



La cinematica Inversa ed il Jacobiano



Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.



Riassunto



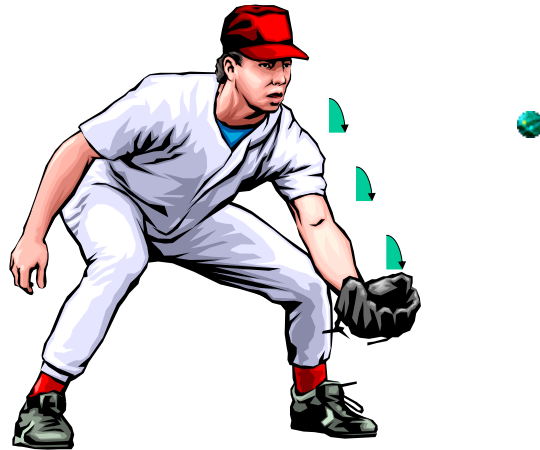
- **Introduzione alla cinematica inversa**
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi



La cinematica diretta



Dagli angoli (relativi) alla posizione (e orientamento) della mano



A.A. 2025-2026

3/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

3



La cinematica inversa



Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.



Problema sotto-determinato (under-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?

A.A. 2025-2026

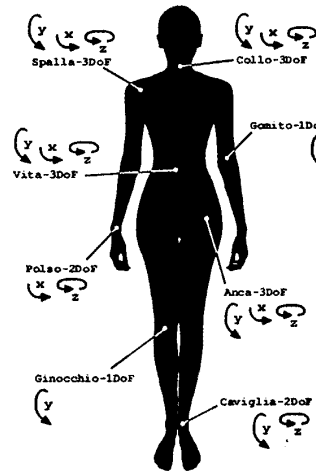
4/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

4



Cinematica inversa e scheletro



∞ soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

5



Cinematica diretta

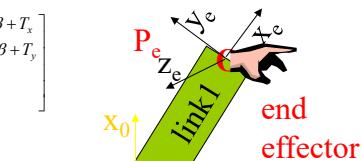


Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base creando un'unica matrice di trasformazione A.

A è funzione di:

- Geometria
- Parametri liberi

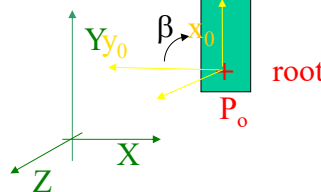
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}{}_{P0_ABS}A \quad {}^{P0_ABS}{}_{P0_10}A \quad {}^{P0_10}{}_{P1_10}A \quad {}^{P1_10}{}_{P1_11}A \quad {}^{P1_11}{}_eA] eP$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}{}_{P0_ABS}A(T) \quad {}^{P0_ABS}{}_{P0_10}A(\beta) \quad {}^{P0_10}{}_{P1_10}A(l_0) \quad {}^{P1_10}{}_{P1_11}A(\alpha) \quad {}^{P1_11}{}_eA(l_1)] eP$$



6

Cinematica diretta

Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.
 $AbsP_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^e A(t) {}^e P_e(t_0)$

$$AbsP_e(t) = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha(t) + l_0) \cos \beta(t) - l_1 \sin \alpha(t) \sin \beta(t) & + T_x(t) \\ -(l_1 \cos \alpha(t) + l_0) \sin \beta(t) - l_1 \sin \alpha(t) \cos \beta(t) & + T_y(t) \\ 0 & \\ 1 & \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
 $\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F(l_0, l_1, P_e(t_0))$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

A.A. 2025-2026 7/57 http://borgnese.di.unimi.it

7

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

$$Abs_AbsP = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Abs_AbsP(t) = {}^{Abs_Abs} A(t) {}^e P$$

$$Abs_AbsP_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

$$Abs_AbsP_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

$$Abs_AbsP_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$$

A.A. 2025-2026 8/57 http://borgnese.di.unimi.it

8



Riassunto



- Introduzione alla cinematica inversa
- **Il Jacobiano**
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi



Linearizzazione – 1 variabile

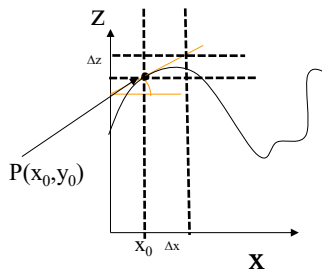


$$z_0 = f(x_0)$$

$$dz = \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=x_0} dx^2 + \dots$$

$$z - z_0 = \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} dx \Rightarrow z = mx + q$$

$$dy = f'(x_0) dx$$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di $P(x_0, z_0)$.
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili ($\mathbf{P}(\mathbf{t}) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$)?

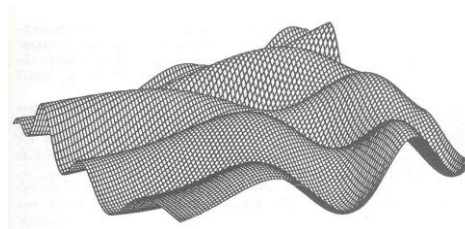
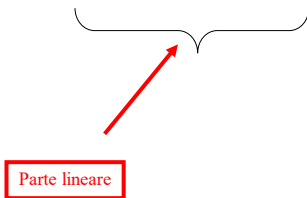


Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili



$z = f(x,y)$ Superficie nello spazio 3D

$$z - z_0 = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P=P_0} dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P=P_0} dy + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{P=P_0} dx^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{P=P_0} dx dy + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{P=P_0} dy^2 \right) + \dots$$



11

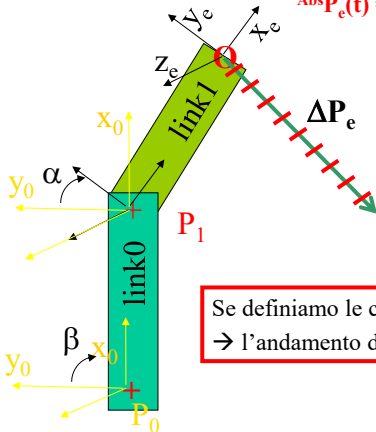


Approssimazione alle differenze finite



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$${}^{Abs}P_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^e A(t) {}^e P_{e_c}(t)$$



$${}^{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se definiamo le curve di spostamento dei nostri end-point: Δp_e
 \rightarrow l'andamento dei parametri liberi $\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, P_e(t))$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

12



Sistema di equazioni lineari



Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$P_x(\mathbf{t}) = f_x(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$P_y(\mathbf{t}) = f_y(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$P_z(\mathbf{t}) = f_z(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

Chiamiamo $\mathbf{W}_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k .

		$\Delta\alpha_k$	$\Delta\beta_k$	ΔT_{xk}	ΔT_{yk}
ΔP_{xk}	$P_x - P_{xk} = \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \Big _{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \Big _{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \Big _{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{xk}) + \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \Big _{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{yk})$				
ΔP_{yk}	$P_y - P_{yk} = \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \Big _{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \Big _{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \Big _{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{xk}) + \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \Big _{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{yk})$				
ΔP_{zk}	$P_z - P_{zk} = \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \Big _{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \Big _{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \Big _{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{xk}) + \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \Big _{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{yk})$				



Il Jacobiano



Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$P_x(\mathbf{t}) = f_x(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$P_y(\mathbf{t}) = f_y(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$P_z(\mathbf{t}) = f_z(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}) | l_0, l_1).$$

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{W}$$

Chiamiamo $\mathbf{W}_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k .

$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x - P_{xk} \\ P_y - P_{yk} \\ P_z - P_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \\ \dots \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{W}$$



Caratteristiche del Jacobiano



$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Contiene le derivate parziali di $f(\cdot)$ rispetto a tutti i parametri liberi.

Le derivate sono calcolate nel “punto di lavoro”.

L'**espressione analitica** di J vale \forall valore dei parametri liberi, $\{\mathbf{w}\}$, ma il **valore assunto** da J varia in funzione dei parametri liberi.

A.A. 2025-2026

15/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

15



Osservazioni sul Jacobiano



$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t}_k) \qquad \Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t}_k) = \mathbf{J}(\mathbf{W}(\mathbf{t}_k), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}(\mathbf{t}_k) \qquad \Delta \mathbf{W}(\mathbf{t}_k)$$

Chiamiamo $\mathbf{W}_k(\mathbf{t}) = [(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t))]$ il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' una rappresentazione implicita (differenziale) del movimento

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parametri liberi a quello dell'end-point: $\Delta \mathbf{W}(\mathbf{t}) \rightarrow \Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t})$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

A.A. 2025-2026

16/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

16



Riassunto



- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- **I sistemi lineari**
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi



Sistema lineare



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

.....

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$$

$\{a_{ij}\}$ – coefficienti in numero $N \times M$

$\{x_j\}$ – incognite, N

$\{b_j\}$ – termini noti, M

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

Esempio:

$$3x_1 + 2x_2 + \dots + 4x_N = 5$$

$$4x_1 - 2x_2 + \dots + 0.5x_N = 3$$

.....

$$2x_1 + 3x_2 + \dots - 3x_N = -1$$

$$J\Delta W = \Delta P$$

$$A x = b$$

$M \times 1$

Vettore dei termini noti

$M \times N$
(Matrice di disegno)

Vettore delle incognite

$\{x_j\}$ soddisfano tutte le equazioni



Matrice inversa



Viene definita per matrici **quadrate** ($N \times N$):

$$A^{-1}A = I$$

Esiste ed è unica se $\det(A) \neq 0$.

Inv(A) è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna per il loro complemento algebrico (formula di Leibniz).

$$Ax = b \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \rightarrow Ix = A^{-1}b \rightarrow \boxed{x = A^{-1}b}$$



Risoluzione di un sistema 2x2



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = Ax \\ x = A^{-1}y \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$



Riassunto



- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- **Esempi di Jacobiano**
- Determinazione dei parametri liberi



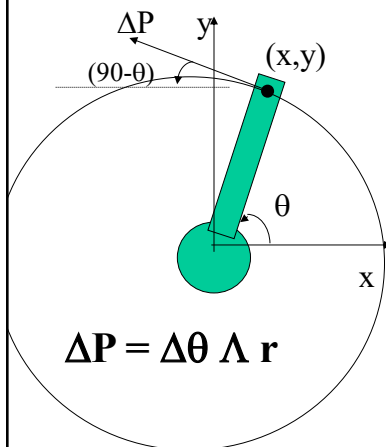
Rotazione semplice – cinematica diretta



$$x(t) = r \cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r \sin(\theta(t))$$

Cinematica inversa: $\theta(t) = f\{x(t), y(t)\}$



$$\Delta \mathbf{P} = \Delta \theta \wedge \mathbf{r}$$

Linearizzazione

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \Delta \theta$$

Sono due espressioni equivalenti $\forall k$

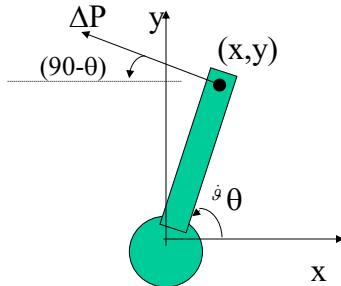


Utilizzo del Jacobiano



$$x(t) = r \cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r \sin(\theta(t))$$



$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix}_{\theta = \theta_k} \Delta \theta$$

$$\Delta \mathbf{P} = \Delta \theta \mathbf{\Lambda} \mathbf{r} \longrightarrow \Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Delta \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \Delta \theta \\ x \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \Delta \theta \\ r \cos \theta \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

A.A. 2025-2026

23/57

<http://borgese.di.unimi.it>

23

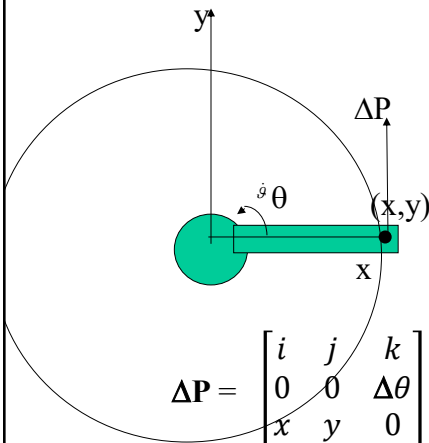


Esempio di Jacobiano e approssimazione



$$x(t) = r \cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r \sin(\theta(t))$$



$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix}_{\theta = \theta_k} \Delta \theta$$

$$\theta_k = 0$$

Mi sposto solo lungo y!

$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Delta \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \Delta \theta \\ x \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin 0 \Delta \theta \\ r \cos 0 \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

A.A. 2025-2026

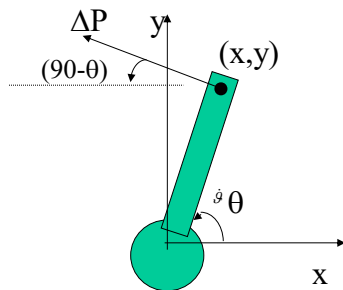
24/57

<http://borgese.di.unimi.it>

24

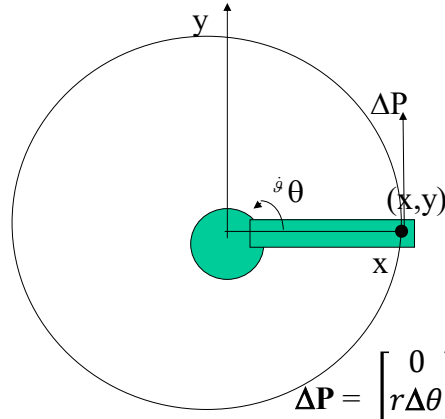


Determino la cinematica inversa con il Jacobiano



$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \Delta \theta \\ r \cos \theta \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta P_y}{r \cos \theta} = \frac{-\Delta P_x}{r \sin \theta}$$



$$\theta_k = 0$$

$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta P_y}{r}$$

A.A. 2025-2026

25/57

<http://borgese.di.unimi.it>

25

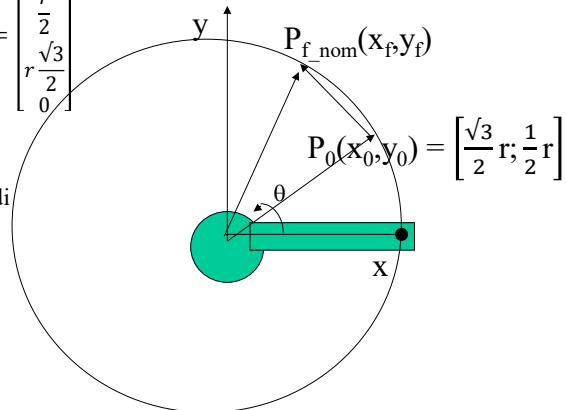


Errore indotto dalla linearizzazione nella cinematica diretta



$$\mathbf{P}_{f_nom} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \frac{1}{2} \\ r \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ruota da $\theta = 30$ gradi a $\theta = 60$ gradi
 $\Delta \theta = 30$ gradi = $\pi/6$



Spostamento ottenuto, $\Delta \mathbf{P}$:

$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \Delta \theta \\ r \cos \theta \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \\ r \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{12} r \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{12} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

A.A. 2025-2026

26/57

<http://borgese.di.unimi.it>

26



Errore indotto dalla linearizzazione nella cinematica diretta



$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \Delta \theta \\ r \cos \theta \Delta \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{12} r \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{12} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_i + \Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) r \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right) r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{f_nom}(x_f, y_f) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \\ r \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} r \\ \frac{1}{2} r \end{bmatrix}$$

$$\text{Errore} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_{f_nom} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\right) r \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r \\ 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \left(\frac{(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{\pi}{12}\right) r \\ \left(\frac{(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right) r \\ 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} +0,104r \\ +0,188r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Errore che si commette muovendosi sulla tangente in P_0 invece che lungo la corda della circonferenza

A.A. 2025-2026

27/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

27



Cinematica diretta del braccio



$$\mathbf{P0_ABSP} = {}^{ABS_ABS} \mathbf{A} \mathbf{P0_L0P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta + T_x \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{ABS_ABS} \mathbf{P}_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}^{ABS_ABS} \mathbf{P}_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}^{ABS_ABS} \mathbf{P}_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

A.A. 2025-2026

28/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

28

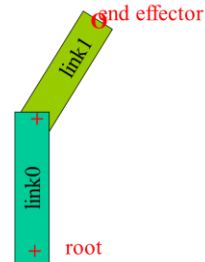


La matrice di trasformazione



$$\Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t}_k) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} & \dots \end{bmatrix} \Delta \mathbf{W}(\mathbf{t}_k)$$

J



A.A. 2025-2026

29/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

29



Il Jacobiano dell'esempio - Px



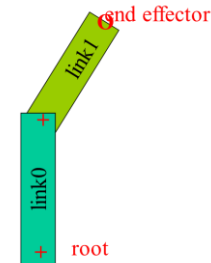
$$\text{ABS_ABS P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Px}{\partial \alpha} = -l_1 \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\partial Px}{\partial \beta} = -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin(\beta)$$

$$\frac{\partial Px}{\partial T_x} = 1$$

$$\frac{\partial Px}{\partial T_y} = 0$$



A.A. 2025-2026

30/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

30



Il Jacobiano dell'esempio - Py



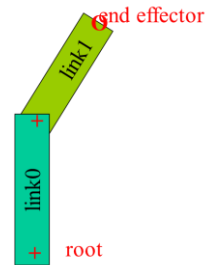
$$\text{ABS_ABS}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Py}{d\alpha} = -l_1 \cos(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\partial Py}{d\beta} = -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos(\beta)$$

$$\frac{\partial Py}{dT_x} = 0$$

$$\frac{\partial Py}{dT_y} = 1$$



31



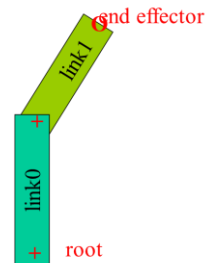
Il Jacobiano dell'esempio



$$\text{ABS_ABS}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano varia al variare dei parametri liberi
(punto di Lavoro)



32



Osservazioni sul Jacobiano



$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \dots \\ \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \Big|_{\mathbf{w}_k} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \dots \end{bmatrix}$$

$\Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t}_k) = \mathbf{J}(\mathbf{W}(\mathbf{t}), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}(\mathbf{t}_k)$

$$\Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t}) = \mathbf{J}(\mathbf{W}(\mathbf{t}), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}(\mathbf{t})$$

Chiamiamo $\mathbf{W}_k(\mathbf{t}) = \{(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), T_x(\mathbf{t}), T_y(\mathbf{t}))\}$ il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parametri liberi a quello dell'end-point: $\Delta \mathbf{W}(\mathbf{t}) \rightarrow \Delta \mathbf{P}_e(\mathbf{t})$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

A.A. 2025-2026

33/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

33



Spostamento: caso particolare - I

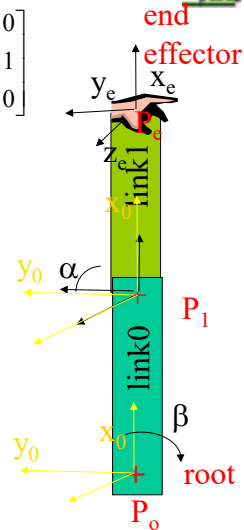
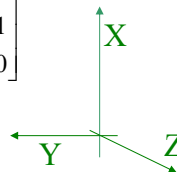


$$\mathbf{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$$\mathbf{W}_k = \{0, 0, T_{x_k}, T_{y_k}\}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}_k, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



A.A. 2025-2026

34/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

34



Spostamento: caso particolare - II



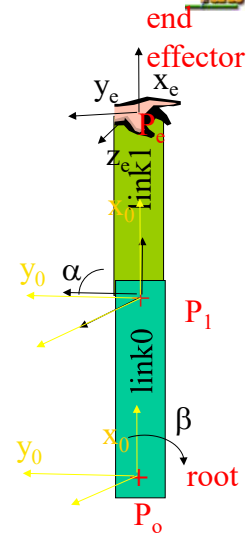
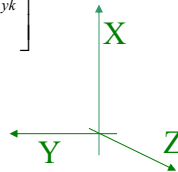
Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$$J(\mathbf{W}_k, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P}_e = J(\mathbf{W}_k(t), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_x \\ -l_0 \Delta \alpha - (l_0 + l_1) \Delta \beta + \Delta T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$



Mi sposto solo lungo Y

A.A. 2025-2026

35/57

<http://borgese.di.unimi.it>

35

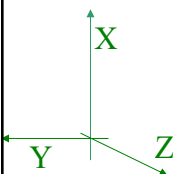


Caso semplificato

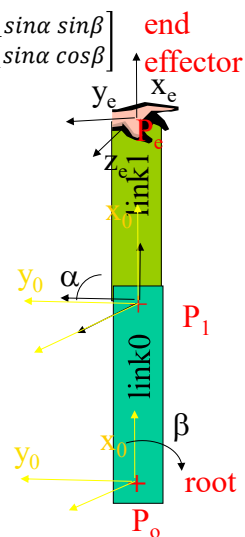


Elimino 2 gradi di libert : T_x e T_y e considero solamente il movimento sul piano x, y .

$$\mathbf{P0_ABS} \mathbf{P} = {}^{\text{ABS}}_e \mathbf{A} \mathbf{P0_L0} \mathbf{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta & -l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta & -l_1 \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$



La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.



A.A. 2025-2026

36/57

<http://borgese.di.unimi.it>

36



Il Jacobiano dell'esempio semplificato



$${}^{ABS_ABS}_e \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta & -l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta & -l_1 \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$

A.A. 2025-2026

37/57

<http://borgese.di.unimi.it>

37



Non tutti gli spostamenti sono possibili



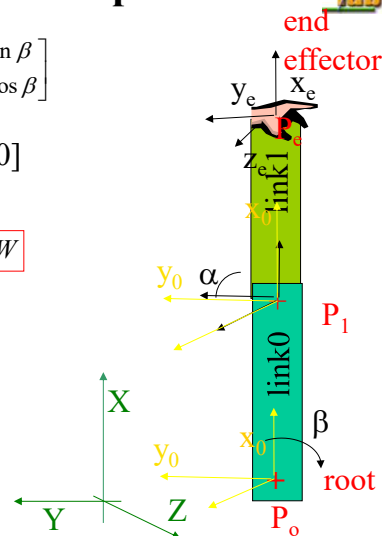
$$\mathbf{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\mathbf{W}_k = [0, 0]$

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}_k, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{P}_e = \mathbf{J}(\mathbf{W}_k(t), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \Delta \alpha + (-l_0 + l_1) \Delta \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$




E' possibile spostarsi solamente in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per $\alpha = \beta = 0$

A.A. 202:


.it

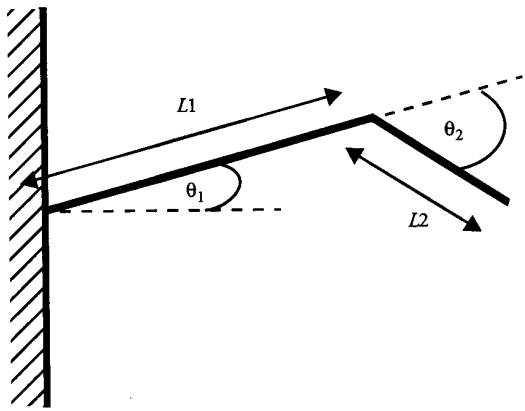
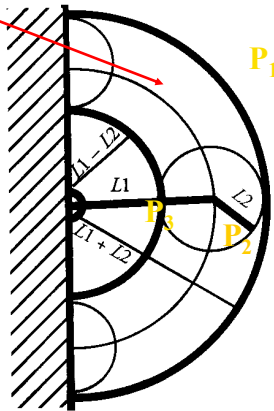
38



Soluzione diretta

Working space







Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \|P\| \leq L_1 + L_2$


Possibili configurazioni:
 P₁ - nessuna soluzione.
 P₂ - due soluzioni.
 P₃ - una soluzione.

A.A. 2025-2026
39/57
<http://borgnese.di.unimi.it>

39



Riassunto



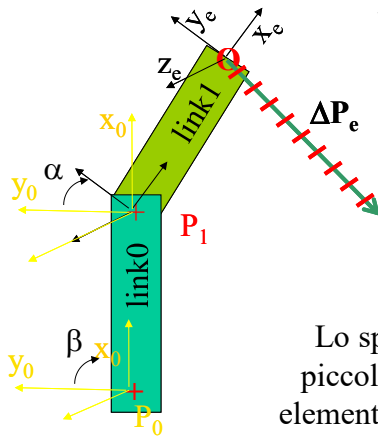
- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- **Determinazione dei parametri liberi**

A.A. 2025-2026
40/57
<http://borgnese.di.unimi.it>

40



Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.
Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare o la traslazione richiesta per **tutti i joint**. Lavoriamo sulle variazioni (differenziale).



Determinazione delle variazioni dei parametri liberi



$$\Delta P_e(t) = J(W(t), L) \Delta W(t) \quad \text{E' un sistema lineare}$$

$$b = A \quad X$$

b – vettore degli spostamenti desiderati dell'end-point (che vengono forniti dal sistema di controllo)

X – vettore delle variazioni richieste dei parametri liberi (che non conosciamo)

A – matrice di disegno del problema (che conosciamo se conosciamo la posizione attuale dello scheletro). $A = J(\cdot)$ vale in un intorno di questa posizione.

La soluzione del sistema lineare è: $X = A^{-1} b$

$$\Delta W(t) = J(W(t), L)^{-1} \Delta P_e(t)$$



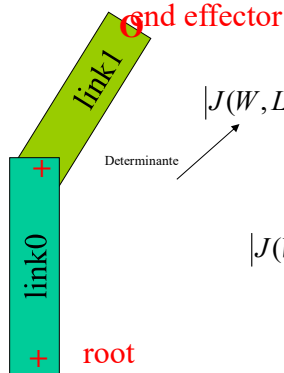
Il Jacobiano dell'esempio semplificato: determinante



$${}^{ABS_ABS}_e \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta & -l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta & -l_1 \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{P}_e = J(\mathbf{W}_k(t), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}$$

Consideriamo il caso piano (x,y) e $T_x \equiv T_y \equiv 0$ e coordinate non omogenee.

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$



Determinante

$$|J(W, L)| = l^2_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + l_0 l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l^2_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) - l_0 l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$|J(W, L)| = l_0 l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l_0 l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

A.A. 2025-2026

43/57

<http://borgese.di.unimi.it>

43

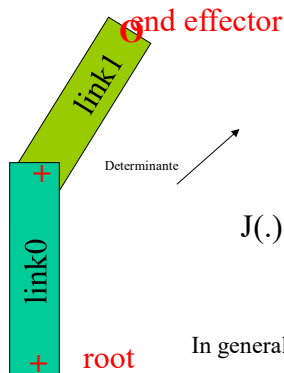


Condizioni di singolarità



$$|J(W, L)| = l^2_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + l_0 l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l^2_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) - l_0 l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$|J(W, L)| = l_0 l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l_0 l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$



Determinante

$$J(\cdot) \neq 0 \begin{cases} \alpha + \beta \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases}$$

$$J(\cdot) \neq 0 \begin{cases} \alpha + \beta \neq 90 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases}$$

In generale, $\alpha \neq 0 \pm 180$. Definisce la frontiera dello spazio di lavoro

A.A. 2025-2026

44/57

<http://borgese.di.unimi.it>

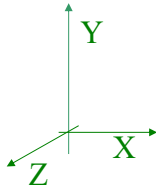
44



Inverso del Jacobiano dell'esempio semplificato

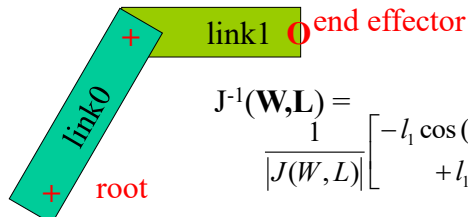


Caso particolare: $\alpha = \beta = 45^\circ$ - $l_0 = l_1 = 2$



$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$|J(\mathbf{W}, \mathbf{L})| = l_0 l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l_0 l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$



$$J^{-1}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \frac{1}{|J(\mathbf{W}, \mathbf{L})|} \begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & +l_1 \sin(\alpha + \beta) + l_0 \sin \beta \\ +l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

A.A. 2025-2026

45/57

http://borgese.di.unimi.it

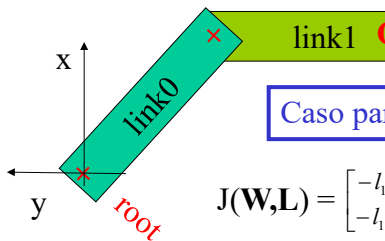
45



Il Jacobiano: determinante – caso particolare



$${}^{ABS_ABS} \mathbf{e} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Consideriamo il caso piano e $T_x \equiv T_y \equiv 0$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45^\circ$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P}_e = J(\mathbf{W}_k(t), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}$$

$$J([45, 45], [2, 2]) = \begin{bmatrix} -2 & -2 - \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = 2\sqrt{2}$$

A.A. 2025-2026

46/57

http://borgese.di.unimi.it

46

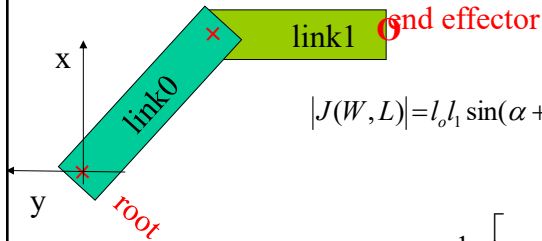


Inverso del Jacobiano: caso particolare



Caso particolare: $\alpha = \beta = 45^\circ$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J^{-1}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \frac{1}{|J(\mathbf{W}, \mathbf{L})|} \begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta & +l_1 \sin(\alpha + \beta) + l_0 \sin \beta \\ +l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$



$$|J(\mathbf{W}, \mathbf{L})| = l_0 l_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta) - l_0 l_1 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$J^{-1}([45, 45], [2, 2]) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2} & +2+2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -2\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

A.A. 2025-2026

47/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

47



Situazione del movimento

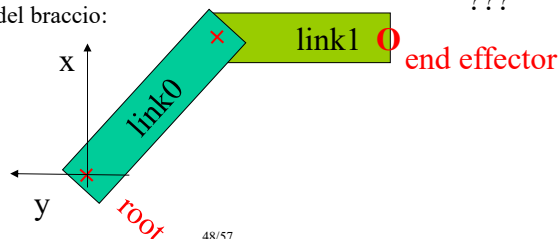


Caso particolare: $\alpha = \beta = 45^\circ$ - $l_0 = l_1 = 2$

Posizione iniziale del braccio: $\{\sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$
 Angoli iniziali $\{\alpha, \beta\}$: $\{45, 45\}$

Posizione finale desiderata del braccio: $\{2, -2\}$
 Spostamento desiderato del braccio: $\{2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
 Angoli finali del braccio associate alla posizione finale desiderata: $\{90, 0\}$

Posizione finale raggiunta: ???
 Spostamento del braccio: ???



A.A. 2025-2026

48/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

48

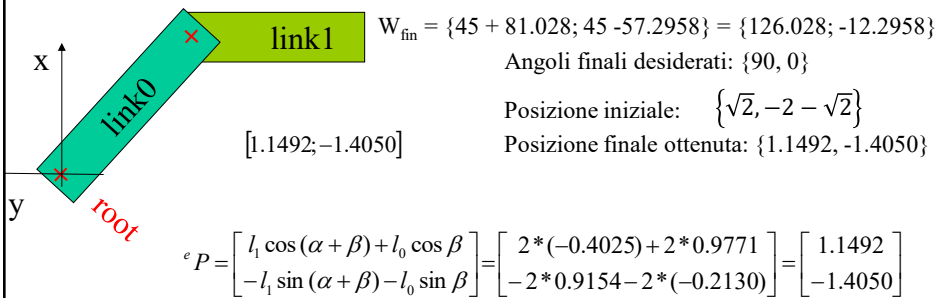


Calcolo di $[\Delta\alpha, d\beta]$



$$\begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}_{\text{radianti}} = \begin{bmatrix} 81.028 \\ -57.2958 \end{bmatrix}_{\text{gradi}}$$

Angoli iniziali: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $\{\Delta Px \Delta Py\} = \{2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$



A.A. 2025-2026

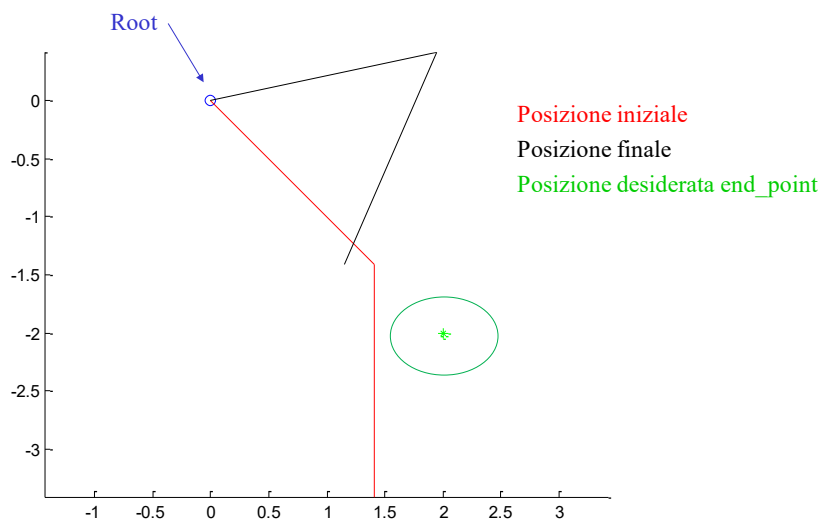
49/57

<http://borgese.di.unimi.it>

49



Rappresentazione grafica



A.A. 2025-2026

50/57

<http://borgese.di.unimi.it>

50

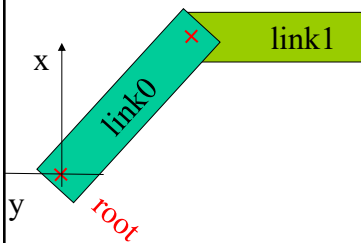


Verifica della soluzione



$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}_{\text{radianti}} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}+2+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$J([45,45],[2,2])$$



$$\begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ + \sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

Spostamento desiderato del braccio

$$\text{Caso particolare: } \alpha = \beta = 45 \quad - \quad l_0 = l_1 = 2 \quad \Delta P = \{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

A.A. 2025-2026

51/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

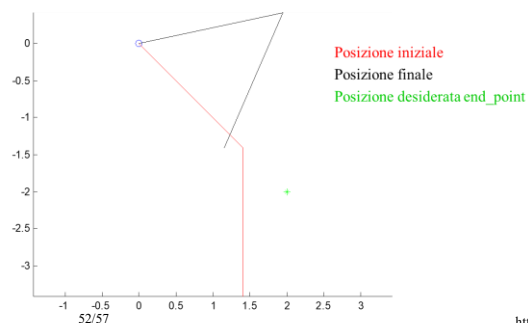
51



Situazione del movimento



Posizione iniziale del braccio:	$\{\sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$
Angoli iniziali:	$\{45, 45\}$
Posizione finale desiderata del braccio:	$\{2, -2\}$
Spostamento desiderato del braccio:	$\{2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
Angoli finali del braccio (non noti all'inizio):	$\{90, 0\}$
Posizione finale raggiunta:	$\{1.1492, -1.4050\}$
Angoli finali prodotti:	$\{126.028; -12.2958\}$



A.A. 2025-2026

52/57

<http://borgnese.di.unimi.it>

52

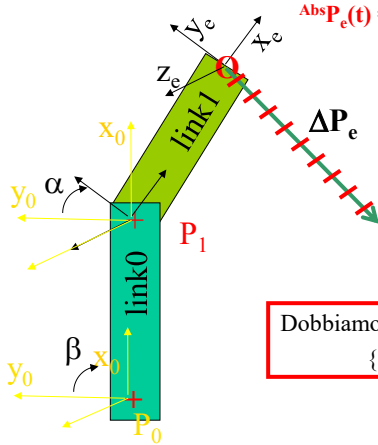


Soluzione differenziale



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$${}^{Abs}P_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^eA(t) {}^eP_e(t)$$



$${}^{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:

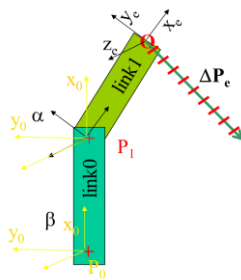
$$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, P_e(t))$$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!



Perchè questa differenza?



$\Delta P_e(t) = J(W(t), L)\Delta W(t)$ La linearizzazione introduce un errore. Questo errore è tanto più piccolo tanto più è piccolo $\Delta P_e(t)$

La soluzione può introdurre un errore nel caso di sistemi sovradeterminati.



Caso indeterminato



$$J(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ -l_1 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \cos(\alpha + \beta) - l_0 \cos \beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\mathbf{W}_k = [0, 0]$

$$J([0,0],[2,2]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{P}_e = J(\mathbf{W}_k(t), \mathbf{L}) \Delta \mathbf{W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

Det (J(.)) = 0 Sistema indeterminato

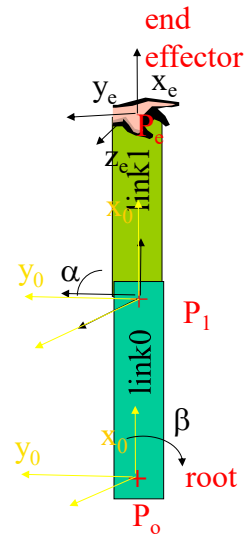
$$P - P_x = 0$$

$$P - P_y = -l_0 \alpha - (l_0 + l_1) \beta$$



$$P - P_x = 0$$

$$\alpha = \alpha \quad \beta = [(P - P_y) + l_0 \alpha] / -(l_0 + l_1)$$



Cinematica inversa



Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

- 1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di eP .
- 2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k .
- 3) Calcolo, attraverso J_k^{-1} , il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
- 4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
- 5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell'end point:

$${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L). \text{ In generale, } {}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k.$$

Fino a quando non arriva a P_{finale} .



Riassunto



- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Esempi di Jacobiano
- Determinazione dei parametri liberi