Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso dei joint

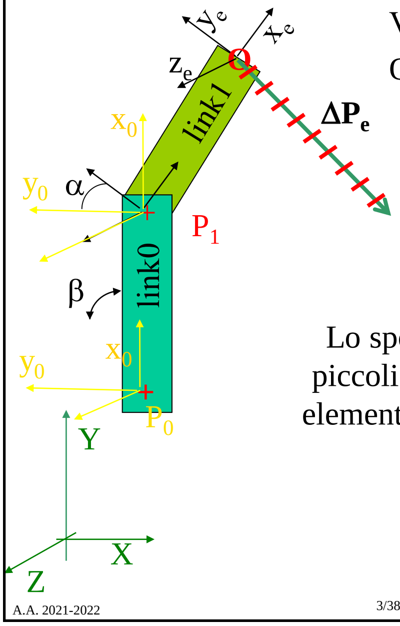
Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Cinematica inversa

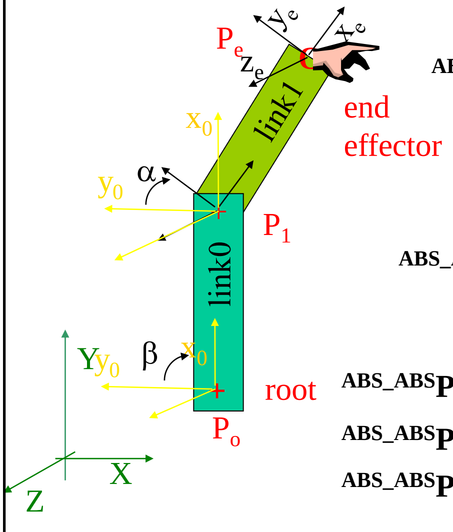


Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

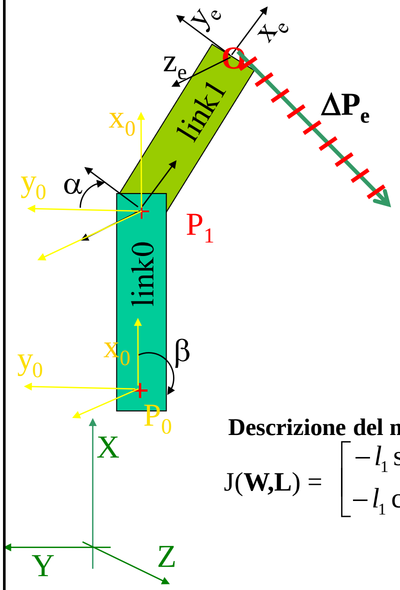
$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A(t)} \quad {}^{e}\mathbf{P}
$$

$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\,(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)
$$

$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\,(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)
$$

$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\,(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)
$$

Cinematica inversa



Consideriamo la trasformazione end_point -> joint.

La trasformazione joint -> end_point è:

P(t) = $f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\ (\mathbf{t}) = \mathbf{f}_x(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\ (\mathbf{t}) = \mathbf{f}_y(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\ (\mathbf{t}) = \mathbf{f}_z(\alpha(\mathbf{t}), \beta(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$

$$^{\mathbf{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descrizione del movimento alle differenze finite

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_e = J\ \Delta W$$

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $^eP_{ini} = f(w, L)$

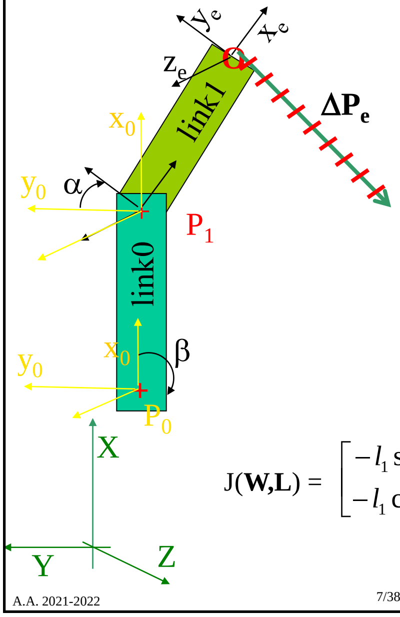
Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ^eP.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso J_k^{-1}, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1}\, \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

    $^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, $^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Sistema sottodeterminato



Sono 2 equazioni in 4 incognite

End point: $dP_e=\{X_e,Y_e\}$: 2 dof

Parametri di controllo:

- dα
- dβ
- dT_x
- dT_y

Esistono ∞^2 modi di spostare l'end-point e ottenere dP_e

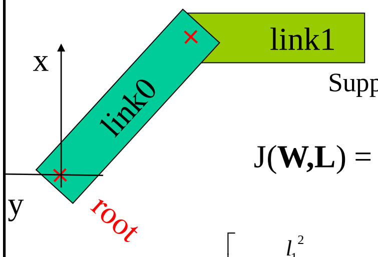
Quale scegliamo?

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 2, n = 4)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \begin{bmatrix} dP_{e_x}/dt \\ dP_{e_y}/dt \end{bmatrix} \; 2 \times 1 \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ dT_x/dt \\ dT_y/dt \end{bmatrix} \; 4 \times 1$$



Supponiamo: α = β = 45° / $T_x = T_y = 0$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1-l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

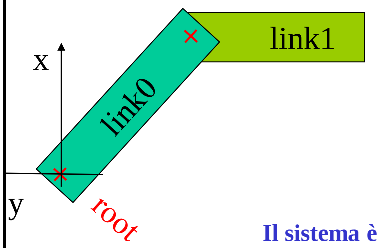
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2+l_1l_o\sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2+l_1l_o\sin 45 & l_1^2+l_o/2+2l_1l_o\sin 45+l_o^2/2 & -l_1-l_0\sin 45 & -l_0\cos 45 \\ -l_1 & -l_1-l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

$\det(J^T * J) = 0$



Il sistema è indeterminato, ammette inifinite soluzioni.

Voglio poterne determinare una secondo un qualche criterio ragionevole.

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Decomposizione ai valori singolari

A X = b

JΔW = ΔP$_e$

$$\mathbf{U^T\, W\, V\, X = b}$$

Ortonormale M x N
Determinante = 1

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N
Determinante = 1

Singular Value Decomposition

Se A è singolare -> almeno 1 dei $w_{ii} = 0$.

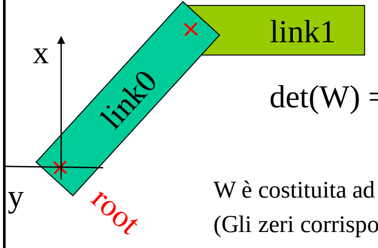
Soluzione indeterminata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T * J) = 0$

$\cancel{x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b}$



$\det(W) = 0$

Applico la SVD a J

$(U^T\, W\, V) = J$

W è costituita ad esempio così:
(Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli)

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x = (V' \cancel{W}^{-1} U)\, J^T\, b}}$$

Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$\Delta W = (J'^*J)^{-1}J'^* \Delta P_e$ $\boxed{\Delta W = V'^* W^{-1*} U^* \Delta P_e}$

Se J è rank-deficient, J'*J è singolare.

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice diagonale W = diag{wii}.

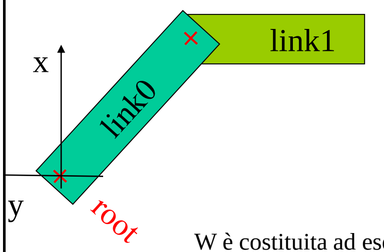
In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

Soluzione indeterminata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T * J) = 0$ $\det(W) = 0$



$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$

$\boxed{\Delta w = (V'^* W^{-1*} U) * \Delta P}$

W è costituita ad esempio così:
Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione

Soluzione (m=2, n=4)

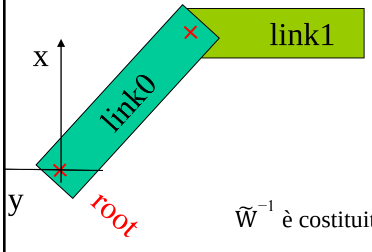
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

det(W) = 0

$\cancel{\Delta w = (V' W^{-1} * U) * \Delta P}$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$\boxed{x = V' \tilde{W}^{-1} U J^T b}$

$\tilde{W}^{-1}$ è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Se $w_{ii} = 0$ ➔ $1/w_{ii} = 0$

Gli zeri sulla diagonale corrispondono ai valori singolari nulli.

Soluzione (m=2, n=4)

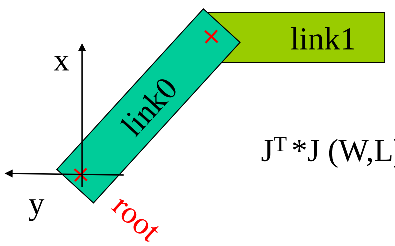
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cancel{x = V' W^{-1} U b}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{ex} = 1$ $\Delta P_{ey} = 0$

$\det(J^T * J) = 0$



$$J^T * J\,(W,L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2 \qquad \Delta P_{e_x} = 1 \; \Delta P_{e_y} = 0$

$\boxed{\cancel{\mathbf{x = V' W^{-1} U b}}}$

$>>[U' \; W \; V] = \mathrm{svd}(J^T J)$

$\det(J^T * J) = 0$

U' =

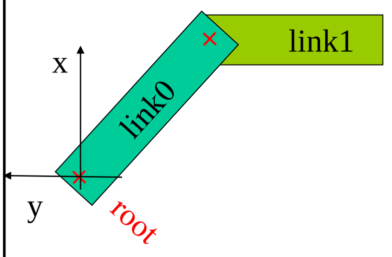
-0.4469	0.5005	-0.7398	0.0497
-0.8633	-0.2591	0.3622	0.2375
0.2234	-0.2502	-0.2432	0.9101
0.0710	0.7873	0.5122	0.3359

W =

18.1915	0	0	0
0	1.4653	0	0
0	0	0.0000	0
0	0	0	0.0000

V =

-0.4469	0.5005	0.7407	0.0336
-0.8633	-0.2591	-0.3333	-0.2766
0.2234	-0.2502	0.3436	-0.8771
0.0710	0.7873	-0.4713	-0.3911



Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

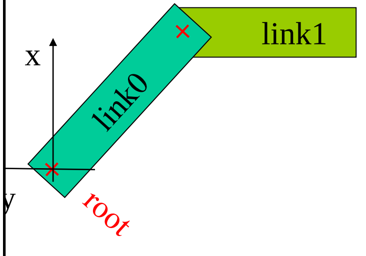
$l_0 = l_1 = 2 \qquad \Delta P_{e_x} = 1 \; \Delta P_{e_y} = 0$

$\boxed{\mathbf{\Delta W = V' \tilde{W}^{-1} U \Delta P_e}}$

$J = \tilde{W}^{-1} =$

0.0550	0	0	0
0	0.6824	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\det(J^T * J) = 0$



$>>\Delta W = V' * \tilde{W}^{-1} * U * \Delta P_e$

$\Delta W =$

-0.2251
-0.1281
0.1125
-0.1811

Norma l^2 pari a 0.1125

Verifica Soluzione

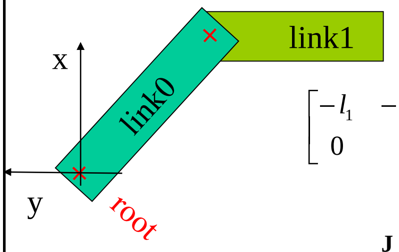
$$J = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$$\boxed{\Delta W = V' \tilde{W}^{-1} U \Delta P_e}$$

Soluzione mediante pseudo-inversa



$J * \Delta w = \Delta P_e$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix}}_{\Delta W} = \underbrace{[1 \ \ 0]^T}_{\Delta P_e}$$

Spostamento ottenuto = spostamento desiderato

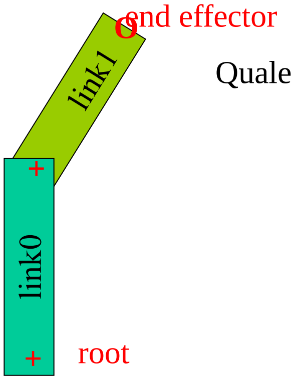
Norma l^2 pari a 0.1125

Utilizzo più o meno con la stessa ampiezza tutti i gradi di libertà

Proprietà della Soluzione

Proprietà: **soluzione a norma minima**

Altre soluzioni possibili (tali per cui Ax = b), si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione



Quale altra soluzione sarebbe possibile per ottenere lo spostamento desiderato: {1 0}?

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P^e_x = 1$ $\Delta P^e_y = 0$

Norma l^2 pari a 1 > 0.1125

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

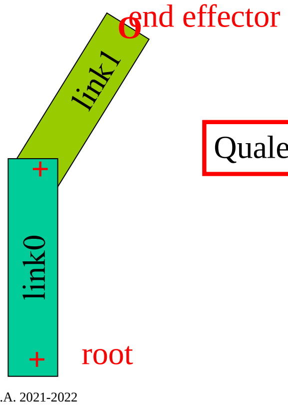
Soluzione mediante pseudo-inversa

$\Delta P_e = J\,\Delta W \quad \Longrightarrow \quad \nu = J\,\Delta W - \Delta P_e$

$\mathbf{J'\,J\,\Delta W = J'\,\Delta P_e} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{(J'\,J)^{-1}\,(J'\,J)\,\Delta W = (J'\,J)^{-1} J'\,\Delta P_e}$

$\Longrightarrow \quad \Downarrow$

$\mathbf{\Delta W = (J'J)^{-1} J'\,\Delta P_e}$



Quale criterio viene soddisfatto da X?

$\min \nu^2 = (\|J\,\Delta W - \Delta P\|)^2$

Come rendere risolubile il sistema

$\nu = J\,\Delta W - \Delta P$ $\min \nu^2 = (\|J\,\Delta W - \Delta P\|)^2$ Soluzione $\|\Delta W\|$ a norma minima

$b - Ax$

Inserisco il vincolo $\|\Delta W\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare.

Il problema si trasforma in un problema di **regolarizzazione**

$$\min (\| J\,\Delta W - dP \|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$$

Dove la norma è intesa in l_2.

$$\min [\, (J\,\Delta W - \Delta P)^2 + \lambda\, (\Delta W)^2 \,]$$

Risulta un funzionale quadratico di ΔW, "facile" da minimizzare

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min (\| J\,\Delta W - \Delta P \|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$$

ΔW penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, $\min (\|J\,\Delta W - \Delta P\|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$

il risultato è relativamente semplice $2[J^T(J\,\Delta W - \Delta P) + \lambda\, \Delta W] = 0$

$$J^T(J\,\Delta W - \Delta P) + \lambda\, \Delta W = 0$$

Da cui risulta:

$$J^T(J\,\Delta W - \Delta P) + \lambda\, I\, \Delta W = 0 \;\Rightarrow\; (J^TJ + \lambda\, I)\, \Delta W - J^T\Delta P = 0$$

$$\boxed{\Delta W = (J^TJ + \lambda\, I)^{-1} J^T\, \Delta P)}$$

Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

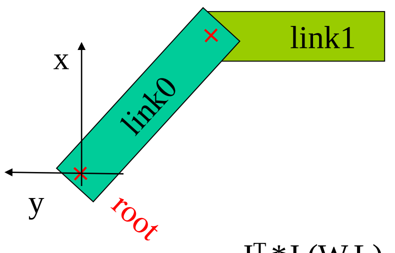
$$\boxed{\Delta W = (J^T J + \lambda\, I)^{-1} J^T\, \Delta P)}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{ex} = 1$ $\Delta P_{ey} = 0$

$\det(J^T * J) = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$



$$J^T * J\ (W,L) + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Esempio regolarizzazione

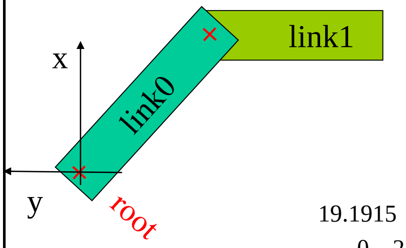
$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{ex} = 1$ $\Delta P_{ey} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$ >>det = 47.3137

Soluzione con regolarizzazione con λ =1



>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>ΔW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

$\det(Ws) \neq 0$

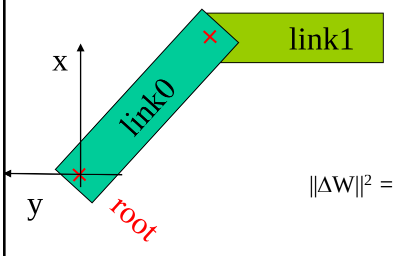
Esempio regolarizzazione - errore

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$ >>det = 47.3137



Soluzione con regolarizzazione con λ =1

>>ΔW =
-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

$\|\Delta W\|^2 = 0.0647$

ΔW =
-0.2251
-0.1281
0.1125
-0.1811

$\Delta P_e = J \Delta W$

$\|\Delta W\|^2 = 0.1125$

>> J ΔW =
0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto $\neq$ spostamento desiderato $\Delta P_e\{1, 0\}$

$\min (\| J \Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda \|\Delta W\|^2)$

Non realizzo dP

"pago" perche' mi muovo (dW)

L'errore ha 2 componenti

Esempio regolarizzazione con ampiezza diversa

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

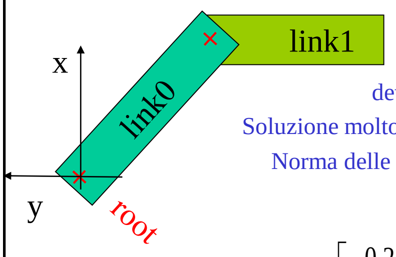
$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U\, b}$

Soluzione con regolarizzazione con λ =0.01

>>ΔW =
-0.2242
-0.1284
0.1121
-0.1798

>>ΔP =
0.9989
0.0018



$\det(J^T * J + \lambda I) = 0.0027$

Soluzione molto vicina a quella non regolarizzata

Norma delle variazioni dei parametri liberi

$\|dW\| = 0.1116$

$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix} = [1\ \ 0]^T$$

ΔW =
-0.2251
-0.1281
0.1125
-0.1811

$\Delta P_e = J \Delta W$

$\|\Delta W\|^2 = 0.1125$

Esempio regolarizzazione con λ =10

$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

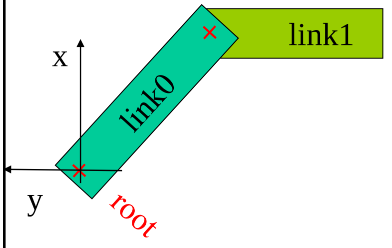
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U\, b}$

Soluzione con regolarizzazione con λ =10



$\det(J^T * J + \lambda I) = 3.32 \times 10^{-4}$

>>ΔW =
-0.0804
-0.1162
0.0402
-0.0149

>>ΔP_e =
0.5978
0.1494

$\|\Delta W\| = 0.0021$

Soluzione non molto lontana da quella non regolarizzata

Norma delle variazioni dei parametri liberi MINORE (costano di più)

Come introdurre un peso diverso sui joint

$\Delta P_e = J\, \Delta W$ min $\| \Delta P_e - J\, \Delta W \|$ $\|\Delta W\|$ a norma minima

Inserisco il vincolo $\|dW\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare e peso il costo sui vari joint in modo differente.

$$\min (\| J\, \Delta W - \Delta P_e \| + \lambda\, C\, \|\Delta W\|)$$

Dove la norma è intesa in l_2 e C è una matrice diagonale

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\min [\, (J\Delta W - \Delta P_e)^2 + \lambda\, C(\Delta W)^2 \,]$$

Risulta un funzionale quadrato di "facile" minimizzazione

2 termini:
- Fedeltà al movimento $\| J\, \Delta W - \Delta P_e \|$
- "utilizzo" dei gradi di libertà $\|\Delta W\|$

Sviluppo della regolarizzazione

$\min (\| J\,\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda\, C \|\Delta W\|^2)$

$d\Theta$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, $\min (\| J\,\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda\, C \|dW\|^2)$

il risultato è relativamente semplice $2[J^T(J\,\Delta W - \Delta P_e) + \lambda\, C\,\Delta W] = 0$

$$J^T(J\,\Delta W - \Delta P_e) + \lambda\, C\, dW = 0$$

Da cui risulta:

$$(J^T J + \lambda\, C)\,\Delta W = J^T\,\Delta P_e$$

$$\boxed{\Delta W = (J^T J + \lambda\, C)^{-1} J^T\,\Delta P_e}$$

Esempio regolarizzazione con pesi

$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{ex} = 1$ $\Delta P_{ey} = 0$

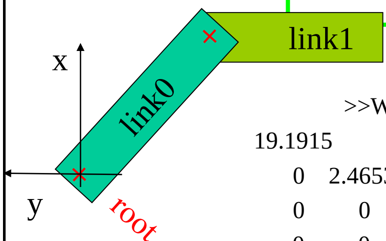
$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = c3 = c4 = 1

$\lambda = 1$

$\det(J^T * J + \lambda\, C) \neq 0$

>>det = 47.3137



Soluzione con regolarizzazione con pesi unitari
C = I

>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>ΔW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>ΔP_e =

0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato

$\|\Delta W\|^2 = 0.0647$

$\min (\| J\Delta W - \Delta P_e \|^2 + \lambda \| \Delta W\|^2)$

Non realizzo ΔP_e

"pago" perche' mi muovo (ΔW)

Esempio regolarizzazione con pesi non uguali

$$J^T{*}J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

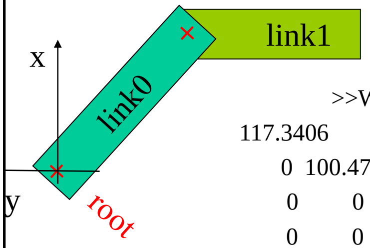
$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: $c1 = c2 = 100$; $c3 = c4 = 1$

$\lambda = 1$

$\det(J^T {*}J + \lambda C) \neq 0$

>>det = 4.3539e+004



Soluzione con regolarizzazione con pesi inferiori applicati alle traslazioni

>>Ws2 =

117.3406	0	0	0
0	100.4701	0	0
0	0	1.9953	0
0	0	0	1.8510

>>ΔW =

-0.0093
-0.0157
0.4639
-0.0111

Utilizzo molto Tx

$||\Delta W||^2 = 0.2156$

>>ΔP_e =

0.5361
0.0111

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato

$\min (|| J\, \Delta W - \Delta P_e ||^2 + \lambda\, ||\Delta W||^2)$

Non realizzo ΔP_e

"pago" perche' mi muovo (ΔW)

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T{*}J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+p_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+p_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+p_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+p_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

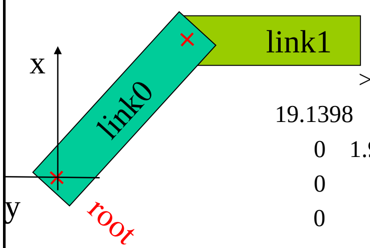
$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: $c1 = c2 = 100$; $c3 = c4 = 1$

$\lambda = 0.01$

$\det(J^T {*}J + \lambda\, C) \neq 0$

>>det = 1.1992



>>Ws2 =

19.1398	0	0	0
0	1.9568	0	0
0	0	0.5185	0
0	0	0	0.0618

>>ΔW

-0.0172
-0.0288
0.8589
-0.0403

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

>> ΔP_e =

0.9914
0.0004

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)

$||\Delta W||^2 = 0.2151$, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti ΔTx e ΔTy

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + \lambda C = \begin{bmatrix} 4+p_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+p_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+p_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+p_4 \end{bmatrix}$$

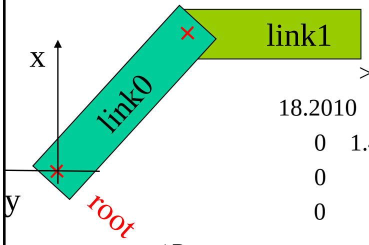
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\det(J^T * J + \lambda C) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = 100; c3 = c4 = 1
$\lambda = 0.00001$

>>det = 1.17×10^{-4}



>>Ws2 =

18.2010	0	0	0
0	1.4686	0	0
0	0	0.0068	0
0	0	0	0.0006

>> ΔW

-0.0173
-0.0290
0.8663
-0.0410

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

>>ΔP_e =
0.9999
0.0000

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto molto vicino)

$||dW||^2 = 0.2170$ Il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 10000 per le componenti ΔTx e ΔTy e per 100 per le componenti $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$.

Il costo di penalizzazione del movimento è un centesimo rispetto al caso precedente.

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ${}^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso $(J_k' * J_k + \lambda C)^{-1}$, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

$${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L). \text{ In generale, } {}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k.$$

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Osservazioni su C

C può essere costante su tutto il movimento oppure può essere diversa per ogni passo k, C_k.

Si possono utilizzare diverse strategie per impostare C_k:

- Utilizzare all'inizio del movimento maggiormente i gradi di libertà prossimali e alla fine quelli distali.
- Definire l'inizio dell'utilizzo di alcuni gradi di libertà (e.g. l'apertura e la forma della mano) più o meno presto in funzione dell'intenzione del movimento.
- Definire un peso in funzione degli altri elementi della scena (e.g. mantenere una certa distanza da alter entità nella scena).
- …..

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo