



Macchine a Stati finiti (esercizi)

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano



Sommario

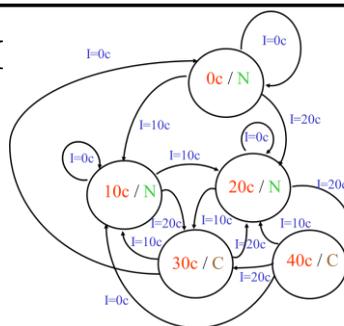
- Latch come FSM
- Controllore di un semaforo
- Riconoscitore di stringhe



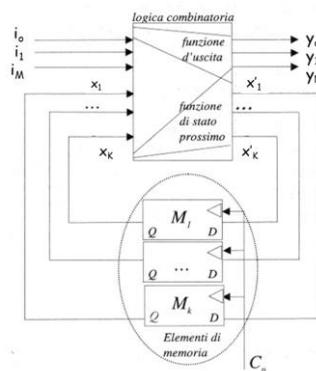
FSM



Macchina sequenziale



Macchina retro-azionata



Macchina a Stati Finiti (di Moore)



La Macchina di (Edward) Moore è definita, in teoria degli automi, dalla sestupla:

$$\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{ini} \rangle$$

X: insieme degli stati (in numero finito).

I: insieme di ingresso: tutti i simboli che si possono presentare in ingresso.

Y: insieme di uscita: tutti i simboli che si possono generare in uscita.

f(·): funzione stato prossimo: $X^* = f(X, I)$. Definisce l'evoluzione della macchina nel tempo. L'evoluzione è deterministica.

g(·): funzione di uscita: $Y = g(X)$ nelle macchine di Moore.

Stato iniziale: X_{ini} . Per il buon funzionamento della macchina è previsto uno stato iniziale, al quale la macchina può essere portata mediante un comando di reset.



Descrizione di una macchina di Moore

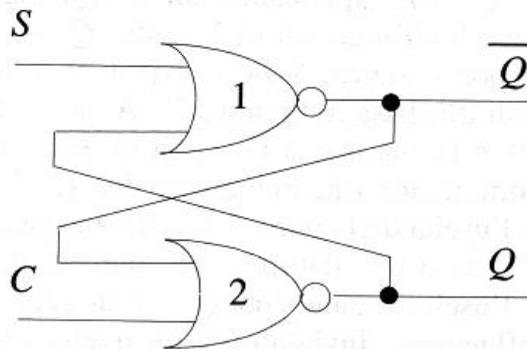


STG: State Transition Graph (Diagramma degli stati o Grafo delle transizioni). Ad ogni nodo è associato uno stato. Un arco orientato da uno stato x_i ad uno stato x_j , contrassegnato da un simbolo (di ingresso) α , rappresenta una transizione (passaggio di stato) che si verifica quando la macchina, essendo nello stato x_i , riceve come ingresso il simbolo α .

STT: State Transition Table (Tabella degli Stati). Per ogni coppia, (Stato presente – Ingresso), si definisce l'Uscita e lo Stato Prossimo. La forma è tabellare e ricorda le tabelle della verità da cui è derivata.



Il latch SC asincrono



Specifiche:

if (S=C=0) then $Q^*=Q$ status quo
if (S=1, C=0) then $Q^*=1$ set
if (S=0, C=1) then $Q^*=0$ clear

if (S=1, C=1) then ... dipende. Nell'implementazione di cui sopra non si deve presentare.



Verso lo STG del latch SC asincrono



$$I = \{00, 01, 10, 11\} = \{S, C\}$$

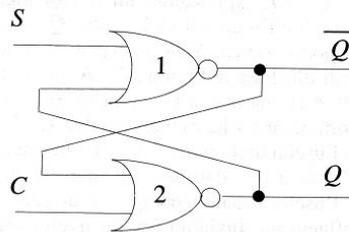
$$X = \{0, 1\} = Q$$

$$Y = \{0, 1\} = Q$$

$$X_0 = 0$$

$$X^* = Q^* = f(Q, I) = f(X, I) ?$$

$$Y = X = Q$$



Q è l'uscita del latch: stato presente, X = Q.

Q* è il valore dell'uscita al tempo successivo: stato prossimo, X* = Q*.

Non viene specificato cosa succeda quando $S = C = 1$.

L'uscita del latch coincide con il suo stato (interno): $Y = Q$



STG del latch SC asincrono



$$I = \{00, 01, 10, 11\} = \{S, C\}$$

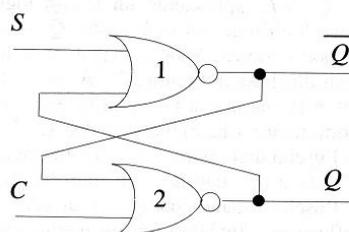
$$X = \{0, 1\} = Q$$

$$Y = \{0, 1\} = Q$$

$$X_0 = 0$$

$$X^* = Q^* = f(Q, I) = f(X, I) ?$$

$$Y = Q = X$$



Q è l'uscita del latch: stato presente, X.

Q* è il valore dell'uscita al tempo successivo: stato prossimo, X*.

0 / 0

Non viene specificato cosa succeda quando $S = C = 1$.

L'uscita del latch coincide con il suo stato (interno).



STG del latch SC asincrono



$$I = \{00, 01, 10, 11\} = \{S, C\}$$

$$X = \{0, 1\} = Q$$

$$Y = \{0, 1\} = \overline{Q}$$

$$X_0 = 0$$

$$X^* = Q^* = f(Q, I) = f(X, I) ?$$

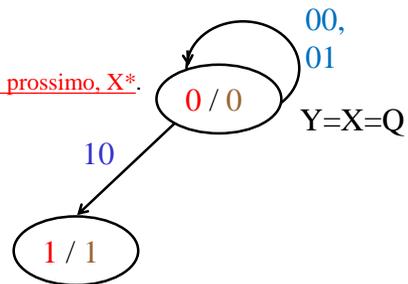
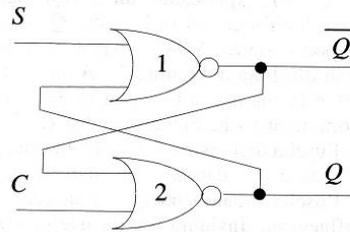
$$Y = Q = X$$

Q è l'uscita del latch: stato presente, X.

Q* è il valore dell'uscita al tempo successivo: stato prossimo, X*.

Non viene specificato cosa succeda quando $S = C = 1$.

L'uscita del latch coincide con il suo stato (interno).



STG del latch SC asincrono



$$I = \{00, 01, 10, 11\} = \{S, C\}$$

$$X = \{0, 1\} = Q$$

$$Y = \{0, 1\} = \overline{Q}$$

$$X_0 = 0$$

$$X^* = Q^* = f(Q, I) = f(X, I) ?$$

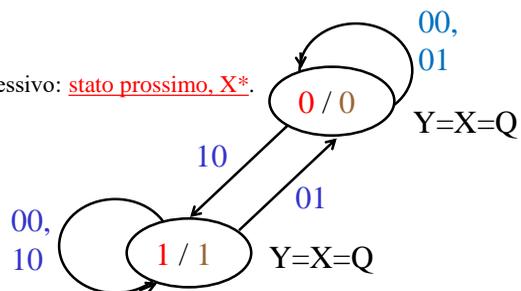
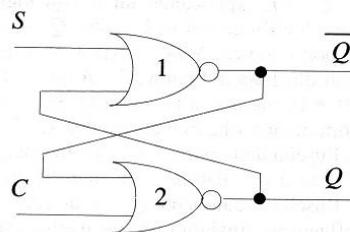
$$Y = Q = X$$

Q è l'uscita del latch: stato presente, X.

Q* è il valore dell'uscita al tempo successivo: stato prossimo, X*.

Non viene specificato cosa succeda quando $S = C = 1$.

L'uscita del latch coincide con il suo stato (interno).





STT del latch SC asincrono



$$Q^* = f(Q, S, C)$$

Variabile di Stato (interna)

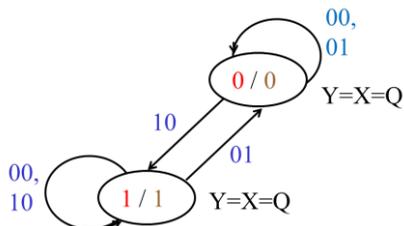
Variabili di Ingresso (esterne)

Q	SC = 00	SC = 01	SC = 10	SC = 11
0	0	0	1	X
1	1	0	1	X

No change (Q* = Q)

Clear Reset

Set



STT del latch SC asincrono



$$I = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$X = \{0, 1\}$$

$$Y = \{0, 1\}$$

$$X_0 = 0$$

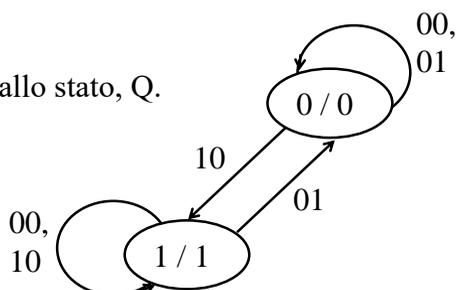
I \ Q	SC = 00	SC = 01	SC = 10	SC = 11	Y=Q
0	0	0	1	X=0	0
1	1	0	1	X=0	1

$$f(X, I) = ?$$

$$g(X) = ?$$

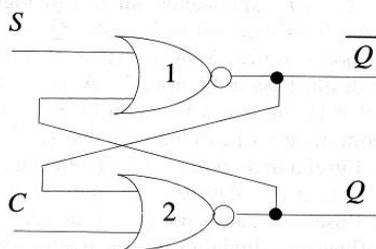
$Y = g(X) = Q$ L'uscita è uguale allo stato, Q.

$$X^* = f(X, I) = \overline{Q}SC + \overline{S}C$$



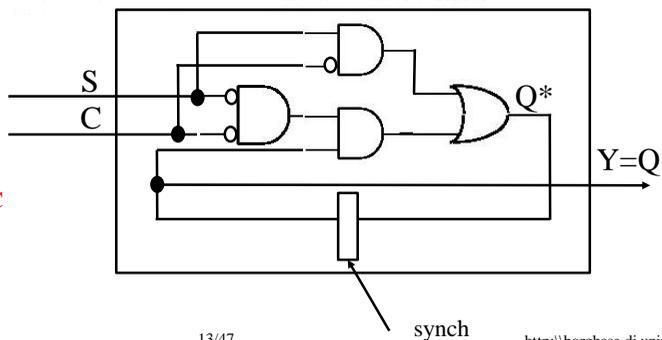


Macchina di Huffman per il latch SC asincrono



$$Y=g(X) = Q$$

$$Q^*=f(X,I) = \overline{Q}SC + S\overline{C}$$



Sommario



- Latch come FSM
- **Controllore di un semaforo**
- Riconoscitore di stringhe



Controllore di un semaforo Intelligente



Si vuole realizzare una macchina intelligente che controlli il traffico lungo due direttrici: Nord-Sud ed Est-Ovest, attraverso un semaforo.

Si supponga che il semaforo possa essere solamente: verde per la direttrice nord-sud (rosso per la direttrice est-ovest) o rosso per la direttrice nord-sud (verde per la direttrice est-ovest).

Alla macchina che controlla il semaforo è associato un sistema di video-sorveglianza che fornisce in ogni intervallo di tempo le seguenti informazioni: 1) non ci sono auto nelle due direzioni, 2) ci sono solo auto in una delle due direzioni, 3) ci sono auto in entrambe le direzioni.

Il sistema di controllo, non cambia la luce del semaforo se non passano auto o passano auto solo lungo la direzione in cui il semaforo è verde.

Il sistema di controllo accende il semaforo lungo una direttrice EO (NS) quando passano auto solo in quella direzione EO (NS).

Quando passano auto in entrambe le direzioni, la macchina che controlla il semaforo commuta.



Stato, Input, Output del semaforo



Input: $\{ \text{Nulla}, \text{Auto}_{\text{NS}}, \text{Auto}_{\text{EO}}, \text{Auto}_{\text{Both}} \}$

Output: $\{ \text{Verde}_{\text{NS}}, \text{Verde}_{\text{EO}} \}$

Stato: ?

Stato iniziale:

f(X,I) = ?

g(X) = ?



STG del semaforo



Input: {Nulla, Auto_{NS}, Auto_{EO}, Auto_{Both}}

Output: {Verde_{NS}, Verde_{EO}}

Stato: ?

Stato iniziale: ?

f(X,I) = ?

g(X) = ?



STG del semaforo



Input: {Nulla, Auto_{NS}, Auto_{EO}, Auto_{Both}}

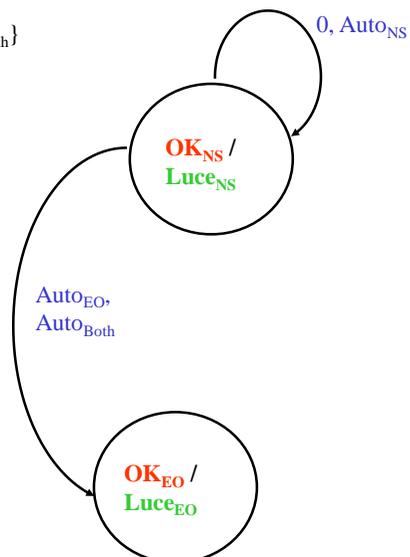
Output: {Verde_{NS}, Verde_{EO}}

Stato: {OK_{NS}, OK_{EO}}

Stato iniziale: OK_{NS}

f(X,I) = ?

g(X) = ?





STG del semaforo



Ingresso: {Nulla, Auto_{NS}, Auto_{EO}, Auto_{Both}}

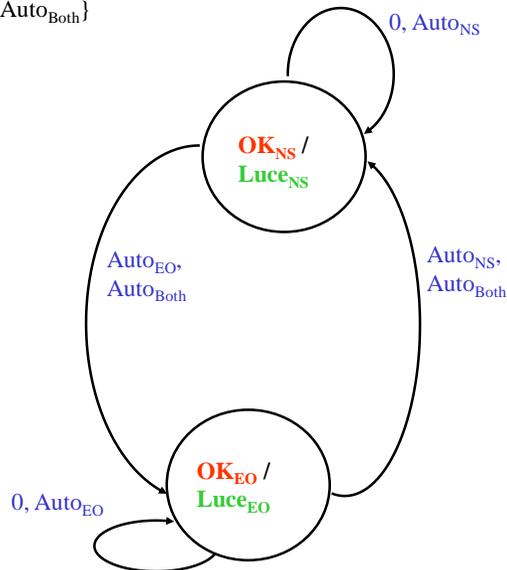
Uscita: {Verde_{EO}, Verde_{NS}}

Stato: {OK_{NS}, OK_{EO}}

Stato iniziale: X₀ = OK_{NS}

f(X,I) = ?

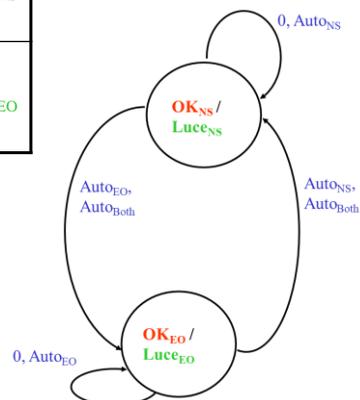
g(X) = ?



STT del semaforo



I X	Input				Uscita
	Nulla	Auto _{NS}	Auto _{EO}	Auto _{Both}	
OK _{NS}	OK _{NS}	OK _{NS}	OK _{EO}	OK _{EO}	Luce _{NS}
OK _{EO}	OK _{EO}	OK _{NS}	OK _{EO}	OK _{NS}	Luce _{EO}





STT del semaforo codificata



I X	Input				Output
	Nulla = 00	Auto _{NS} = 01	Auto _{EO} = 10	Auto _{Both} = 11	
OK _{NS} = 0	OK _{NS} = 0	OK _{NS} = 0	OK _{EO} = 1	OK _{EO} = 1	Verde _{NS} = 1
OK _{EO} = 1	OK _{EO} = 1	OK _{NS} = 0	OK _{EO} = 1	OK _{NS} = 0	Verde _{EO} = 0

Ingresso: {Nulla, Auto_{NS}, Auto_{EO}, Auto_{Both}} = {00, 01, 10, 11}

Uscita: {Verde_{EO}, Verde_{NS}} = {0, 1}

Stato: {OK_{NS}, OK_{EO}} = {0, 1}

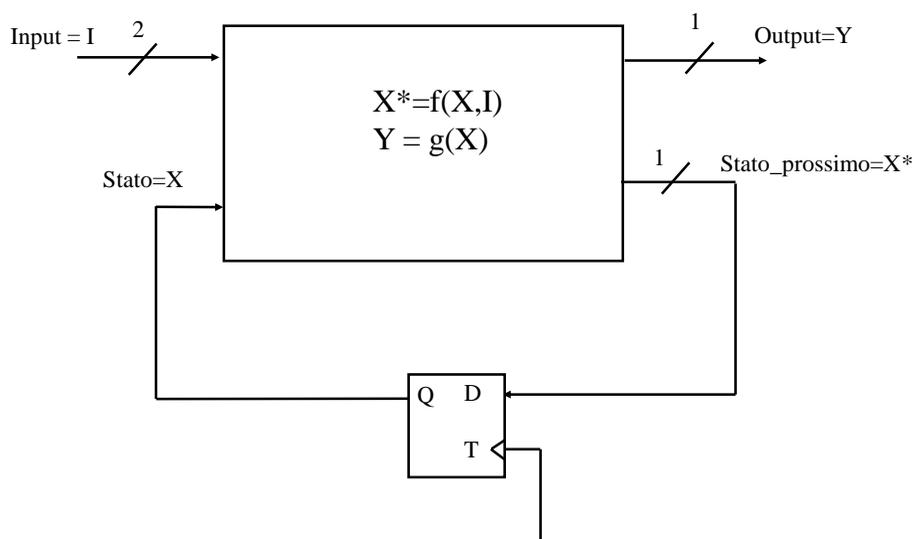
Stato iniziale: X₀ = OK_{NS} = 0

f(X,I) = ?

g(X) = ?

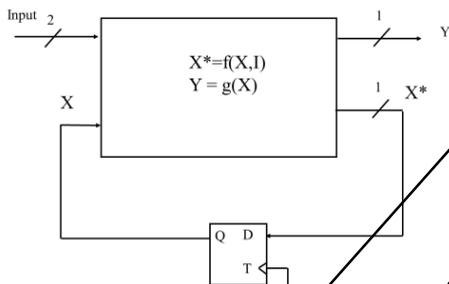


Dimensionamento della MSF del semaforo





Sintesi della MSF del semaforo



$$X^* = \bar{X} I_1 \bar{I}_0 + \bar{X} I_1 I_0 + X \bar{I}_1 \bar{I}_0 + X I_1 \bar{I}_0 = \bar{X} I_1 + \bar{X} I_0$$

$$Y = \bar{X}$$

I	$I_1 I_0$ 00	$I_1 I_0$ 01	$I_1 I_0$ 10	$I_1 I_0$ 11	Uscita
X					
0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0

Ingresso $\{I_1 I_0\}$: {00, 01, 10, 11}

Uscita: {0, 1}

Stato: {0, 1}

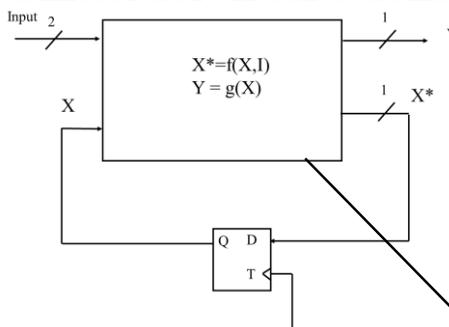
Stato iniziale: 0

$f(X, I) = ?$

$g(X) = ?$

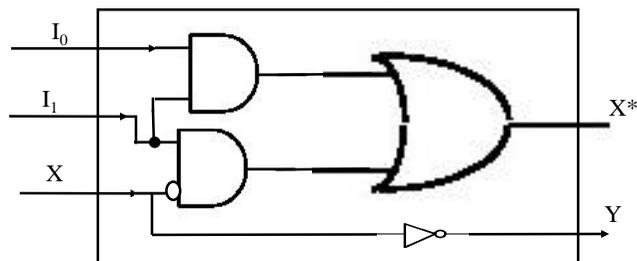


Sintesi del circuito della MSF del semaforo



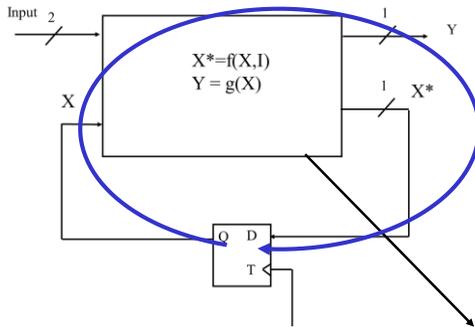
$$X^* = \bar{X} I_1 \bar{I}_0 + \bar{X} I_1 I_0 + X \bar{I}_1 \bar{I}_0 + X I_1 \bar{I}_0 = \bar{X} I_1 + \bar{X} I_0$$

$$Y = \bar{X}$$





Valutazione del circuito

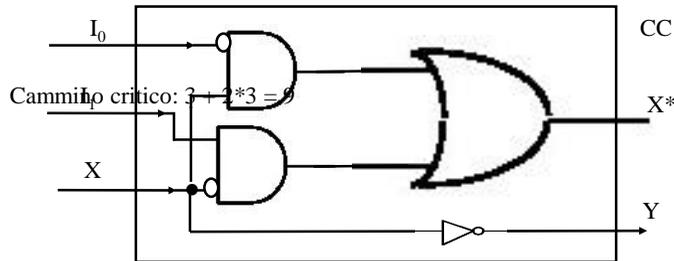


$$X^* = \bar{X} I_1 \bar{I}_0 + \bar{X} I_1 I_0 + X \bar{I}_1 \bar{I}_0 + X I_1 \bar{I}_0 = \bar{X} I_1 + \bar{X} I_0$$

$$Y = \bar{X}$$

$$CO = 3 + 8 = 11$$

$$CC = 3 + 2 + 3 = 8$$



Cammino critico: $3 + 2 * 3 = 9$



I passi della progettazione di una MSF

Il committente fornisce le specifiche di funzionamento.

Definizione delle variabili di Input, Stato e Output. Definizione degli insiemi di simboli che possono essere assunti dalle variabili di Input e di Output.

Costruzione dello STG => Definizione dell'insieme di simboli che possono essere assunti dallo stato.

Costruzione della STT => Definizione implicita delle funzioni stato prossimo ed uscita.

Codifica della STT => Definizione del numero di bit per Input, Stato e Output.

STT Codificata => Circuiti combinatori che sintetizzano le funzioni $f(X, I)$ e $g(X)$.

Realizzazione della macchina di Huffman => Aggiunta degli elementi di sincronizzazione (stato prossimo -> stato presente).



Sommario



- Latch come FSM
- Controllore di un semaforo
- **Riconoscitore di stringhe**



Riconoscitore di stringhe



La macchina analizza una stringa che viene composta inserendo un carattere alla volta alla destra della stringa precedentemente formata.

Quando la parte terminale della stringa contiene i caratteri "AAB", la macchina invia un segnale di stringa riconosciuta.

La macchina accetta in ingresso un carattere alfabetico alla volta (A-Z + nulla).

La macchina è sincronizzata, ed in ogni periodo di tempo accetta al massimo un carattere in ingresso. Se non riceve nulla, la stringa costruita fino a quel momento rimane la stessa (carattere «null»).

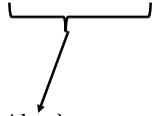
Sintetizzare la macchina di Huffman.



Stato, Input, Output



Input: {Null, A, B, C, D, E, Z} è poco efficiente



non partecipano alla stringa "AAB"

Input: {Null, A, B, Altro}

Output: {Niente, Stringa_AAB}

Stato: {Nulla,}

Stato iniziale: Nulla = ""

$X^* = f(X, I) = ?$

$Y = g(X) = ?$



STG del riconoscitore di stringhe



Input: {Null, A, B, Altro}

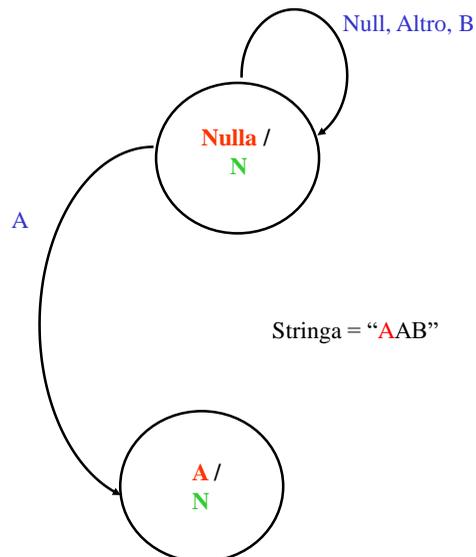
Output: {N, S}

Stato: {Nulla, A,}

Stato iniziale: Nulla

$X^* = f(X, I) = ?$

$Y = g(X) = ?$





STG del riconoscitore di stringhe



Input: {Null, A, B, Altro}

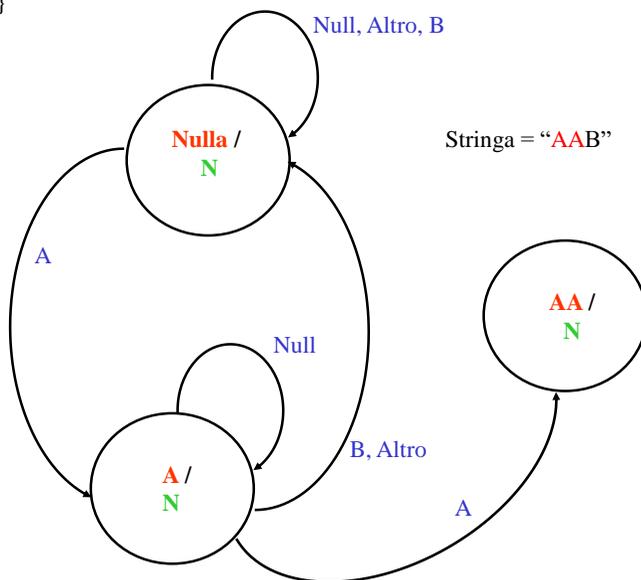
Output: {N, S}

Stato: {Nulla, A, AA,}

Stato iniziale: Nulla

$X^* = f(X, I) = ?$

$Y = g(X) = ?$



STG del riconoscitore di stringhe



Input: {Null, A, B, Altro}

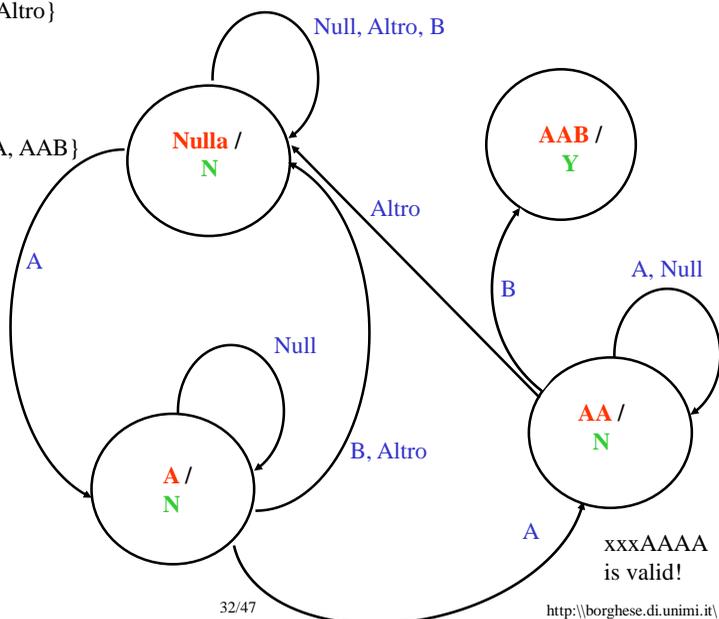
Output: {N, S}

Stato: {Nulla, A, AA, AAB}

Stato iniziale: Nulla

$X^* = f(X, I) = ?$

$Y = g(X) = ?$





STG del riconoscitore di stringhe



Input: {Null, A, B, Altro}

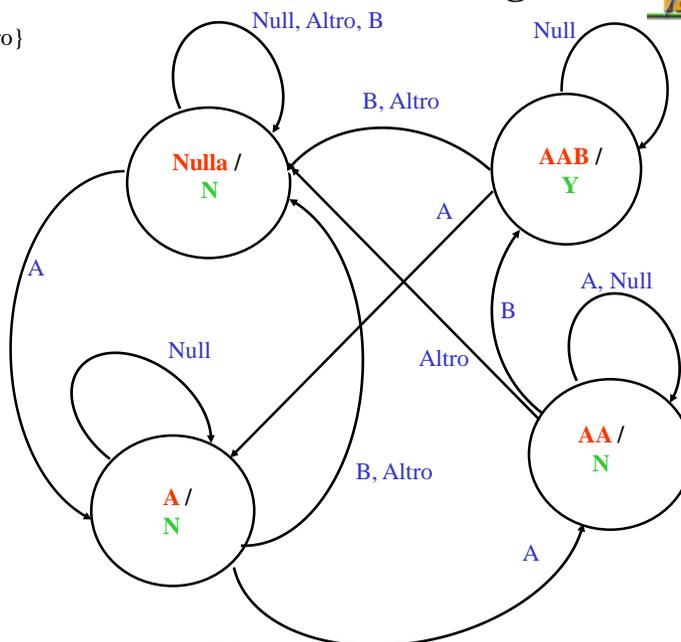
Output: {N, S}

Stato: {Nulla, A, AA, AAB}

Stato iniziale: Nulla

$X^* = f(X, I) = ?$

$Y = g(X) = ?$



Stato, Input, Output



Ingresso: {Null, A, B, Altro}

Uscita: {Niente, Stringa_AAB}

Stato: {Nulla, A, AA, AAB}

Stato iniziale: Nulla

$X^* = f(X, I) = ?$

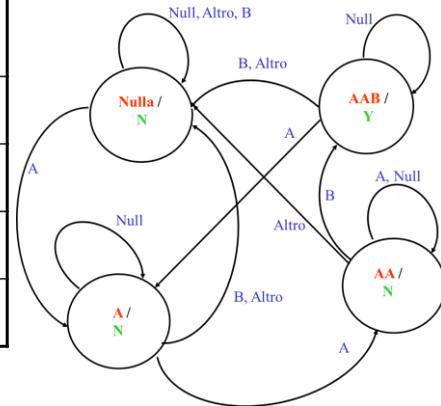
$Y = g(X) = ?$



STT Semantica



I \ X	I				Y
	Null (0)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
Nulla	Nulla	"A"	Nulla	Nulla	No
"A"	"A"	"AA"	Nulla	Nulla	No
"AA"	"AA"	"AA"	"AAB"	Nulla	No
"AAB"	"AAB"	"A"	Nulla	Nulla	Si



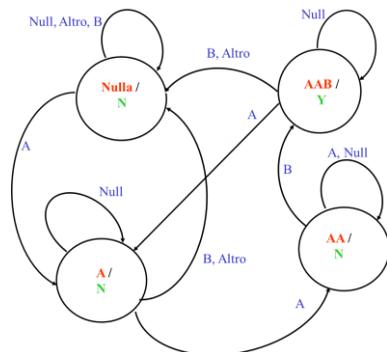
$X = \{\text{Nulla}, \text{"A"}, \text{"AB"}, \text{"AAB"}\}$ $f(X, I) = ?$
 $I = \{\text{Null}, \text{"A"}, \text{"B"}, \text{Altro}\}$ $g(X) = ?$
 $Y = \{\text{Nulla}, \text{Stringa_AAB}\}$
 $X_{ini} = \text{Nulla}$



STT Codificata



I \ X	I				Y
	Null (00)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
Nulla (00)	Nulla (00)	"A" (01)	Nulla (00)	Nulla (00)	No (0)
"A" (01)	"A" (01)	"AA" (10)	Nulla (00)	Nulla (00)	No (0)
"AA" (10)	"AA" (10)	"AA" (10)	"AAB" (11)	Nulla (00)	No (0)
"AAB" (11)	"AAB" (11)	"A" (01)	Nulla (00)	Nulla (00)	Si (1)



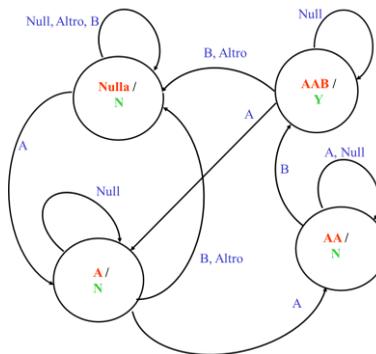
$X = \{\text{Nulla}, \text{"A"}, \text{"AA"}, \text{"AAB"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$ $f(X, I) = ?$
 $I = \{\text{Null}, \text{"A"}, \text{"B"}, \text{"Altro"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$ $g(X) = ?$
 $Y = \{\text{No}, \text{Si}\} = \{0, 1\}$
 $X_{ini} = \text{Altro}$



STT Codificata - sintesi



I X= {X ₁ X ₀ }	I = {I ₁ I ₀ }				Y
	Null (00)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
(00)	(00)	(01)	(00)	(00)	(0)
(01)	(01)	(10)	(00)	(00)	(0)
(10)	(10)	(10)	(11)	(00)	(0)
(11)	(11)	(01)	(00)	(00)	(1)



X = {Nulla, "A", "AB", "ABB"} = {00, 01, 10, 11}
 I = {Null, "A", "B", "Altro"} = {00, 01, 10, 11}
 Y = {No, Sì} = {0, 1}
 X_{mi} = Altro

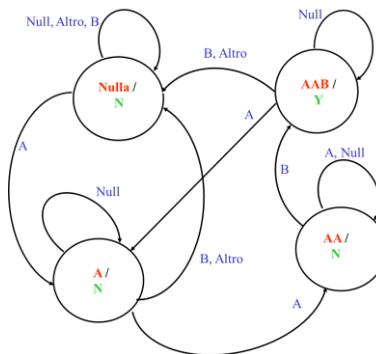
f(X,I) = ?
 g(X) = ?



STT Codificata - sintesi



I X= {X ₁ X ₀ }	I = {I ₁ I ₀ }				Y
	Null (00)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
(00)	(00)	(01)	(00)	(00)	(0)
(01)	(01)	(10)	(00)	(00)	(0)
(10)	(10)	(10)	(11)	(00)	(0)
(11)	(11)	(01)	(00)	(00)	(1)



X = {Nulla, "A", "AB", "AAB"} = {00, 01, 10, 11}
 I = {Null, "A", "B", "Altro"} = {00, 01, 10, 11}
 Y = {No, Sì} = {0, 1}
 X_{mi} = Altro

X* = f(X,I) = ?
 Y = g(X) = X₁X₀

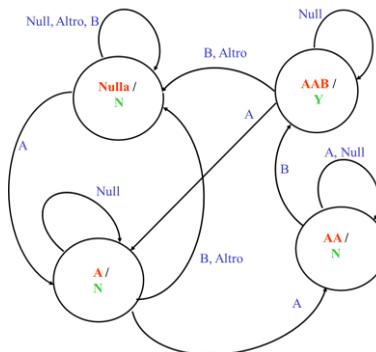


STT Codificata - sintesi



I X= {X ₁ X ₀ }	I = {I ₁ I ₀ }				Y
	Null (00)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
(00)	(00)	(01)	(00)	(00)	(0)
(01)	(01)	(10)	(00)	(00)	(0)
(10)	(10)	(10)	(11)	(00)	(0)
(11)	(11)	(01)	(00)	(00)	(1)

$X = \{\text{Nulla}, \text{"A"}, \text{"AB"}, \text{"AAB"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$
 $I = \{\text{Null}, \text{"A"}, \text{"B"}, \text{"Altro"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$
 $Y = \{\text{No}, \text{Sì}\} = \{0, 1\}$
 $X_{\text{ini}} = \text{Altro}$



$$f(X,I) = \begin{cases} X^*_0 = f_1(X,I) \\ X^*_1 = f_2(X,I) \end{cases}$$

$$g(X) = ?$$

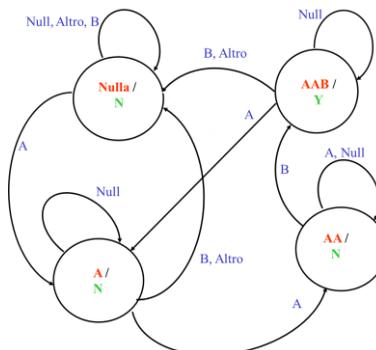


STT Codificata – sintesi X*₀



I X= {X ₁ X ₀ }	I = {I ₁ I ₀ }				Y
	Null (00)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
(00)	(00)	(01)	(00)	(00)	(0)
(01)	(01)	(10)	(00)	(00)	(0)
(10)	(10)	(10)	(11)	(00)	(0)
(11)	(11)	(01)	(00)	(00)	(1)

$X = \{\text{Nulla}, \text{"A"}, \text{"AB"}, \text{"ABB"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$
 $I = \{\text{Null}, \text{"A"}, \text{"B"}, \text{"Altro"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$
 $Y = \{\text{No}, \text{Sì}\} = \{0, 1\}$
 $X_{\text{ini}} = \text{Altro}$



$$f(X,I) = \begin{cases} X^*_0 = f_1(X,I) \\ X^*_1 = f_2(X,I) \end{cases}$$

$$g(X) = ?$$

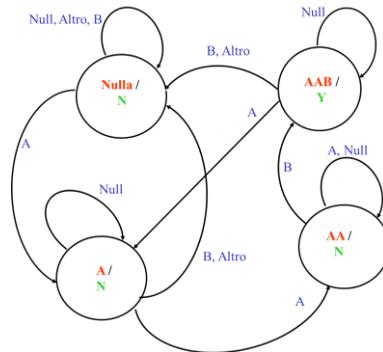
$$X^*_0 = \bar{X}_1 \bar{X}_0 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + \bar{X}_1 X_0 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + X_1 \bar{X}_0 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + X_1 X_0 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + \bar{X}_1 \bar{I}_1 (X_0 \oplus I_0) + X_1 \bar{X}_0 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + X_1 X_0 \bar{I}_1$$



STT Codificata – sintesi X^*_1



I X= { $X_1 X_0$ }	I = { $I_1 I_0$ }				Y
	Null (00)	"A" (01)	"B" (10)	"Altro" (11)	
(00)	(00)	(01)	(00)	(00)	(0)
(01)	(01)	(10)	(00)	(00)	(0)
(10)	(10)	(10)	(11)	(00)	(0)
(11)	(11)	(01)	(00)	(00)	(1)



$X = \{\text{Nulla}, \text{"A"}, \text{"AB"}, \text{"ABB"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$

$I = \{\text{Null}, \text{"A"}, \text{"B"}, \text{"Altro"}\} = \{00, 01, 10, 11\}$

$Y = \{\text{No}, \text{Si}\} = \{0, 1\}$

$X_{ini} = \text{Altro}$

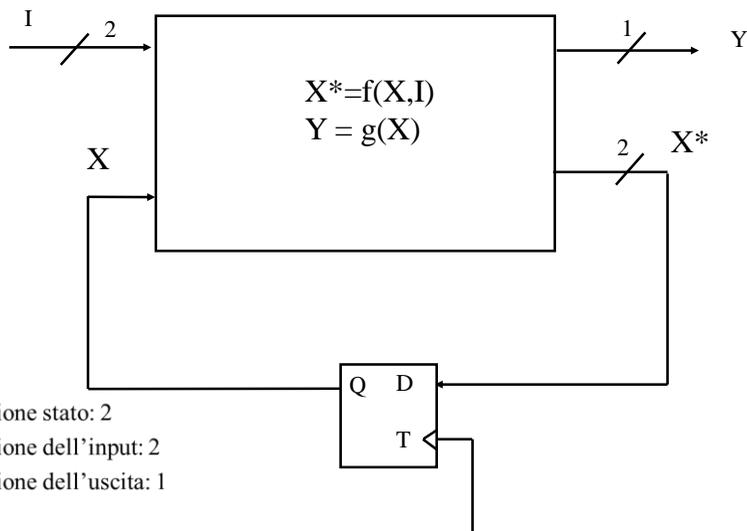
$$X^*_1 = \bar{X}_1 \bar{X}_0 I_1 \bar{I}_0 + X_1 \bar{X}_0 I_1 \bar{I}_0 + X_1 \bar{X}_0 I_1 I_0 + X_1 \bar{X}_0 I_1 \bar{I}_0 + X_1 X_0 I_1 \bar{I}_0 = \bar{X}_1 I_1 \bar{I}_0 + X_1 I_1 (\bar{I}_0 + I_0)$$

$$f(X, I) = \begin{cases} X^*_0 = f_1(X, I) \\ X^*_1 = f_2(X, I) \end{cases}$$

$$g(X) = ?$$



Dimensionamento della MSF



Dimensione stato: 2

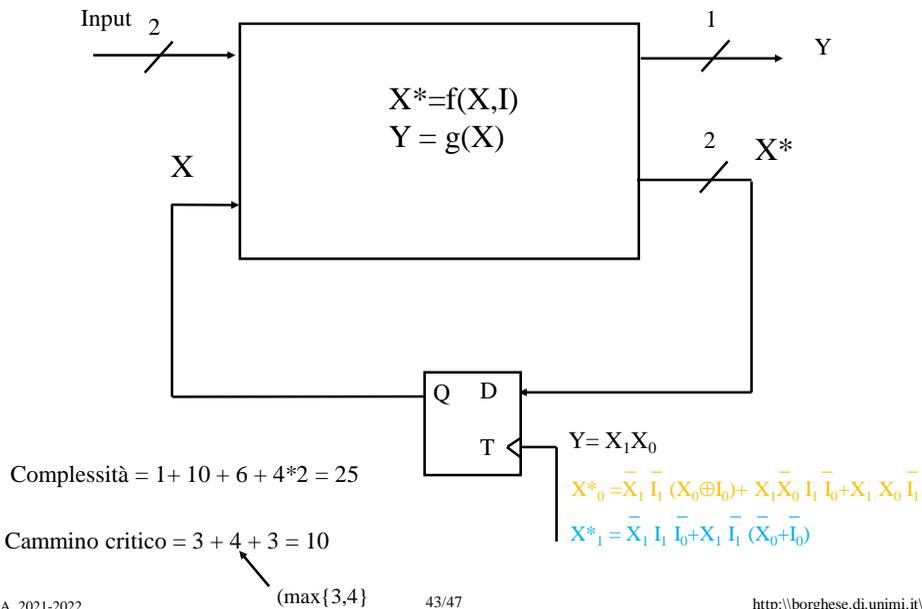
Dimensione dell'input: 2

Dimensione dell'uscita: 1

Dimensione della memoria: 2



Caratteristiche della FSM



Esercizio: sommatore sequenziale



Si vuole realizzare un sommatore controllato da una macchina a stati finiti. Il sommatore somma due numeri su N bit, sommando ad ogni istante una coppia dei bit del numero, da destra a sinistra.

L'uscita, ad ogni istante, rappresenta la somma dei bit presenti all'istante precedente più il riporto all'istante precedente.

Il sistema memorizza ad ogni istante la somma dei bit presenti ed il riporto che va all'istante successivo.



Esercizio: Controllore di un semaforo Intelligente avanzato



- Si vuole realizzare una macchina intelligente che controlli il traffico lungo due direttrici: Nord-Sud ed Est-Ovest, attraverso un semaforo.
- Si supponga che il semaforo possa essere solamente: verde per la direttrice nord-sud (rosso per la direttrice est-ovest) o rosso per la direttrice nord-sud (verde per la direttrice est-ovest).
- Alla macchina che controlla il semaforo è associato un sistema di video-sorveglianza che fornisce in ogni intervallo di tempo le seguenti informazioni: 1) non ci sono auto nelle due direzioni, 2) ci sono solo auto in una delle due direzioni, 3) ci sono auto in entrambe le direzioni.
- Il sistema di controllo, non cambia la luce del semaforo se non passano auto o passano auto solo lungo la direzione in cui il semaforo è verde.
- Il sistema di controllo accende il semaforo lungo una direttrice EO (NS) quando passano auto solo in quella direzione EO (NS).
- Quando passano auto in entrambe le direzioni, in un primo periodo di tempo, la macchina che controlla il semaforo non commuta. Se nel periodo di tempo successivo sono presenti auto in entrambe le direzioni, solo allora la macchina che controlla il semaforo commuta.



Altri esercizi



• Costruire una macchina a stati finiti (di Moore), in grado di individuare all'interno di una parola di 0 e 1 le seguenti configurazioni: 1010 e 1110. Le configurazioni si possono concatenare (e.g. 101010 da' uscita vera, al secondo e terzo 0). Stato iniziale 00.

• Costruire una macchina a stati finiti (di Moore), con due ingressi, x_1 e x_2 , che fornisce 1 quando negli ultimi 3 istanti si è verificata la seguente configurazione:

	$t = -2$	$t = -1$	$t = 0$
x_1	0	X	1
x_2	x	1	0

Stato iniziale $x_1 = 0$ $x_2 = 0$.

• Costruire un venditore di bibite che distribuisce una bibita quando si raggiungono i 35 cents inseriti. Non dà resto.



Sommario



- Latch come FSM
- Controllore di un semaforo
- Riconoscitore di stringhe