



Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso di end-point



Prof. Alberto Borghese



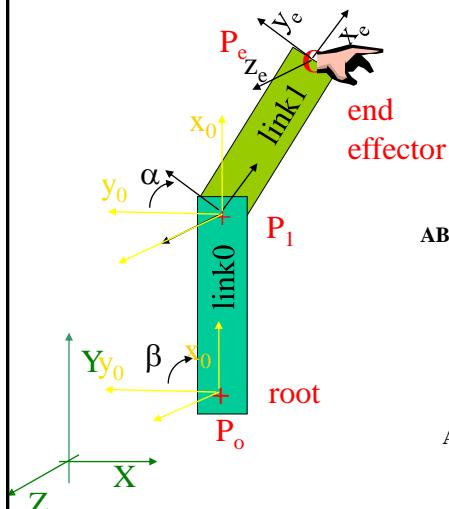
Sommario



- Più end-point che gradi di libertà ($m > n$, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione ai minimi quadrati robusta
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

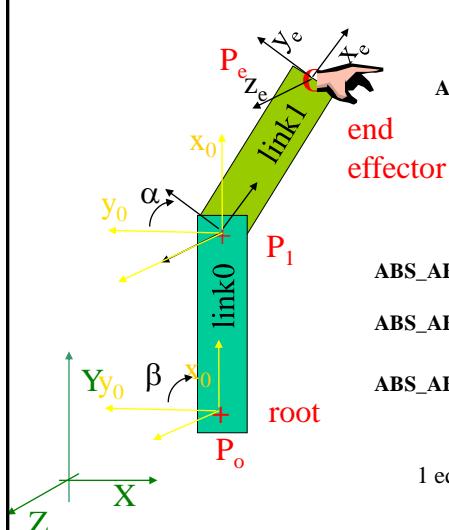


$$\text{ABS_ABS} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ABS_ABS} \mathbf{P}(t) = {}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{e}} \mathbf{A}(t) \cdot {}^{\text{e}} \mathbf{P}$$



Descrizione cinematica diretta (forma analitica)



$$\text{ABS_ABS} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ABS_ABS} \mathbf{P}_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

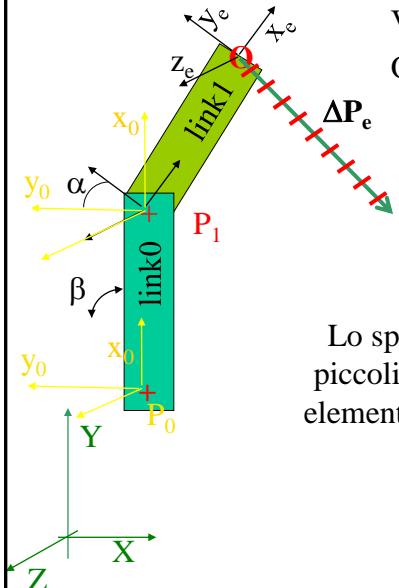
$$\text{ABS_ABS} \mathbf{P}_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

$$\text{ABS_ABS} \mathbf{P}_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

1 equazione per ogni grado di libertà di end point



Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.
Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.



Sistema di equazioni lineari



Consideriamo la trasformazione **diretta** joint \rightarrow end_point in forma matriciale.

$$\mathbf{P}(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

Chiamiamo $\mathbf{W}_k = \{\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}\}$
il valore dei parametri liberi
all'istante t_k .

$$\begin{aligned} P_x - P_{x_k} &= \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{xk}) + \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{yk}) \\ P_y - P_{y_k} &= \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{xk}) + \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{yk}) \\ P_z - P_{z_k} &= \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{xk}) + \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{yk}) \end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{W}$$



Cinemática inversa con J



Quando la matrice del Jacobiano è quadrata, risolvo la cinematica inversa mediante inversione della matrice Jacobiano

Elemento chiave è il Jacobiano, J.

Contiene le derivate parziali di $f(\cdot)$ rispetto a tutti i parametri liberi.
Le derivate sono calcolate nel “punto di lavoro”.
L'espressione analitica di J vale \forall valore dei parametri liberi, ma il
valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.



Cinematica inversa



Parto da una configurazione iniziale definita da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $\mathbf{P}_{ini} = \mathbf{f}(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

- 1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di eP_k .
 - 2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k .
 - 3) Calcolo, attraverso J_k^{-1} , il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
 - 4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
 - 5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

$${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$$
. In generale, ${}^eP_{k+1} \neq {}^eP_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale} :

Fissiamo l'attenzione su 1 passo di iterazione.



Esempio di Jacobiano (2x2)



$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{|J(W, L)|} \begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & +l_1 \sin(\alpha + \beta) + l_0 \sin \beta \\ +l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

$$|J(W, L)| = l_o l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l_o l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$\Delta \mathbf{W} = \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{P}$$

J calcolata per il valore corrente di α e β
J quadrata



Sistemi lineari con $m = n$



$$y = x + 2$$

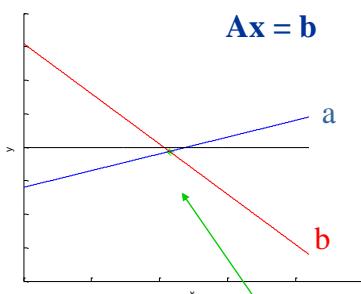
$J(W, L)$ è quadrata $m = n$

$$y = -3x + 1$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$x_1 - x_2 = -2$$

$$x = x_1$$



$$-3x_1 - x_2 = -1$$

$$y = x_2$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} = [-1/4 \ 7/4]$$

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno



Sistemi lineari con $m > n$



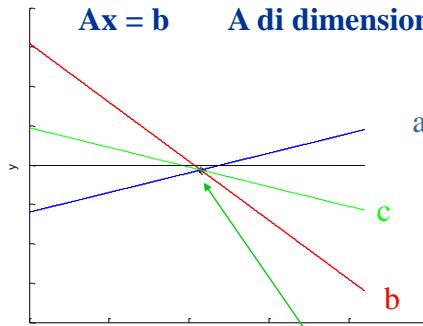
$J(W,L)$ è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

$$\begin{aligned}y &= x + 2 \\y &= -3x + 1 \\y &= -x + 3/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= x_2\end{aligned}$$

Una delle 3 righe di A è
combinazione lineare
delle altre.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$



La soluzione è sempre: $x = P = [-1/4 \ 7/4]$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno



Sistema lineare: soluzione algebrica



Caso generale:

$$AX = b \quad \longrightarrow \quad A'A X = A'b \quad \longrightarrow \quad (A'A)^{-1}(A'A)X = (A'A)^{-1}A'b$$



$(A'A)$ gioca il ruolo di A quadrata.

$$X = (A'A)^{-1}A'b$$

Quale criterio viene soddisfatto da X ?



Sistemi lineari con $m > n$



$$y = x - 2$$

$$y = -3x + 1$$

$$y = -x + 3/2$$

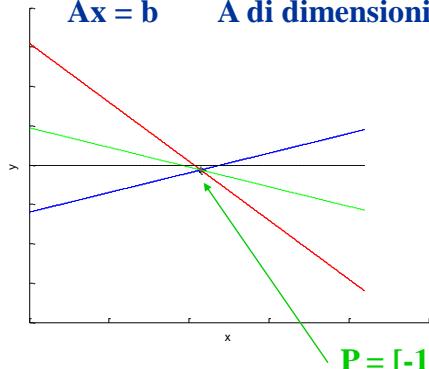
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 24$$

$$C = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$$J \Delta W = \Delta P_{desiderato}$$

$$Ax = b \quad A \text{ di dimensioni } m \times n$$



$$P = [-1/4 \ 7/4]$$

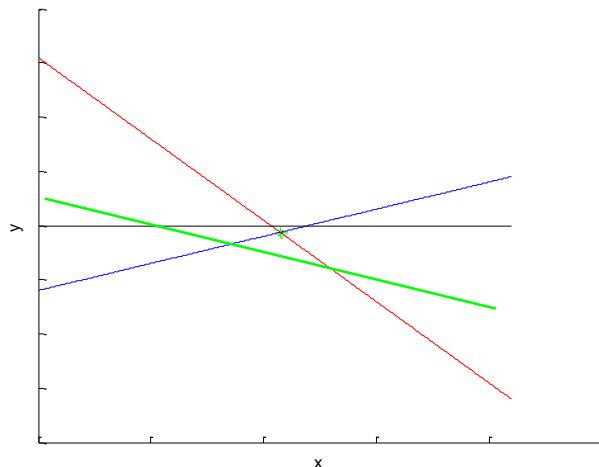
Intersezione
di 3 rette

$$x = C * A^T * b$$

$$x = P = [-0.25 +1.75]$$



Situazione generale



Con 3 rette sul piano, non esiste un'intersezione



Riformulazione del problema



$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots &= a_{1N}x_N = b_1 + v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots &= a_{2N}x_N = b_2 + v_2 \end{aligned}$$

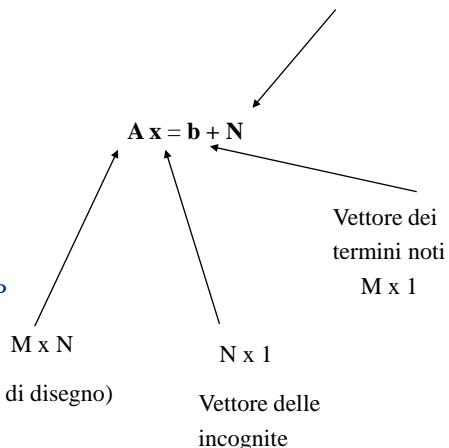
$M \times 1 \Rightarrow$ Residuo.

$$\dots$$

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots = a_{MN}x_N = b_M + v_M$$

Modello
Spostamento indotto
dai parametri liberi $J\Delta W$

Misure
Spostamento
desiderato ΔP



Quale criterio viene soddisfatto da $X (\Delta W)$?



Soluzione come problema di ottimizzazione



$$\text{Funzione costo: } (Ax - b)^2 = \sum_k v_k^2 = \|Ax - b\|^2 = |v|^2$$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x , non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza minima da tutte le rette.

$$\min_x \sum_k v_k^2 = \min_x (Ax - b)^2$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (Ax - b)^2 = 2A^T(Ax - b) = 0$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T b$$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convesse perché hanno un unico minimo globale).



Sistemi lineari con $m > n$



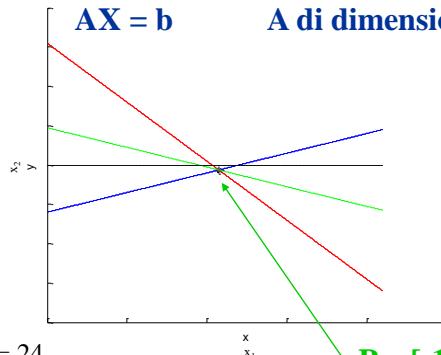
$$y = x - 2$$

$$y = -3x + 1$$

$$y = -x + 3/2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 24$$



$$AX = b$$

A di dimensioni $m \times n$

$$P = [-1/4 \ 7/4]$$

$$C = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \quad x = C * A^T * b \quad x = P = [-0.25 \ 1.75]$$

$$\sum_k v_k^2 = \|Ax - b\| = 0 \quad x \text{ soddisfa tutte le equazioni}$$

A.A. 2024-2025

<http://borgheze.di.unimi.it>

Sistemi lineari con $m > n$ non esiste soluzione (matematica)



$$y = x - 2$$

$$y = -3x + 1$$

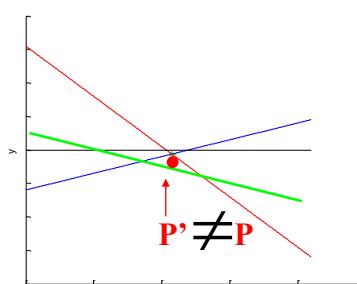
$$y = -x + 1/2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 24$$

$$AX = b$$

A di dimensioni $m \times n$



$$x' = P' = [-0.25 \ 1.4167]$$

No intersezione

$$C = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$$x' = C * A^T * b$$

A.A. 2024-2025

18/43

<http://borgheze.di.unimi.it>



Sistemi lineari con $m > n$ – residui



$$y = x - 2$$

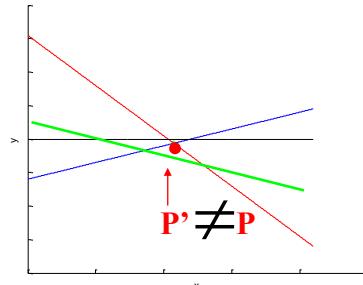
$$y = -3x + 1$$

$$\begin{array}{l} x=x_1 \\ y=x_2 \end{array}$$

$$y = -x + 1/2$$

$$AX = b$$

A di dimensioni $m \times n$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$x^* = C * A^T * b$$

$$x^* = P^* = [-0.25 \ 1.4167] \quad \text{No intersezione}$$

$$v_1 = 1*(-0.25) - 1*(1.4167) - (-2) = 0.333$$

$$v_2 = -3*(-0.25) - 1*(1.4167) - (-1) = 0.333$$

$$v_3 = -1*(-0.25) - 1*(1.4167) - (-0.5) = -0.666$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^2 = \|Ax - b\|^2 = |v|^2$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^2 = 0.111 + 0.111 + 0.444 = 0.666$$

A.A. 2024-2025

19/43

<http://borgheze.di.unimi.it>



Commenti



$$\begin{aligned} \sum_k v_k^2 &= \|Ax - b\|^2 = \sum_k \|A_{k,*}x - b_k\|^2 = \\ &[(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) - b_1]^2 + [(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) - b_2]^2 + \\ &[(A_{31}x_1 + A_{32}x_2) - b_3]^2 \end{aligned}$$

Lo scarto misura la distanza del punto dalle rette misurata lungo y

$$y - x + 2 = v_1 = 0.33333$$

$$y + 3x - 1 = v_2 = 0.33333$$

$$y + x - 1/2 = v_3 = -0.6666$$

A.A. 2024-2025

20/43

<http://borgheze.di.unimi.it>



Sommario



- Più end-point che gradi di libertà ($m > n$, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione ai minimi quadrati robusta
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.



Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)



$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{V}$$

Ortonormale $M \times N$ Diagonale ($N \times N$) Ortonormale $N \times N$

Se $N = M$

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{V}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}' \mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{V})^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}$$

\mathbf{W}^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
 w_{ii} sono detti valori singolari.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{V}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b}$$



Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)



$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ M \times N \\ \text{Ortonormale } M \times N \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{V} \\ \text{Diagonale } (N \times N) \end{array}$$

\mathbf{W}^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
 w_{ii} sono detti valori singolari.

Ortonormale $N \times N$

Se $M > N$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{U} \mathbf{b} = (\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{I} \mathbf{W} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{U} \mathbf{b}$$

Essendo \mathbf{W} diagonale, posso riorganizzare il prodotto di matrici:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{W} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{U} \mathbf{b} = (\mathbf{W} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{U} \mathbf{b} = \mathbf{V}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{b}$$



Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)



$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ M \times N \\ \text{Ortonormale } M \times N \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{V} \\ \text{Diagonale } (N \times N) \end{array}$$

\mathbf{W}^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
 w_{ii} sono detti valori singolari.

Ortonormale $N \times N$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{b}$$

Non devo calcolare l'inversa di una matrice dell'ordine di $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$

Calcolo l'inversa in modo semplice: inversa di \mathbf{W} è ottenuta come $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Controllo il condizionamento della matrice: rapporto tra w_{11} e w_{nn}



Sommario



- Più end-point che gradi di libertà ($m > n$, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione ai minimi quadrati robusta
- **Esempi**
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

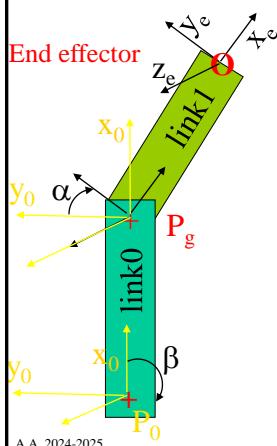


Cinematica diretta semplificata



Considero solo α e β come parametri liberi

4 equazioni nei 2 parametri liberi α e β



$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_e P \\ {}^{ABS}_g P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ l_0 \cos \beta \\ -l_0 \sin \beta \end{bmatrix}$$

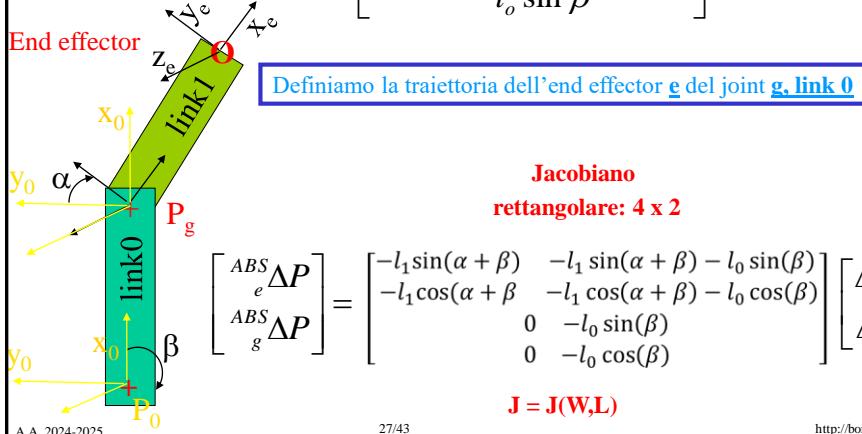
Definiamo la traiettoria dell'end effector **e** del joint **g**, **link 0**



Il Jacobiano dell'esempio



$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_e P \\ {}^{ABS}_g P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ l_0 \cos \beta \\ -l_0 \sin \beta \end{bmatrix}$$



A.A. 2024-2025

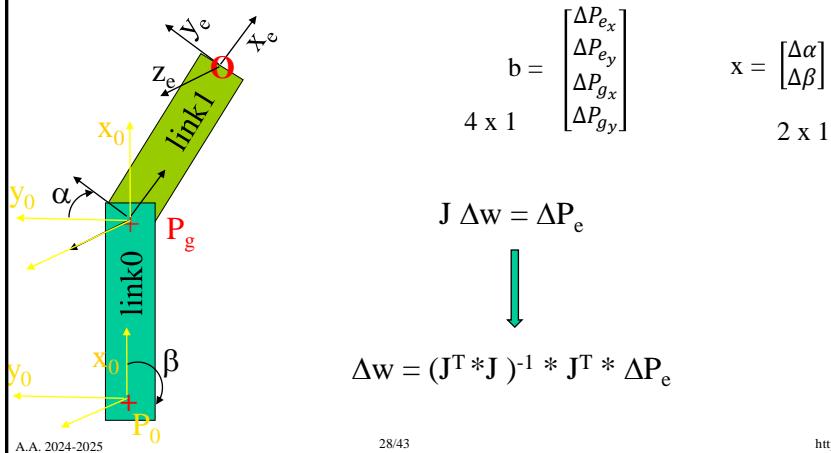
27/43

<http://borghese.di.unimi.it>

Esempio ($m = 4$, $n = 2$) – sistema lineare



$$\mathbf{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin(\beta) \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos(\beta) \\ 0 & -l_0 \sin(\beta) \\ 0 & -l_0 \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



A.A. 2024-2025

28/43

<http://borghese.di.unimi.it>

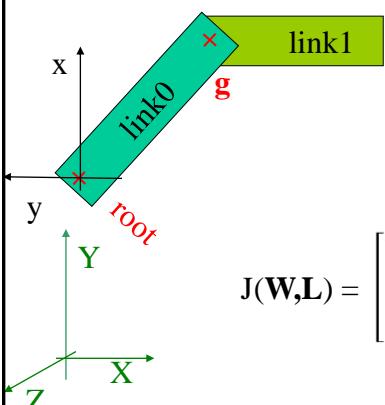


Esempio ($m = 4$, $n = 2$) per $\alpha = \beta = 45^\circ$



$$J(W, L) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin(\beta) \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos(\beta) \\ 0 & -l_0 \sin(\beta) \\ 0 & -l_0 \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$$



$$b = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}, \quad 4 \times 1$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}, \quad 2 \times 1$$

$$J(W, L) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin(45) \\ 0 & -l_0 \cos(45) \\ 0 & -l_0 \sin(45) \\ 0 & -l_0 \cos(45) \end{bmatrix}$$

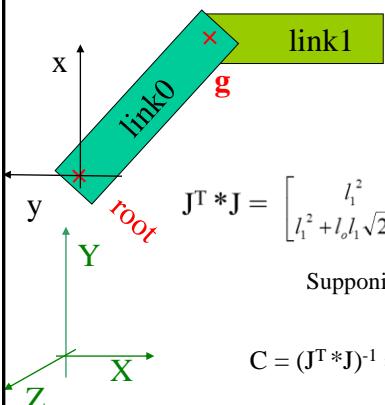
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$



Esempio ($m = 4$, $n = 2$) – Pseudo-inversa



$$J(W, L) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin(\beta) \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos(\beta) \\ 0 & -l_0 \sin(\beta) \\ 0 & -l_0 \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



$$J(\{45, 45\}, L) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin(45) \\ 0 & -l_0 \cos(45) \\ 0 & -l_0 \sin(45) \\ 0 & -l_0 \cos(45) \end{bmatrix} =$$

Supponiamo:
 $\alpha = \beta = 45^\circ$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_0 l_1 \sqrt{2}/2 \\ l_1^2 + l_0 l_1 \sqrt{2}/2 & (-l_1 - l_0 \sin 45)^2 + (l_0 \cos 45)^2 + (l_0 \sin 45)^2 + (l_0 \cos 45)^2 \end{bmatrix} =$$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} & 12+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$



Esempio ($m = 4$, $n = 2$) - soluzione



$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P \quad b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}$$

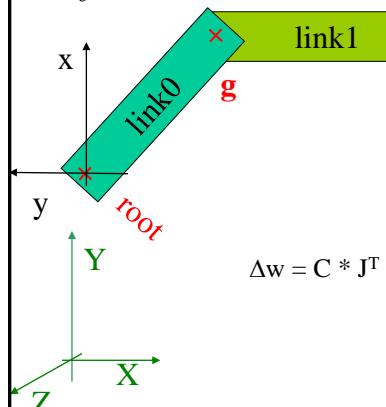
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$\Rightarrow P_e = \{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\};$

$\Rightarrow P_g = \{\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$

$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{ll} \Delta P_{e_x} = 1 & \Delta P_{e_y} = 0 \\ \Delta P_{g_x} = 1 & \Delta P_{g_y} = 0 \end{array}$$

$$\Delta w = C * J^T * \Delta P = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} \text{radiani} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} \text{gradi}$$

A.A. 2024-2025

31/43

<http://borghese.di.unimi.it>



Esempio ($m = 4$, $n = 2$) – errore

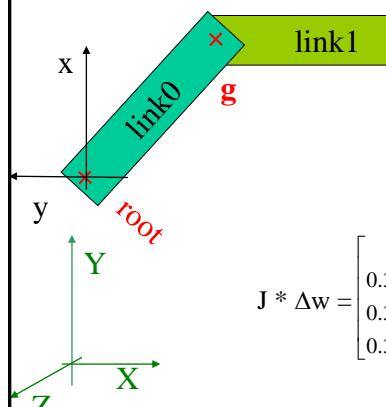


$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P \quad b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$\begin{array}{ll} \Delta P_{e_x} = 1 & \Delta P_{e_y} = 0 \\ \Delta P_{g_x} = 1 & \Delta P_{g_y} = 0 \end{array}$$



$$\Delta w = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} \text{radiani} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} \text{gradi}$$

$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E' diverso
dal valore desiderato
per ΔP

32/43

Movimento ottenuto

<http://borghese.di.unimi.it>



Esempio ($m = 4$, $n = 2$) - quantificazione



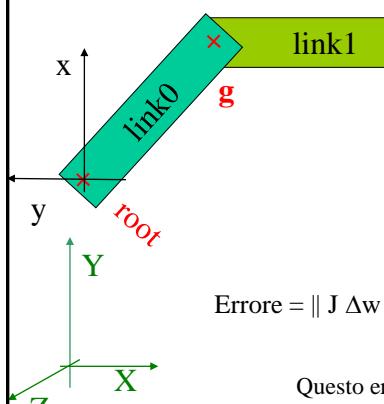
$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P \quad b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$$

$$x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} \text{ grad}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$\begin{aligned} \Delta P_{e_x} &= 1 & \Delta P_{e_y} &= 0 \\ \Delta P_{g_x} &= 1 & \Delta P_{g_y} &= 0 \end{aligned}$$



$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$$

$$\text{Errore} = \| J \Delta w - \Delta P \|^2 = 0^2 + 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2 = 0.8165$$

Questo errore è il minimo errore ottenibile in norma l_2 .



Cinematica inversa



Parto da una configurazione iniziale definita da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{\text{ini}} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k :

- 1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di eP .
- 2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k .
- 3) Calcolo, attraverso J_k^{-1} , il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
- 4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
- 5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

$${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L). \text{ In generale, } {}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k.$$

Fino a quando non arriva a P_{finale} .

Abbiamo analizzato 1 passo



Sommario



- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite ($m > n$, sistemi sovradeterminati).
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.



Stima ai minimi quadrati pesata



Introduco un peso p_i sull'errore di ogni end-point, v_i

$$\begin{aligned} p_1 a_{11} x_1 + p_1 a_{12} x_2 - p_1 b_1 &= p_1 v_1 \\ p_2 a_{21} x_1 + p_2 a_{22} x_2 - p_2 b_2 &= p_2 v_2 \\ p_3 a_{31} x_1 + p_3 a_{32} x_2 - p_3 b_3 &= p_3 v_3 \end{aligned}$$

Residuo
pesato

Il sistema diventa $PAX = Pb$ con P matrice diagonale $m \times m$

$$\begin{aligned} \min \sum_k (p_k v_k)^2 \\ \downarrow \\ \min \|PAx - Pb\|^2 = \min \|P(Ax - b)\|^2 \end{aligned}$$



Stima ai minimi quadrati pesata - soluzione



Introduco un peso p_i sull'errore di ogni end-point, v_i

$$\begin{aligned} p_1 a_{11} x_1 + p_1 a_{12} x_2 - p_1 b_1 &= p_1 v_1 \\ p_2 a_{21} x_1 + p_2 a_{22} x_2 - p_2 b_2 &= p_2 v_2 \\ p_3 a_{31} x_1 + p_3 a_{32} x_2 - p_3 b_3 &= p_3 v_3 \end{aligned}$$

Residuo
pesato $\min \| P(Ax - b) \|^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{x} (PAx - Pb)^2 = 0 &\Rightarrow A'P' (PAx - Pb) = 0 \\ &\Rightarrow A'P'PAx - A'P'Pb = 0 \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

dato che $P' = P$, è non singolare ed è diagonale si puo' spostare all'interno del prodotto x estrarla in entrambi i membri dell'equazione:

$$P'(A'PAx - A'Pb) = 0$$

$$\boxed{x = (A^T P A)^{-1} A^T P b}$$



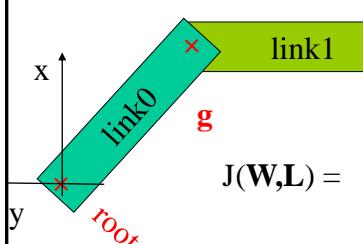
Esempio ($m = 4, n = 2; \alpha = \beta = 45^\circ$)



$$J(W, L) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin(\beta) \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos(\beta) \\ 0 & -l_0 \sin(\beta) \\ 0 & -l_0 \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = (J^T * P * J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e$$

$$\Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$



$$J(W, L) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 \\ 0 & -l_0 \cos 45 \\ 0 & -l_0 \sin 45 \\ 0 & l_0 \cos 45 \end{bmatrix} \quad \text{Supponiamo: } \alpha = \beta = 45^\circ$$

$$Y J^T P J = \begin{bmatrix} p_1 * l_1^2 & p_1(l_1^2 + l_0 l_1 \sqrt{2}/2) \\ p_1(l_1^2 + l_0 l_1 \sqrt{2}/2) & p_1[(-l_1 - l_0 \sin 45)^2] + p_2(l_0 \cos 45)^2 + p_3(l_0 \sin 45)^2 + p_4(l_0 \cos 45)^2 \end{bmatrix}$$





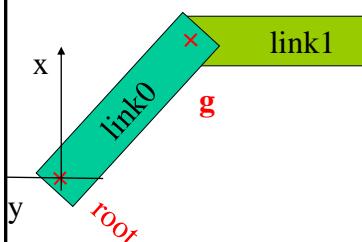
Soluzione con i pesi



$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e \quad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$



$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_e^e_x = 1 \quad \Delta P_g^e_x = 1$$

$$\Delta P_e^e_y = 0 \quad \Delta P_g^e_y = 0$$

$$(J^T P J) = \begin{bmatrix} 40 & 68.284 \\ 68.284 & 140.568 \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = [-22.887; 2.56] \text{ gradi}$$



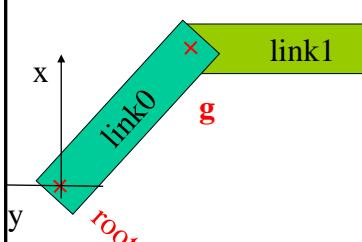
Errore ottenuto



$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e \quad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$



$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_e^e_x = 1 \quad \Delta P_g^e_x = 1$$

$$\Delta P_e^e_y = 0 \quad \Delta P_g^e_y = 0$$

$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_x^e \\ \Delta P_y^e \\ \Delta P_x^g \\ \Delta P_y^g \end{bmatrix}$$

Spostamento ottenuto

Spostamento desiderato



Errore ottenuto - valutazione

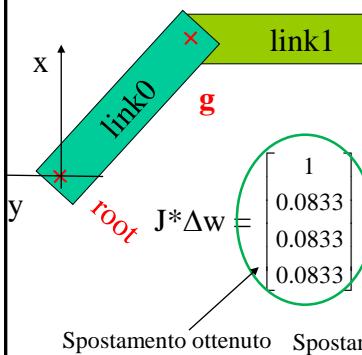


$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e \quad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \Delta P_e^e_x = 1 & \Delta P_e^e_y = 0 \\ \Delta P_e^g_x = 1 & \Delta P_e^g_y = 0 \end{array}$$



$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

più vicino al valore desiderato per il punto e e meno vicino per il punto g

$$\min \| P(J \Delta w - \Delta P_e) \| = ((1-1)*10)^2 + ((0.0833-0)*10)^2 + (0.0833-1)^2 + (0.0833-0)^2 \quad \text{li.unimi.it}$$



Privilegio di alcuni punti dello scheletro rispetto ad altri



$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e$$

Attraverso la matrice diagonale dei pesi P
posso influenzare la soluzione
(vincolo soft sul movimento)



Sommario



- Più end-point che gradi di libertà ($m > n$, sistemi sovradeterminati)
- Soluzione robusta ai minimi quadrati
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.