Moltiplicatori e ALU

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice C5 prima parte. Per approfondimenti e HW della moltiplicazione consultare il Fummi.

Sommario

Moltiplicatori

ALU

Moltipliocazione decimale

Moltiplicando → 2 7 8 x
Moltiplicatore → 4 2 3 =

```
            2 7 8 x
            4 2 3 =
----------------------
            8 3 4 +
          9 5 6 -
      1 1 1 2 - -
----------------------
      1 2 1 5 9 4
```

Prodotti parziali → 8 3 4 +, 9 5 6 -, 1 1 1 2 - -

prodotto → 1 2 1 5 9 4

$278 \times 423 = 278 \times (4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0) =$

$278 \times (4 \times 10^2) + 278 \times (2 \times 10^2) + 278 \times (3 \times 10^0)$

Somma dei prodotti parziali

Moltiplicazione binaria

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x
Moltiplicatore → 1 1 1 =

```
    1 1 0 1 1 x    27_10
        1 1 1 =     7_10
------------------------
1 1 1 1 1 1
    1 1 0 1 1 +
  1 1 0 1 1 –
1 1 0 1 1 - -
------------------------
1 0 1 1 1 1 0 1   189_10
```

```
----------------------
    1 1 1 1 1
        1 1 0 1 1 +
      1 1 0 1 1 -
----------------------
  1
  1 0 1 0 0 0 1 +
  1 1 0 1 1 - -
----------------------
1 0  1 1 1 1 0 1
```

Somma parziale → 1 0 1 0 0 0 1 +

prodotti parziali

prodotto → 1 0 1 1 1 1 0 1

Somme parziali e prodotto

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

$P = P_0 + P_1 + P_2 =$

$= (P_0 + P_1) + P_2 =$

$= S_0 + P_2$

1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 -

1

Somma parziale → 1 0 1 0 0 0 1 +

1 1 0 1 1 - -

prodotti parziali

----

prodotto → 1 0 1 1 1 1 0 1

Moltiplicazione mediante shift

Lo shift di un numero a dx, di k cifre, corrisponde ad una divisione per la base elevata alla k-esima potenza.

Lo shift di un numero a sx, di k cifre, corrisponde ad una moltiplicazione per la base elevata alla k-esima potenza.

Esempio:

$213_{10} / 10 = 21.3_{10}$

$213_{10} = (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) / 10^1 =$

$(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \times 10^{-1} =$

$(2 \times 10^2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^1 \times 10^{-1} + 3 \times 10^0 \times 10^{-1}) =$

$(2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1}) = 21.3$ cvd.

Esempio:

$23 / 4 = 5,75 \Rightarrow 10111 / 100 =$

$(1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0) \times 2^{-2} =$

$(1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} + 1x2^{-2}) = 5,75$ cvd.

Moltiplicazione binaria

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

```
 1 1 0 1 1 x   27_10
     1 1 1 =    7_10
-------------------------
1 1 1 1 1 1
      1 1 0 1 1 +
    1 1 0 1 1 –
  1 1 0 1 1 - -
-------------------------
1 0 1 1 1 1 0 1   189_10
```

```
-----------------------
  1 1 1 1 1
      1 1 0 1 1 +
    1 1 0 1 1 -
-----------------------
1
  1 0 1 0 0 0 1 +
  1 1 0 1 1 - -
-----------------------
```

Prodotto → 1 0 1 1 1 1 0 1

Moltiplicazione binaria

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 0 1 1 =

Prodotti parziali

Riporto

Somma parziale

Prodotto

```
         1 1 0 1 1 x    | 27 x
           1 0 1 1 =    | 11 =
----------------------  | -----
     1 1 1 1 1          |
         1 1 0 1 1 +    |  27 +
       1 1 0 1 1 -      | 27- =
----------------------  | -------
   0 0 0 0 0            | 297
     1 0 1 0 0 0 1 +
     0 0 0 0 0 - -
----------------------
1 1 0 1 0
     1 0 1 0 0 0 1 +
   1 1 0 1 1 - - - =
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1    -> 297|_10
```

Moltiplicazione binaria (su 4 bit)

Moltiplicando

Moltiplicatore

Prodotti parziali (AND)

Somma parziale (Sommatori)

Prodotto

```
       1 0 1 1 x    11_10 x
         1 0 1 =     5_10 =
------------------------
        0 0 0 0
          1 0 1 1 +   1011*1 * 2^0 +
        0 0 0 0 –     1011* 0 *2^1 =
--------------------------
          1 0 1 1                +
      1 0 1 1 - -     1011 *1*2^2 =
-------------------------
      1 1 0 1 1 1    55_10
```

Il prodotto parziale è = $\begin{cases} \text{Moltiplicando incolonnato opportunamente} \\ 0 \end{cases}$

La moltiplicazione binaria

Possiamo vederla come:

Un primo stadio in cui si mette in AND ciascun bit del moltiplicatore con il moltiplicando.

Un secondo stadio in cui si effettuano le somme (full adder) dei bit sulle righe contenenti i prodotti parziali.

La matrice dei prodotti parziali

Prodotti parziali

			a_3	a_2	a_1	a_0	
			$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	b_0
		$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$		b_1
	$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$			b_2
$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$				b_3

In binario i prodotti parziali sono degli AND.

Sulla linea tanti AND quanto è la lunghezza di A
Tanti prodotti parziali quanto è la lunghezza di B

La matrice dei prodotti parziali

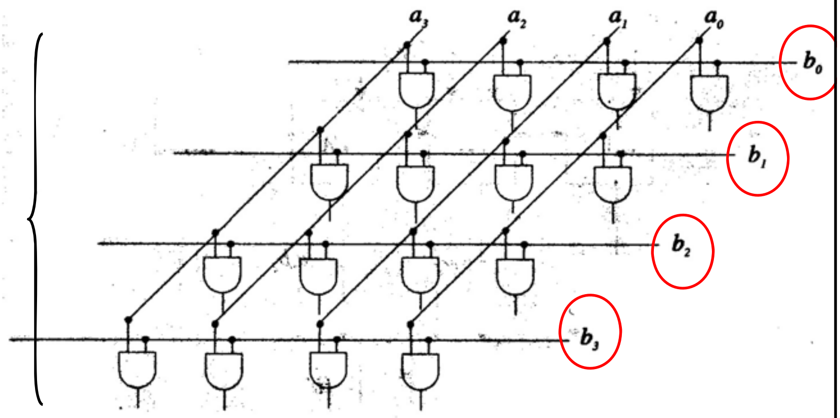
Prodotti parziali

			a_3	a_2	a_1	a_0	
			$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	b_0
		$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$		b_1
	$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$			b_2
$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$				b_3

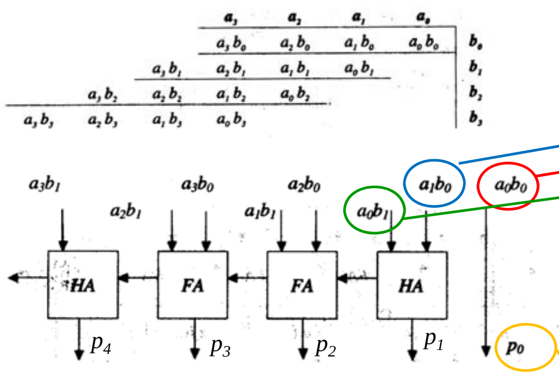
b_0 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_0
b_1 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_1
b_2 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_2
b_3 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_3
....

Il circuito che effettua i prodotti

Prodotti parziali



Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali



1 1 0 1 x	13 x
1 0 1 1 =	11 =

\-----------------------

1 1
1 1 0 1 +
1 1 0 1 -

\-----------------------

0 0 0 0 0
1 0 0 1 1 1 +
0 0 0 0 0 - -

\-----------------------

1 1
1 0 0 1 1 1 +
1 1 0 1 - - - =

\-----------------------

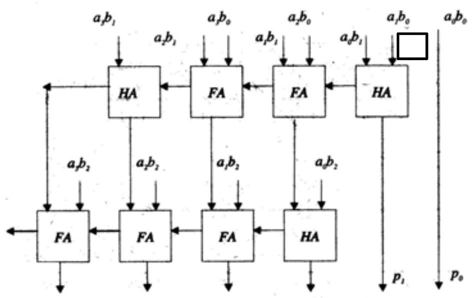
1 0 0 0 1 1 1 1 -> $143|_{10}$

Somma dei primi 2 prodotti parziali:
Aggiunge il terzo prodotto parziale:

HA e FA non sono equivalenti per i diversi cammini critici.

Somma della terza riga

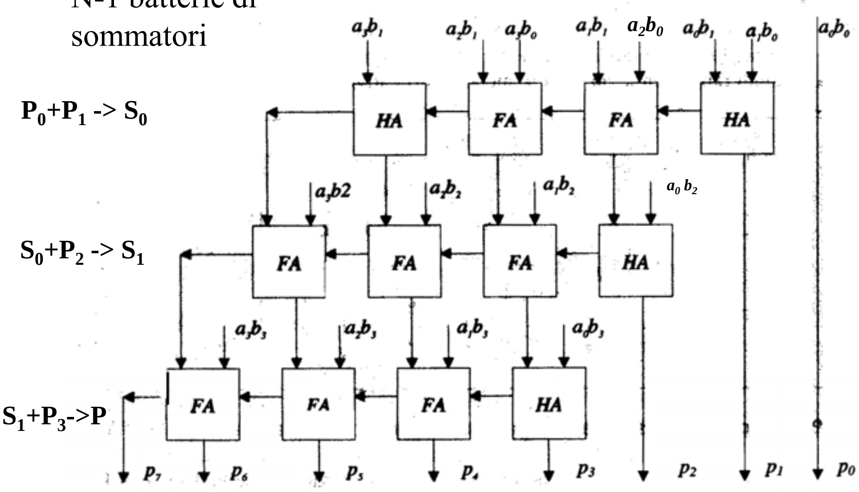
I primi due prodotti parziali sono sommati dalla prima batteria di sommatori.
Ogni altro prodotto parziale è sommato da un'ulteriore batteria di sommatori.




```
      1 1 0 1 x     13 x
      1 0 1 1 =     11 =
--------------------
   1 1
       1 1 0 1 +
     1 1 0 1 -
----------------------
 0 0 0 0 0
     1 0 0 1 1 1 +
   0 0 0 0 0 - -
----------------------
 1 1
    1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
 1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```


Circuito completo della somma dei prodotti parziali

N-1 batterie di sommatori



Problema: overflow: A e B su 32 bit => P su 64 bit.

Valutazione della complessità

Complessità:
Half Adder: 2 porte
Full Adder: 5 porte

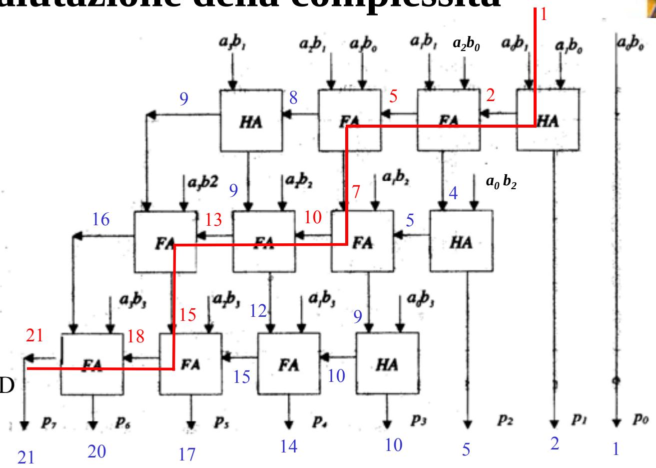
Stadio AND:

A su N bit
B su M bit

N * M porte AND

Stadio OR:

N sommatori per riga
M-1 righe



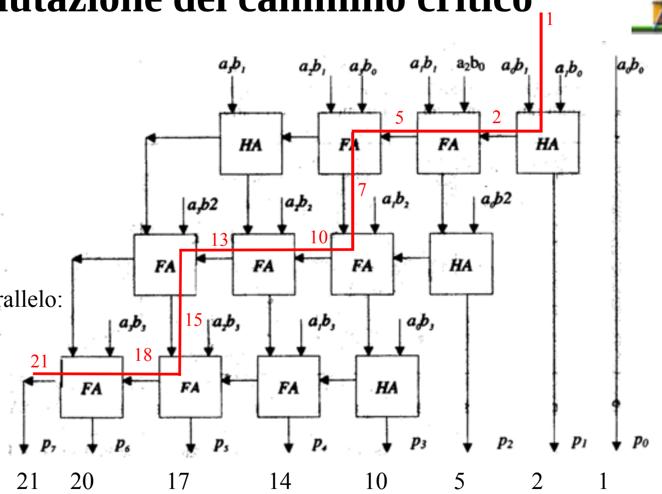
Numero porte se N = M = 4 -> 48

Numero porte = $\underbrace{(N-2) * 5 + 2*2}_{1° \text{ riga}} + \underbrace{(M-2) *[(N-1) * 5 + 1]}_{\text{Altre righe (M-2)}}$

Valutazione del cammino critico

Cammini critici:
Half Adder:
Somma – 1 porta
Riporto – 1 porta
Full Adder:
Somma - 2 porte
Riporto - 3 porte

Gli AND operano in parallelo: ritardo 1.



Cammino critico: 21

Sommario

Moltiplicatori

ALU

Funzione della ALU

E' integrata nel processore, all'inizio degli anni 90 è stata rivoluzionaria la sua introduzione con il nome di co-processore matematico.

Esegue le operazioni aritmetico-logiche.

E' costituita da circuiti combinatori. Utilizza i blocchi di base già visti.

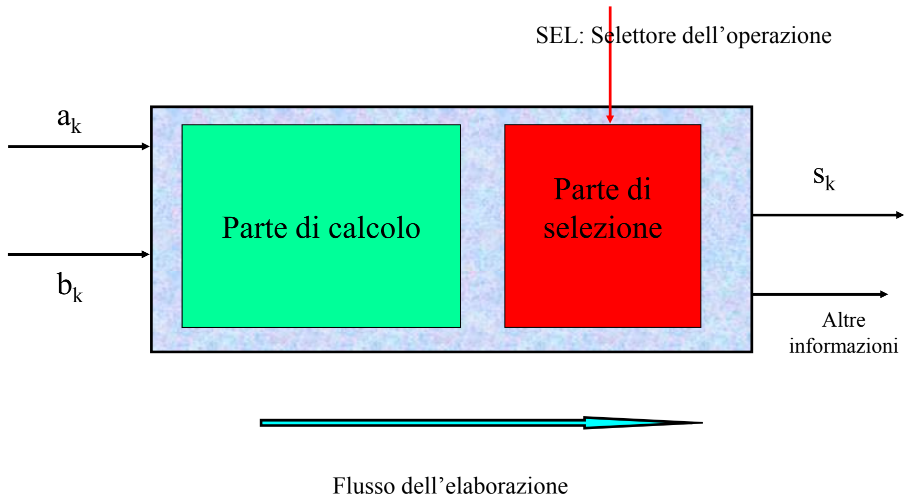
Opera su parole (MIPS 32 bit).

Le ALU non compaiono solamente nei micro-processori.

Problematiche di progetto

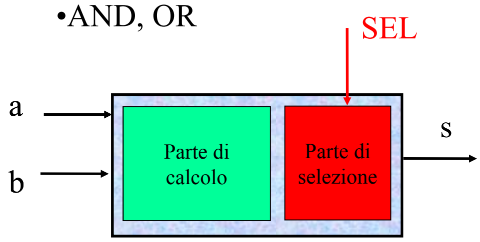
- Velocità (Riporto).
- Costo.
- Precisione.
- Affidabilità
- Consumo.

Struttura a 2 livelli di una ALU



Progettazione della ALU – 1 bit

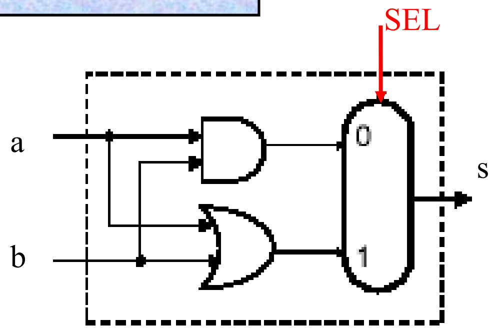
•AND, OR



a b	a *AND* b	a *OR* b
0 0	0	0
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	1

SEL = 0
s = AND(a,b)

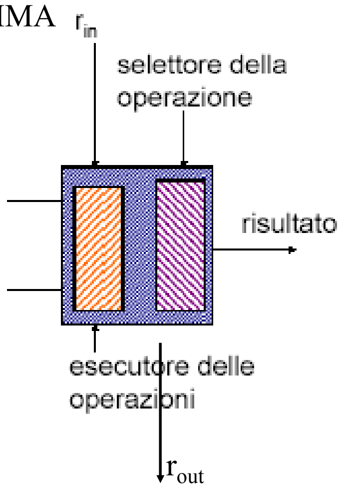
SEL= 1
s = OR(a,b)

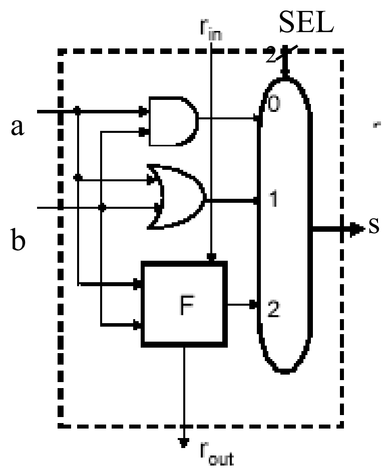


1 porta AND
1 porta OR
1 Mux

La nuova struttura della ALU – 1 bit

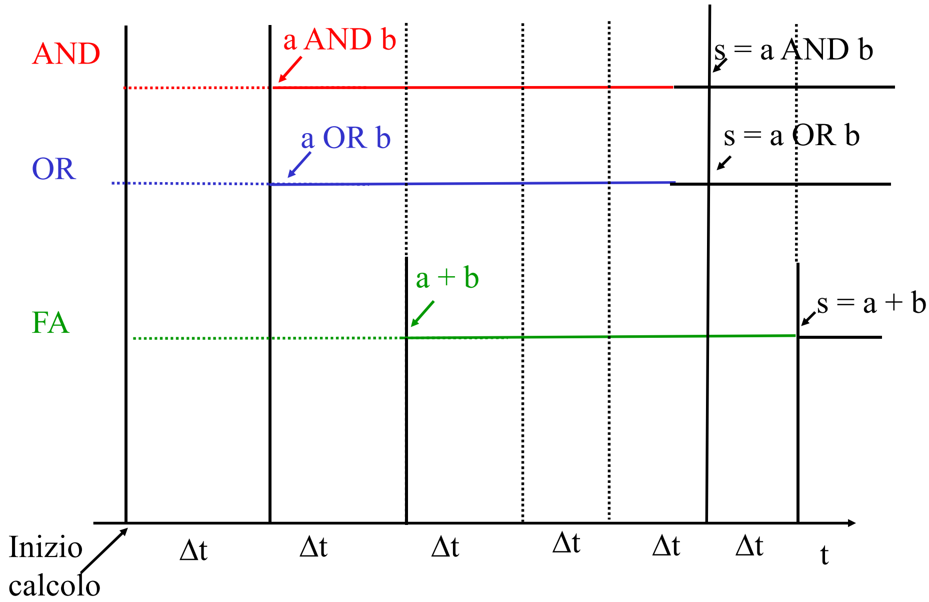
•AND
•OR
•SOMMA





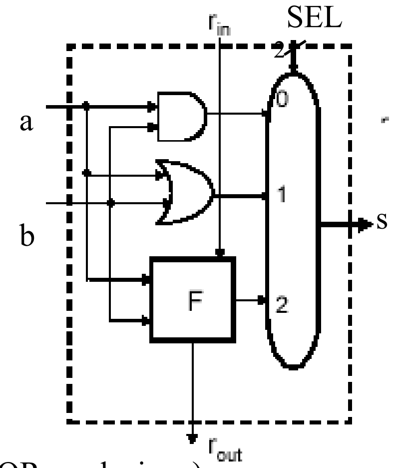
Perchè SEL non viene messo in ingresso?

I cammini critici all'interno della ALU



Valutazione ALU a 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA



Complessità 1° livello: 5 + 2 = 7

Complessità 2° livello: 8

CC 1° livello: 2 per s_{out}, 3 per r_{out}
CC 2° livello: 4 (2 AND + 2 OR del mux)

CC complessivo: 2 (calcolo) + 2 (OR – selezione)
Gli AND del selettore sono attivati in parallelo ai circuiti di calcolo

Sommario

ALU ad 1 bit

ALU a 32 bit

Comparazione, Overflow, Test di uguaglianza

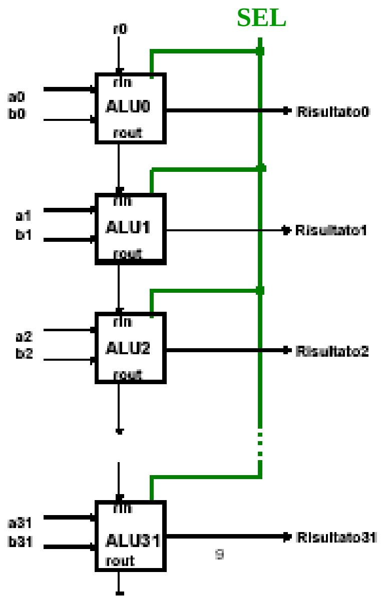
Tecnologie di costruzione di una ALU

ALU a 32 bit

Come collegare le ALU ad 1 bit?

Flusso di calcolo

Perchè non si può parallelizzare?

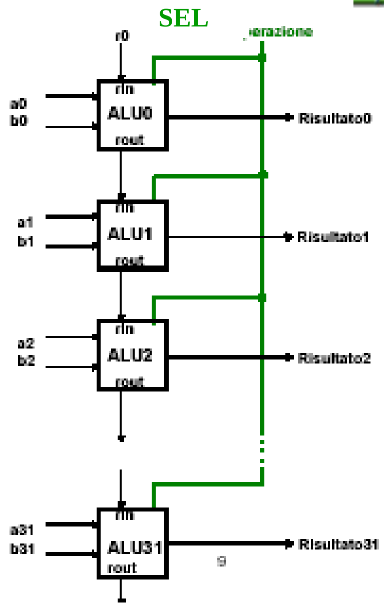


Valutazione ALU a 32 bit

Complessità: 15 x 32 =
480 porte logiche

Cammino critico: 3 x 31 +
2 (s_{out}) +
[1 + 2] (selezione) =
98 porte logiche

per 4 operazioni



Sottrazione

In complemento a 2 diventa un'addizione: $a - b = a + \bar{b} + 1 = 1 + a + \bar{b}$

Esempio: s = 3 – 4; su 3 bit

3 -> 011	011 +
-4 -> 100 in complemento a 2	100 =
-1 -> 111 in complemento a 2	111

Posso scrivere il numero negativo in complemento a 2 come somma:

	4 -> 100	numero positivo:	b
Passo I – Complemento a 1	011+	complemento a 1:	$\bar{b}$+
Passo II – Sommo + 1	1=	sommo 1:	1=
Risultato – Complemento a 2	100	risultato	-b

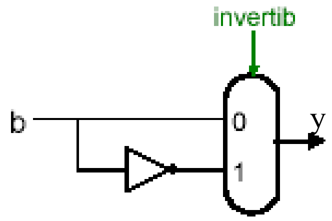
Posso quindi scrivere: $-b = \bar{b} + 1$

Sottrazione

In complemento a 2 diventa un'addizione: $a - b = a + \bar{b} + 1$

Serve:
a) un inverter (NOT).
b) la costante 1

a)

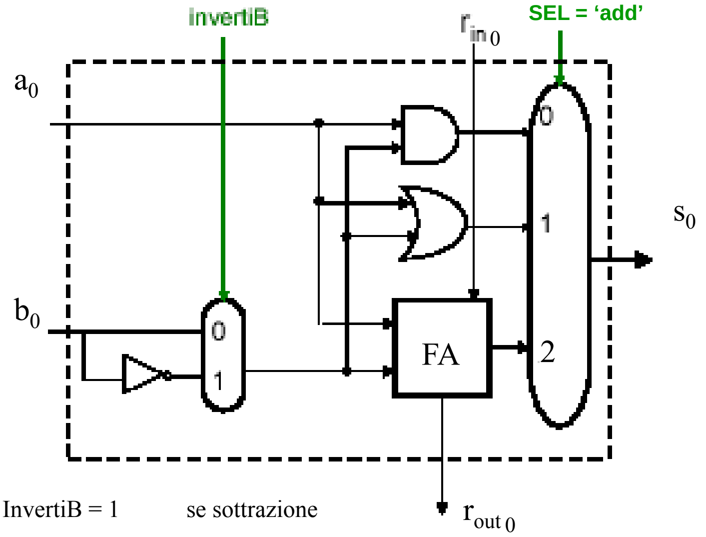


Iff invertib
y = !b

Aggiunge 2 porte logiche al cammino critico.

b) Da dove prendo la costante 1?

Sottrazione - ALU_0

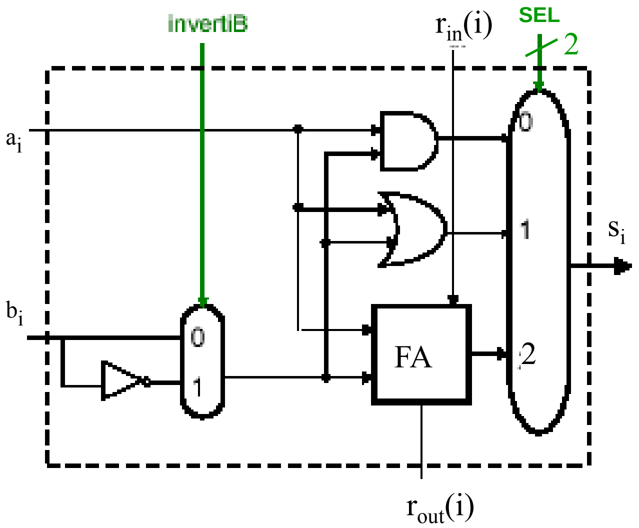


$r_{in}(0)$ = InvertiB = 1 se sottrazione $r_{out\,0}$

(occorre utilizzare un full adder anche per il bit meno significativo con $r_{in0} = 1$).
Effettuo quindi la somma di 1 con la somma della prima coppia di bit.

Sottrazione - ALU$_i$

•AND
•OR
•SOMMA
•SOTTRAZIONE



$r_{in}(i) = r_{out}(i-1)$ $i = 1,2,3,....31$ $i \neq 0$
InvertiB = 1 se sottrazione

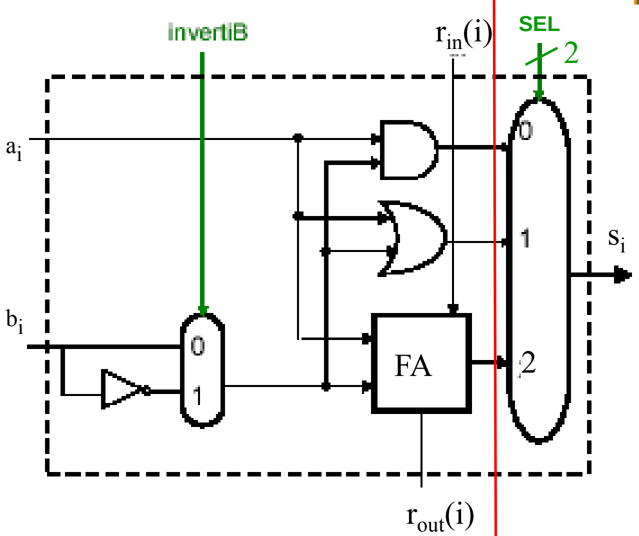
Operazioni particolari - ALU$_i$

E' possibile programmare questa ALU per eseguire

a AND !b

oppure:

a OR !b



InvertiB = 1
SEL = AND, OR

La parte di calcolo è comunque separata dalla parte di selezione

Sottrazione: ALU a 32 bit

$r_{in}(0)$ = InvertiB = 1
se sottrazione

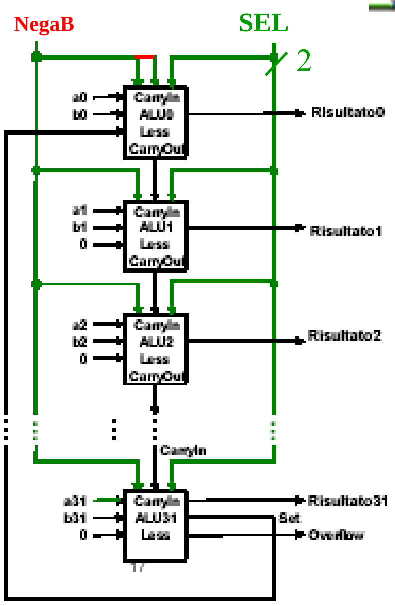
- •AND
- •OR
- •SOMMA
- •SOTTRAZIONE

From_UC	SEL	r_0	InvertiB
And	And	0	0
Or	Or	0	0
Somma	Add	0	0
Sottr.	Add	1	1

InvertiB e r_0 sono lo stesso segnale, si può ancora ottimizzare.

$r_{in}(0)$ entra solo in ALU_0

InvertiB entra in tutte le ALU_i



ALU a 32 bit con CLA

- Come realizzare una ALU a 32 bit con:
  - Porte OR
  - Porte AND
  - CLA a 4 bit?

Definire complessità e cammino critico

Sommario

Moltiplicatori

ALU