# La cinematica Inversa ed il Jacobiano

**Prof. Alberto Borghese**

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.

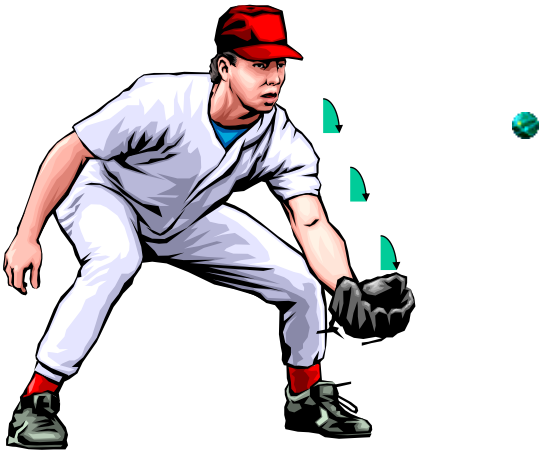


# Riassunto

- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

# La cinematica diretta

Dagli angoli (relativi) alla posizione (e orientamento) della mano



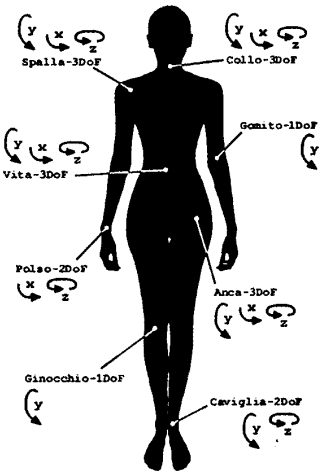


# La cinematica inversa

Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.

Problema sotto-determinato (under-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?

# Cinematica inversa e scheletro




$\infty$ soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.

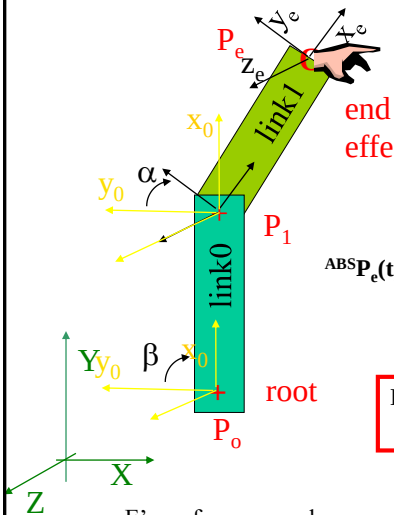
*Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.*



# Cinematica diretta

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}Pe_e(t_0)$




$$^{ABS}\mathbf{P_e(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

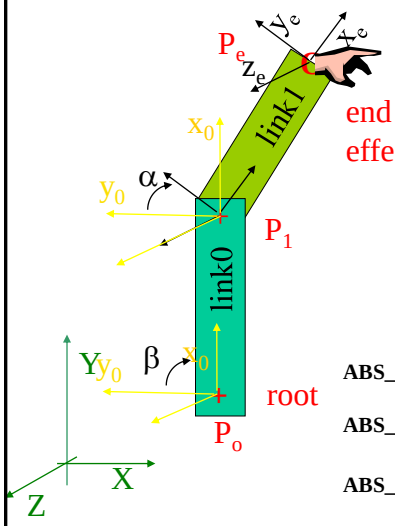
$$^{ABS}\mathbf{P_e(t)} = \begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha(t) + l_0)\cos\beta(t) - l_1\sin a(t)\sin\beta(t) & + T_x(t) \\ -(l_1\cos\alpha(t) + l_0)\sin\beta(t) - l_1\sin a(t)\cos\beta(t) & + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:

$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t_0)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

# Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)




$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A(t)} \quad {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$



# Riassunto

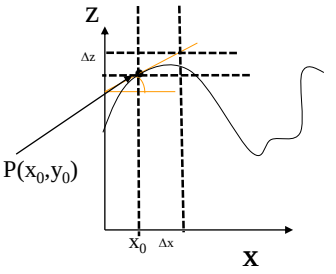
- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi

# Linearizzazione – 1 variabile

$z_0 = f(x_0)$

$$dz = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=x_0} dx^2 + \ldots$$

$$z - z_0 = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x \Rightarrow z = mx + q$$




$\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x$

Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di $P(x_o,z_o)$.
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili ( **P(t)** = f(α(t), β(t), $T_x$(t), $T_y$(t)| $l_0$, $l_1$))?

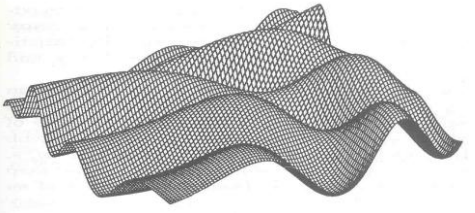


# Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili

z = f(x,y) Superficie nello spazio 3D

$$z - z_o = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P=P_0} dy}_{} + \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P=P_0} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P=P_0} + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P=P_0} dy^2\right\} + \ldots$$

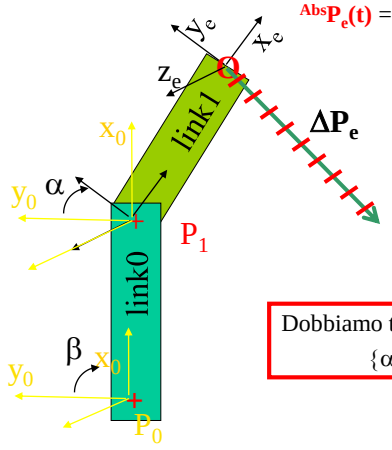
Parte lineare



# Approssimazione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}Pe_e(t)$




$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:

$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!



# Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

$\mathbf{P(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.

Chiamiamo $\mathbf{W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]}$ il valore dei parametri liberi all'istante $t_k$.

$$\begin{array}{lll} & \Delta\alpha_k \quad \Delta\beta_k \quad \Delta T_{xk} \quad \Delta T_{yk} & \\ \Delta P_{xk} & P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial\alpha}\right|_{W_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial\beta}\right|_{W_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k}(T_x-T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k}(T_y-T_{yk}) \\ \Delta P_{yk} & P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial\alpha}\right|_{W_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial\beta}\right|_{W_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k}(T_x-T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k}(T_y-T_{yk}) \\ \Delta P_{zk} & P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial\alpha}\right|_{W_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial\beta}\right|_{W_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k}(T_x-T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k}(T_y-T_{yk}) \end{array}$$

# Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

**P(t)** = f(α(t), β(t), $T_x$(t), $T_y$(t)| $l_0$, $l_1$).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.

$\Delta P = J_k \Delta W$

Chiamiamo $W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante $t_k$.

$$\Delta P = \begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix} = \Delta W$$



# Caratteristiche del Jacobiano

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Contiene le derivate parziali di **f**(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'**espressione analitica** di J vale ∀valore dei parametri liberi, {w}, ma il **valore assunto** da J varia in funzione dei parametri liberi.

# Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k} & \dots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k} & \dots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \dots\dots \end{bmatrix}$$

$\Delta \mathbf{P_e(t_k)}$

$$\Delta \mathbf{P_e(t_k)} = J(\mathbf{W(t_k)}, \mathbf{L})\Delta \mathbf{W(t_k)}$$

$\Delta \mathbf{W(t_k)}$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)}$= [($\alpha$(t), $\beta$(t), $T_x$(t), $T_y$(t) ] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' una rappresentazione implicita (differenziale) del movimento

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parametri liberi a quello dell'end-point: $\Delta \mathbf{W(t)}$ -> $\Delta \mathbf{P_e(t)}$

*Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!*



# Riassunto

- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi

# Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots \quad a_{1N}\, x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots \quad a_{2N}\, x_N = b_2$

.....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots \quad a_{MN}\, x_N = b_M$

$\{a_{ij}\}$ – coefficienti in numero N x M

$\{x_j\}$ – incognite, N

$\{b_j\}$ – termini noti, M

**$J\Delta W = \Delta P$**

**A x = b**

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N (Matrice di disegno)

Vettore delle incognite

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

**Esempio:**

$3x_1 + 2\, x_2 + \ldots\ldots \quad 4x_N = 5$

$4x_1 - 2\, x_2 + \ldots\ldots \quad 0.5\, x_N = 3$

.....

$2x_1 + 3\, x_2 + \ldots\ldots \quad -3\, x_N = -1$

$\{x_j\}$ soddisfano tutte le equazioni



# Matrice inversa

Viene definita per matrici **quadrate** (N x N):

$$A^{-1}A = I$$

Esiste ed è unica se $\det(A) \neq 0$.

*Inv(A) è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna per il loro complemento algebrico (formula di Leibniz).*

**Ax = b** ➔ $A^{-1}A\, x = A^{-1}\, b$ ➔ $Ix = A^{-1}\, b$ ➔ $\boxed{\mathbf{x = A^{-1}\, b}}$

# Risoluzione di un sistema 2x2

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$



# Riassunto

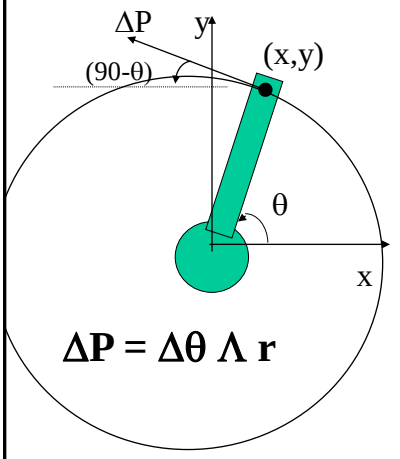
- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi

# Rotazione semplice

$x(t) = r \cos(\theta(t))$

$y(t) = r \sin(\theta(t))$

Cinematica inversa: $\theta(t) = f\{x(t), y(t)\}$




$\Delta P = \Delta\theta \Lambda r$

**Linearizzazione**

$$\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta \\ r\cos\theta\end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \Delta\theta$$

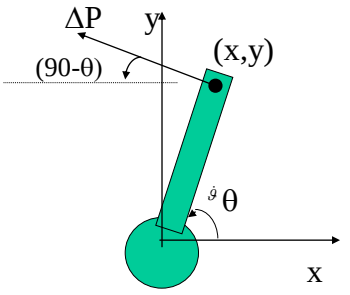
Sono due espressioni equivalenti $\forall k$



# Utilizzo del Jacobiano

$x(t) = r \cos(\theta(t))$

$y(t) = r \sin(\theta(t))$



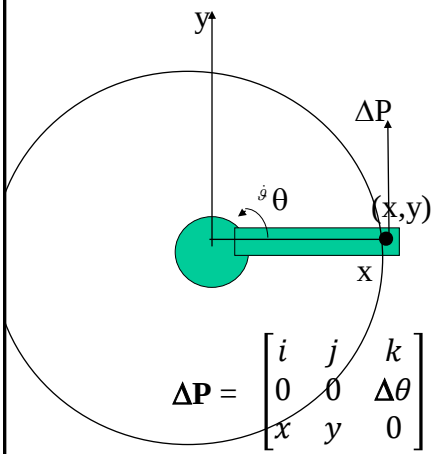

$$\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta \\ r\cos\theta\end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \Delta\theta$$

$$\Delta P = \Delta\theta \Lambda r \Rightarrow \Delta P = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Delta\theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\Delta\theta \\ x\Delta\theta \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\Delta\theta \\ r\cos\theta\Delta\theta \\ 0\end{bmatrix}$$

# Esempio di utilizzo del Jacobiano

$x(t) = r\cos(\theta(t))$

$y(t) = r\sin(\theta(t))$



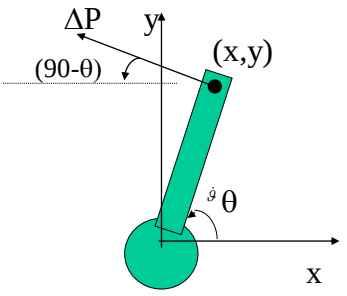

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \Delta\theta$$

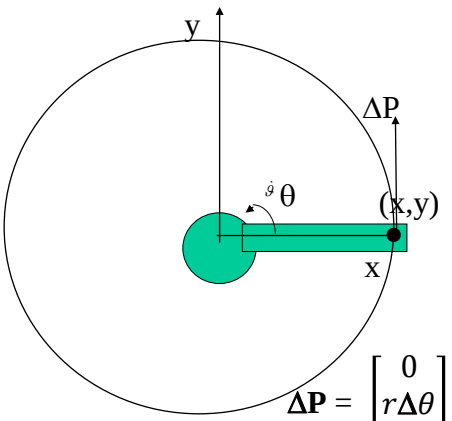
$\theta_k = 0$

$$\mathbf{\Delta P} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Delta\theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\Delta\theta\\ x\Delta\theta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\mathbf{0}\Delta\theta\\ r\cos\mathbf{0}\Delta\theta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ r\Delta\theta\\ 0\end{bmatrix}$$



# Determino la cinematica inversa



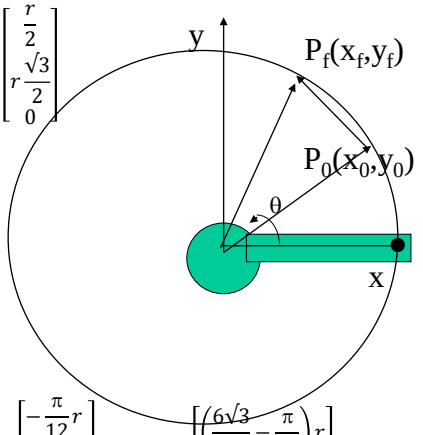

$$\mathbf{\Delta P} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\Delta\theta\\ r\cos\theta\Delta\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta P} = \begin{bmatrix}0\\ r\Delta\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta Py}{r\cos\theta} = \frac{-\Delta Px}{r\sin\theta} \qquad \theta_k = 0 \qquad \Delta\theta = \frac{\Delta Py}{r}$$

# Errore indotto dalla linearizzazione nella cinematica diretta

$$\mathbf{P_f} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\frac{1}{2} \\ r\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \\ r\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



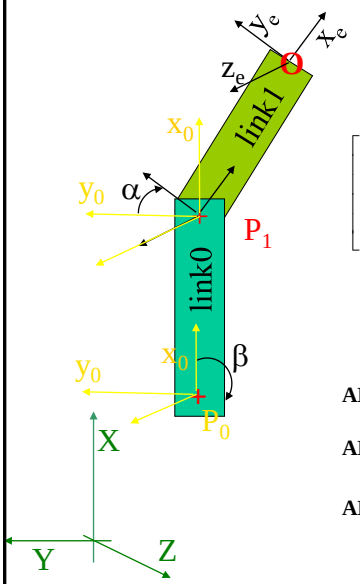

Ruota da $\theta = 30$ gradi a $\theta = 60$ gradi

$$\Delta\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\Delta\theta \\ r\cos\theta\Delta\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\frac{1}{2}\frac{\pi}{6} \\ r\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{12}r \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{12}r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P_f} = \begin{bmatrix} \left(\frac{6\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi}{12}\right)r \\ \left(\frac{6}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)r \\ 0 \end{bmatrix} =$$



# Cinematica diretta del braccio




$$^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A}\,{}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

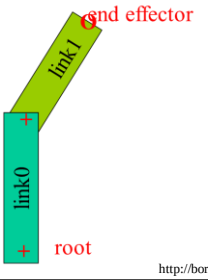
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

# La matrice di trasformazione

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\Big|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$\Delta\mathbf{P_e(t_k)}$ $\qquad$ $\mathbf{J}$ $\qquad$ $\Delta\mathbf{W(t_k)}$






# Il Jacobiano dell'esempio - Px

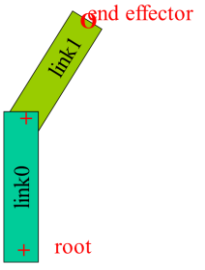
$$\mathbf{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Px}{d\alpha} = -l_1 \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\partial Px}{d\beta} = -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin(\beta)$$

$$\frac{\partial Px}{dTx} = 1$$

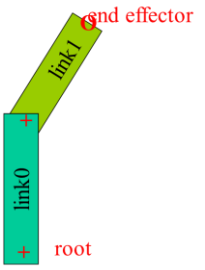
$$\frac{\partial Px}{dT_y} = 0$$



# Il Jacobiano dell'esempio - Py

$$\mathbf{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Py}{d\alpha} = -l_1\cos(\alpha+\beta)$$
$$\frac{\partial Py}{d\beta} = -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta)$$
$$\frac{\partial Py}{dTx} = 0$$
$$\frac{\partial Py}{dT_y} = 1$$



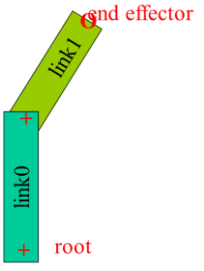



# Il Jacobiano dell'esempio

$$\mathbf{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J(W,L)} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano varia al variare dei parametri liberi



# Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \\ \frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\Big|_{W_k} & \frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\Big|_{W_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

J

$\Delta \mathbf{P_e(t_k)}$ $\qquad$ $\Delta \mathbf{W(t_k)}$

$$\Delta \mathbf{P_e(t)} = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\Delta \mathbf{W(t)}$$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)}$= {(α(t), β(t), $T_x$(t), $T_y$(t) } il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parametri liberi a quello dell'end-point: $\Delta \mathbf{W(t)}$ -> $\Delta \mathbf{P_e(t)}$

*Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!*



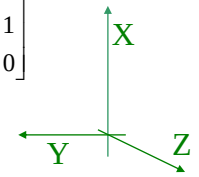
# Spostamento: caso particolare - I

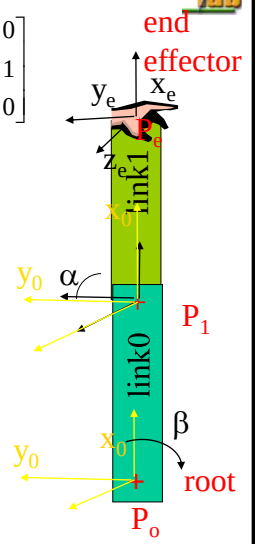
$$\mathbf{J(W,L)} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso particolare: α = β = 0

$W_k = \{0, 0, T_{x_k}, T_{y_k}\}$

$$\mathbf{J(W_k,L)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Spostamento: caso particolare - II

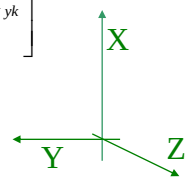
Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

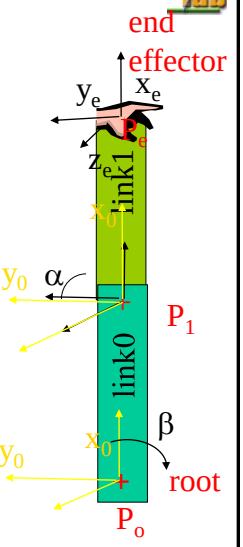
$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_x \\ -l_0 \Delta\alpha - (l_0 + l_1)\Delta\beta + \Delta T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$



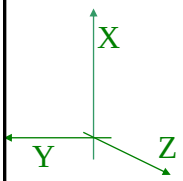

Mi sposto solo lungo Y



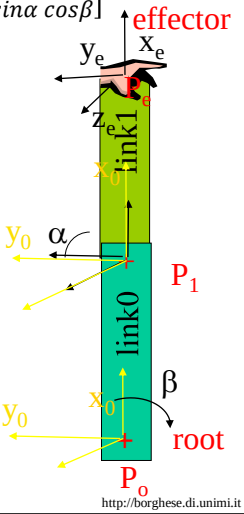
# Caso semplificato

Elimino 2 gradi di libertà: Tx e Ty e considero solamente il movimento sul piano x,y.

$$\mathbf{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{\mathbf{ABS\_ABS}}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}\ \mathbf{P0\_L0}\mathbf{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 cos\alpha + l_0)cos\beta & -l_1 sin\alpha\ sin\beta \\ -(l_1 cos\alpha + l_0)sin\beta & -l_1 sin\alpha\ cos\beta \end{bmatrix}$$




La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.



# Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 cos\alpha + l_0)cos\beta & -l_1 sin\alpha\ sin\beta \\ -(l_1 cos\alpha + l_0)sin\beta & -l_1 sin\alpha\ cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J(W,L)} = \begin{bmatrix} -l_1 sin(\alpha+\beta) & -l_1 sin(\alpha+\beta) - l_0 sin\beta \\ -l_1 cos(\alpha+\beta) & -l_1 cos(\alpha+\beta) - l_0 cos\beta \end{bmatrix}$$



# Non tutti gli spostamenti sono possibili

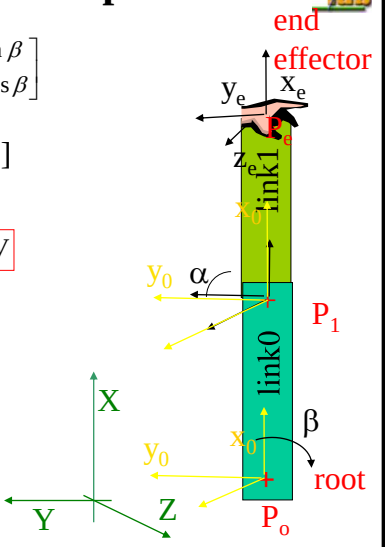
$$\mathbf{J(W,L)} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\quad W_k = [0, 0]$

$$\mathbf{J(W_k,L)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \qquad \Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L})\Delta W$$

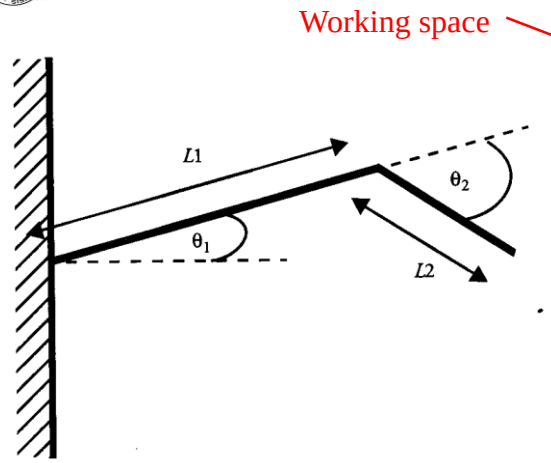
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \Delta a + (-l_0 + l_1)\Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

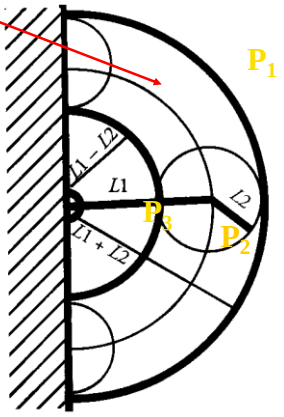



E' possibile spostarsi <u>solamente</u> in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per $\alpha = \beta = 0$

# Soluzione diretta




Working space




***Spazio di lavoro***: $L_1 - L_2 \leq \| P \| \leq L_1 + L_2$

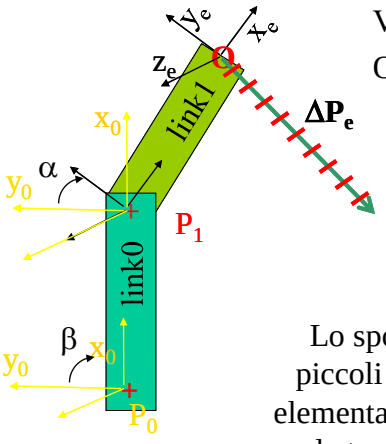
Possibili configurazioni:
$P_1$ - nessuna soluzione.
$P_2$ - due soluzioni.
$P_3$ - una soluzione.



# Riassunto

- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi

# Cinematica inversa




Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare o la traslazione richiesta per **tutti i joint**. Lavoriamo sulle variazioni (differenziale).



# Determinazione delle variazioni dei parametri liberi

$$\Delta \mathbf{P_e(t)} = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, \Delta \mathbf{W(t)}$$

E' un sistema lineare

$$b = A \quad X$$

b – vettore degli spostamenti desiderati dell'end-point (che vengono forniti dal sistema di controllo)
X – vettore delle variazioni richieste dei parametric liberi (che non conosciamo)
A – matrice di disegno del problema (che conosciamo se conosciamo la posizione attuale dello scheletro). A = J(.) vale in un intorno di questa posizione.

La soluzione del sistema lineare è: $X = A^{-1} b$

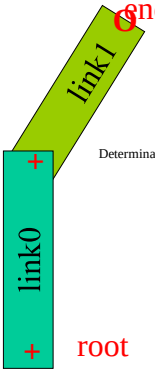
$$\Delta \mathbf{W(t)} = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})^{-1}\, \Delta \mathbf{P_e(t)}$$

# Il Jacobiano dell'esempio semplificato: determinante

$$^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 cos\alpha + l_0)cos\beta & -l_1 sin\alpha\, sin\beta \\ -(l_1 cos\alpha + l_0)sin\beta & -l_1 sin\alpha\, cos\beta \end{bmatrix} \qquad \Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L})\Delta W$$

Consideriamo il caso piano (x,y) e Tx ≡ Ty ≡ 0 e coordinate non omogenee.

$$\mathbf{J(W,L)} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$




$$|J(W,L)| = l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

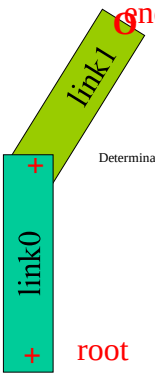
$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$



# Condizioni di singolarità

$$|J(W,L)| = l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$




$$J(.) \neq 0 \begin{cases} \alpha + \beta \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases}$$

$$J(.) \neq 0 \begin{cases} \alpha + \beta \neq 90 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases}$$

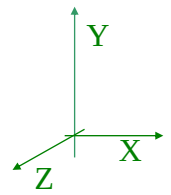
In generale, $\alpha \neq 0 \pm 180$. Definisce la frontiera dello spazio di lavoro

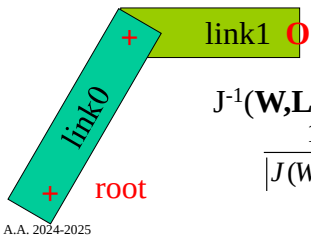
# Inverso del Jacobiano dell'esempio semplificato

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$



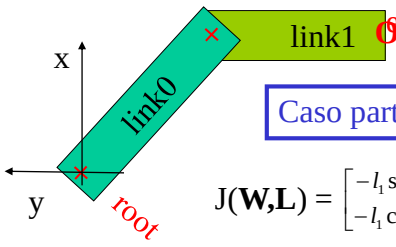




$$J^{-1}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & +l_1 \sin(\alpha+\beta) + l_0 \sin\beta \\ +l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$



# Il Jacobiano: determinante – caso particolare

$$^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$




Consideriamo il caso piano e Tx ≡ Ty ≡ 0

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

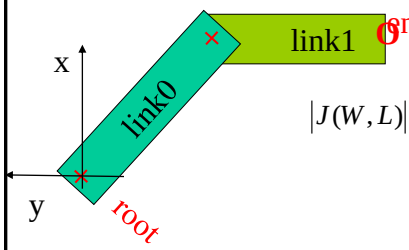
$$\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W$$

$$J([\mathbf{45,45}],[\mathbf{2,2}]) = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \det(J) = 2\sqrt{2}$$

# Inverso del Jacobiano: caso particolare

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J^{-1}(\mathbf{W,L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & +l_1\sin(\alpha+\beta) + l_0\sin\beta \\ +l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$




$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$J^{-1}([45, 45],[2,2]) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2} & +2+2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



# Situazione del movimento

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

Posizione iniziale del braccio: $\{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\}$

Angoli iniziali $\{\alpha, \beta\}$ : $\{45, 45\}$

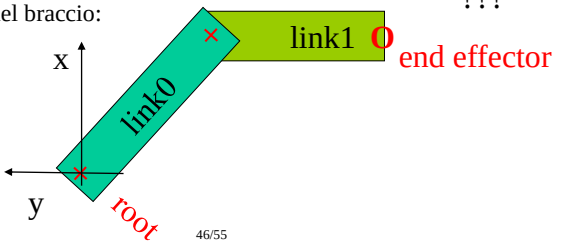
Posizione finale desiderata del braccio: $\{2, -2\}$

Spostamento desiderato del braccio: $\{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Angoli finali del braccio associate alla posizione finale desiderata: $\{90, 0\}$

Posizione finale raggiunta: ???

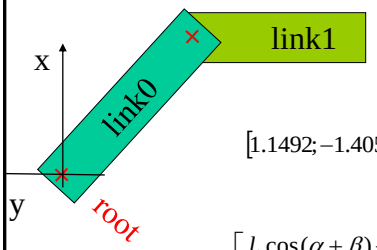
Spostamento del braccio:



# Calcolo di [Δα, dβ]

$$\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}81.028\\ -57.2958\end{bmatrix}_{gradi}$$

Angoli iniziali: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $\{\Delta Px\ \Delta Py\} = \{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$




$W_{fin} = \{45 + 81.028; 45 - 57.2958\} = \{126.028; -12.2958\}$

Angoli finali desiderati: {90, 0}

Posizione iniziale: $\{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\}$

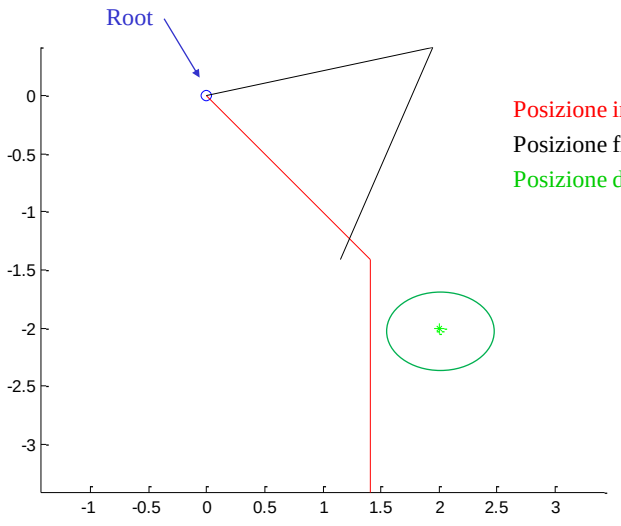
$[1.1492; -1.4050]$

Posizione finale ottenuta: {1.1492, -1.4050}

$$^{e}P = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*(-0.4025)+2*0.9771 \\ -2*0.9154-2*(-0.2130) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1492 \\ -1.4050 \end{bmatrix}$$



# Rappresentazione grafica




Posizione iniziale

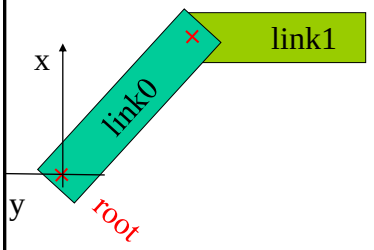
Posizione finale

Posizione desiderata end_point

# Verifica della soluzione

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\end{bmatrix} = J \begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2-\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}-2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

J(**[45,45],[2,2]**)




$$\begin{bmatrix}2-\sqrt{2}\\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

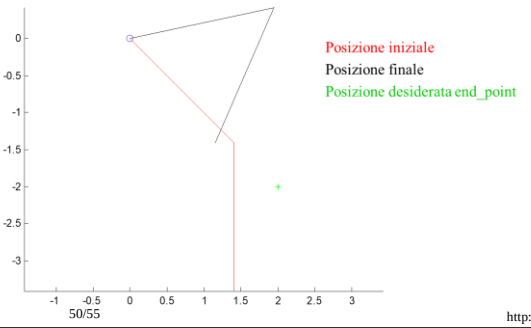
Spostamento desiderato del braccio

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P = \{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$



# Situazione del movimento

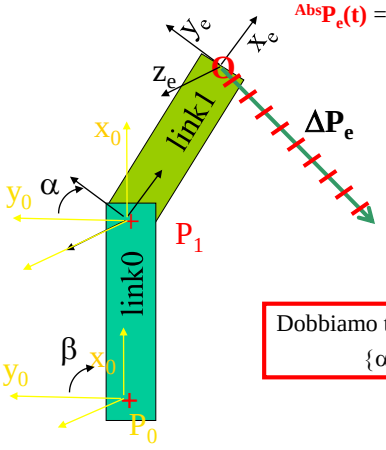
| | |
|---|---|
| Posizione iniziale del braccio: | $\{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\}$ |
| Angoli iniziali: | {45, 45} |
| Posizione finale desiderata del braccio: | {2, -2} |
| Spostamento desiderato del braccio: | $\{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ |
| Angoli finali del braccio (non noti all'inizio): | {90, 0} |
| **Posizione finale raggiunta:** | {1.1492, -1.4050} |
| **Angoli finali prodotti:** | {126.028; -12.2958} |



# Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}Pe_e(t)$




$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:

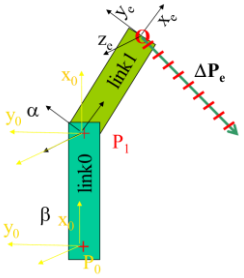
$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!



# Perchè questa differenza?




$\mathbf{\Delta P_e(t) = J(W(t), L)\Delta W(t)}$ La linearizzazione introduce un errore. Questo errore è tanto più piccolo tanto più è piccolo $\Delta P_e(t)$

La soluzione può introdurre un errore nel caso di sistemi sovradeterminati.

# Caso indeterminato

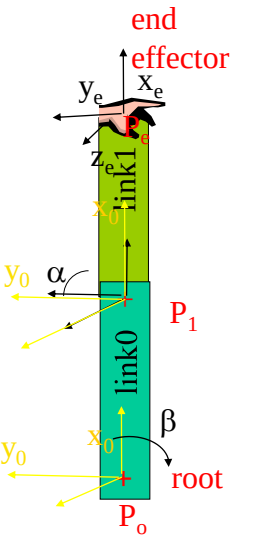
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\quad W_k = [0, 0]$

$$J([0,0],[2,2]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L})\Delta W$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$




**Det (J(.)) = 0** **Sistema indeterminato**

$P\text{-}P_x = 0$

$P\text{-}P_y = -l_0\alpha - (l_0+l_1)\beta$ ⟶

$P\text{-}P_x = 0$

$\alpha = \alpha \quad \beta = [(P\text{-}P_y) + l_0\alpha] / -(l_0+l_1)$



# Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo $w_{ini}$ e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico $\Delta P_k$ dalla posizione corrente verso la posizione finale di ${}^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, $w_k$.
3) Calcolo, attraverso $J_k^{-1}$, il valore $\Delta w_k$ associato ($\Delta w_k = J_k^{-1}\Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:
   ${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, ${}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a $P_{finale}$.

# Riassunto

- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi