text{out}} \Rightarrow 3$$

$$r_1^{\text{out}} \Rightarrow 4$$

$$r_2^{\text{out}} \Rightarrow 5$$

Cammino critico per le variabili esterne:

$$r_3^{\text{out}} \Rightarrow 6$$

$$s_3 \Rightarrow 6 \quad \text{NB la prima porta XOR è in comune con } r_2^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 5 \quad \text{NB la prima porta XOR è in comune con } r_1^{\text{out}}$$

$$s_1 \Rightarrow 4 \quad \text{NB la prima porta XOR è in comune con } r_0^{\text{out}}$$

$$s_0 \Rightarrow 2$$

Cammino critico scala come $CC_{(1 \text{ stadio})} * \log(N)$



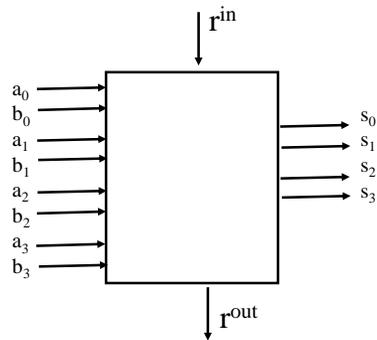
Addizionatori modulari



La complessità del circuito è tollerata per piccoli n .

Circuiti sommatore indipendenti si hanno per 4 bit.

Moduli elementari.



Come si ottiene la somma?

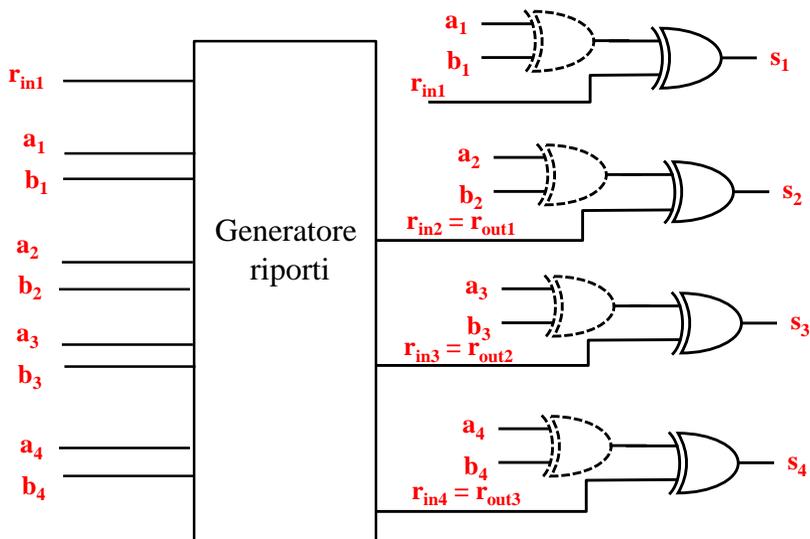
Collegando in cascata i moduli (sommatore elementari).

Cammino critico = 6 (CC di un modulo a 4 bit) * N/4. Per 32 bit, 48.

Per confronto, senza parallelizzazione, sommatore a propagazione di riporto, per 32 bit, $N * 3 = 96$.



Architettura interna





Addizionatori modulari::esempio



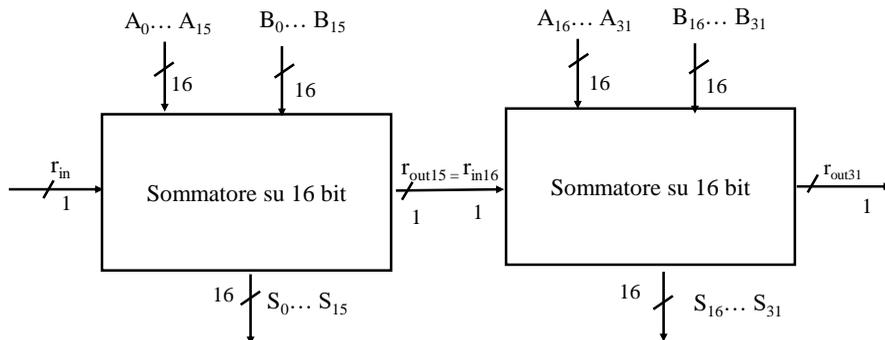
Occorre sommare 2 variabili, A e B, su $N = 32$ bit

Ho a disposizione due sommatore su 16 bit.

$$CC = CC_{(1 \text{ stadio})} * \log(N) = 3 * 4 = 12$$

Come si ottiene la somma?

Fondamento delle estensioni architetturali SSE



OR su più bit



1	0	0	1
---	---	---	---

OR

1	1	0	0
---	---	---	---

=

1	1	0	1
---	---	---	---

Ogni bit viene elaborato separatamente



AND su più bit



1	0	0	1
---	---	---	---

AND

1	1	0	0
---	---	---	---

=

1	0	0	0
---	---	---	---

Ogni bit viene elaborato separatamente



Sommario



Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto