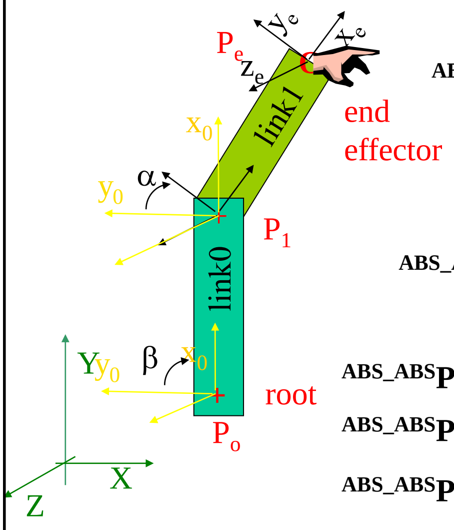
Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso di end-point

Prof. Alberto Borghese

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

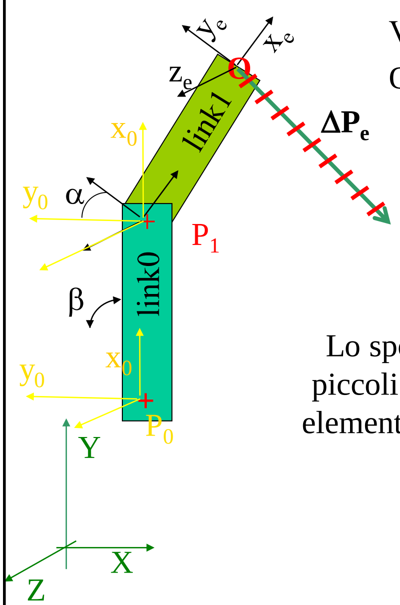
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{\;\;\;\;\;\;\;\;e}\mathbf{A(t)} \;\; {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_x\,(t) = f_x(\alpha(t),\ \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0,\ l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_y\,(t) = f_y(\alpha(t),\ \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0,\ l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_z\,(t) = f_z(\alpha(t),\ \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0,\ l_1)}$$

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$

Chiamiamo $\mathbf{W_k = \{\alpha_\kappa, \beta_\kappa, T_{xk}, T_{yk}\}}$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$\mathbf{\Delta P = J\, \Delta W}$$

Cinematica inversa con J

Quando la matrice del Jacobiano è quadrata, risolvo la cinematica inversa mediante inversione della matrice Jacobiano

$$\mathbf{\Delta P = J \Delta W} \longrightarrow \mathbf{\Delta W = J^{-1}\, \Delta P}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

$\boxed{\text{Elemento chiave è il Jacobiano, } \mathbf{J}.}$

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:
1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ${}^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso J_k^{-1}, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1}\,\Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

   ${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, ${}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Esempio di Jacobiano

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & +l_1 \sin(\alpha+\beta) + l_0 \sin\beta \\ +l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta \cos(\alpha+\beta)$$

$$\Delta \mathbf{W} = \mathbf{J}^{-1}\,\Delta \mathbf{P}$$

J calcolata per il valore corrente di α e β
J **quadrata**

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{1N}\,x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{2N}\,x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{MN}\,x_N = b_M$

$\{a_{ij}\}$ – coefficienti in numero N x M
$\{x_j\}$ – incognite, N
$\{b_j\}$ – termini noti, M

J∆W = ∆P

A x = b

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N
(Matrice di disegno)

Vettore delle incognite

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

Esempio:
$3x_1 + 2\,x_2 + \ldots\ldots\quad 4x_N = 5$
$4x_1 -2\,x_2 + \ldots\ldots\quad 0.5\,x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\,x_2 + \ldots\ldots\quad -3\,x_N = -1$

$\{x_j\}$ soddisfano tutte le equazioni

Matrice inversa

Viene definita per matrici **quadrate** (N x N):

$$A^{-1}A = I$$

Esiste ed è unica se $\det(A) \neq 0$.

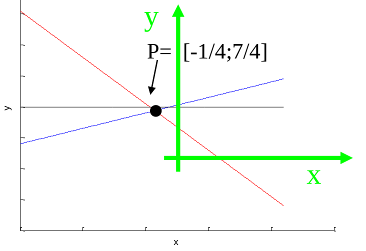
Inv(A) è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna per il loro complemento algebrico (formula di Leibniz).

$\mathbf{Ax = b} \Rightarrow A^{-1}A\,x = A^{-1}\,b \Rightarrow Ix = A^{-1}\,b \Rightarrow \boxed{\mathbf{x = A^{-1}\,b}}$

Visione geometrica di soluzione di un sistema lineare

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$



$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$

$-3\,x_1 - 1\,x_2 = -1$

$y = x_2$

$x = x_1$

Risolvo per sostituzione: $x_1 = -2 + 1\,x_2$.

$-3(-2 + x_2) - x_2 = -1 \;\Rightarrow\; x_2 = 7/4$

$x_1 - 1/4 = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = -1/4$

Rette e sistemi lineari

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$

$y = x_2$

$x = x_1$

$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$

$-3\,x_1 - 1\,x_2 = -1$

Scrivo il sistema lineare: Ax = b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

X è una soluzione se soddisfa tutte le equazioni del sistema stesso.

Soluzione di sistemi lineari quadrati

$x = A^{-1} b$

Condizione di esistenza dell'inversa è $\det(A) \neq 0$

Il sistema ammette 1 ed 1 sola soluzione se $\det(A) \neq 0$

Altrimenti: **nessuna** o **infinite** soluzioni

Risoluzione di un sistema 2x2

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$$

$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$

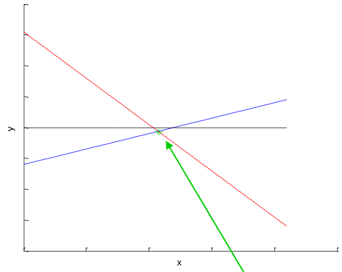
$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$

Esempio

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$



$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$
$-3\,x_1 - 1\,x_2 = -1$

$x_1 = x$
$x_2 = y$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Rango di A è pieno

$\det(A) = 1(-1)-(-1)(-3)=-1-3=-4 \neq 0$

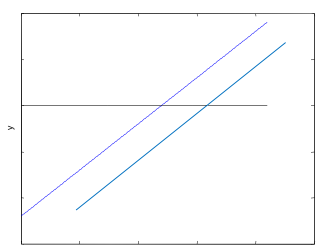
P = [-1/4 7/4]

$$x = A^{-1} b = \underbrace{-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +3 & +1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -1/4$
$x_2 = 7/4$

Esempio di soluzione non univoca (det(A) = 0)

$y = x + 2$
$2y = 2x + \mathbf{3}$



$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$
$2\,x_1 - 2\,x_2 = -3$

$x_1 = x$
$x_2 = y$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Non esistono soluzioni

$\det(A) = 1(-2)-(-1)(2)=-2+2=0$ La soluzione non esiste o ∞ soluzioni.

$y = x + 2$
$2y = 2x + \mathbf{4}$

La soluzione, non è unica: tutti i punti della retta soddisfano contemporaneamente le 2 equazioni. In questo caso ∞ soluzioni: rette sovrapposte.

Sistema M x N, M > N

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{1N}\,x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{2N}\,x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{MN}\,x_N = b_M$

Esempio:
$3x_1 + 2\,x_2 + \ldots\ldots\ \ 4x_N = 5$
$4x_1 -2\,x_2 + \ldots\ldots\ \ 0.5\,x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\,x_2 + \ldots\ldots\ \ -3\,x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A x = b

A è M x N, M > N, **non è una matrice quadrata**.

1, nessuna, ∞ soluzioni.

Ho delle equazioni di troppo, devono essere correlate (combinate linearmente), perché il sistema ammetta soluzione.

Posso sempre calcolare la soluzione in forma matriciale.

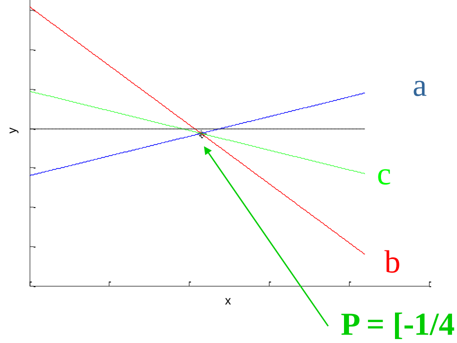
Sistemi lineari con m > n

J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$
$y = -x + 3/2$

$x = x_1$
$y = x_2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



P = [-1/4 7/4]

Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

$\boxed{\text{Rango di A è pieno}}$

Sistema lineare: soluzione algebrica

Caso generale:

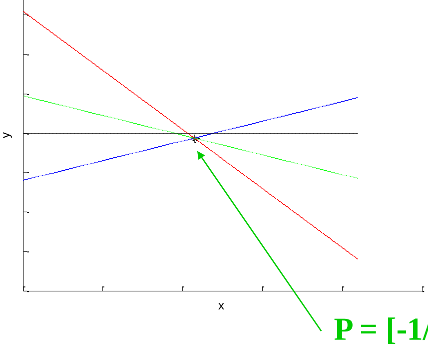
A X = B $\Rightarrow$ **A' A X = A' B** $\Rightarrow$ **(A' A)$^{-1}$ (A' A) X = (A' A)$^{-1}$A' B** $\Rightarrow$ **X = (A'A)$^{-1}$A'B**

(A'A) gioca il ruolo di A quadrata.

Quale criterio viene soddisfatto da X?

Sistemi lineari con m > n

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$y = x - 2$$
$$y = -3x + 1$$
$$y = -x + 3/2$$

$x = x_1$
$y = x_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$$P = C * A^T * b$$

P = [-1/4 7/4]

P = [-0.25 +1.75]

intersezione

Riformulazione del problema

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{1N}\, x_N = b_1 + \nu_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{2N}\, x_N = b_2 + \nu_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{MN}\, x_N = b_M + \nu_M$

M x 1 => **Residuo.**

A x = b + N

Vettore dei termini noti M x 1

Modello
Parametri liberi $J\Delta W$

Misure
Spostamento desiderato ΔP

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Quale criterio viene soddisfatto da X (ΔW)?

Soluzione come problema di ottimizzazione

Funzione costo: $(Ax - b)^2 = \sum_k^n \nu_k{}^2 = ||Ax - b||^2 = |\nu|^2$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x, non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza minima da tutte le rette.

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_k \nu_k{}^2 = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{A^TAx = A^Tb}$$

$$\mathbf{X = (A^TA)^{-1}A^Tb}$$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convesse perchè hanno un unico minimo globale.

Sistemi lineari con m > n

$y = x - 2$

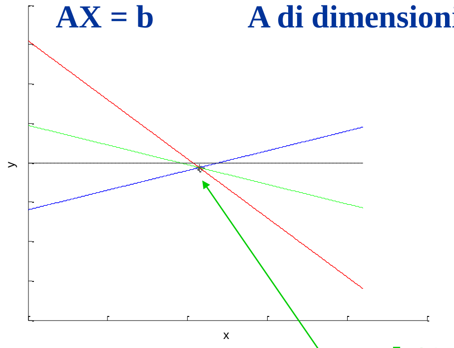
$y = -3x + 1$

$y = -x + 3/2$

$x = x_1$

$y = x_2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



P = [-1/4 7/4]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \qquad P = C * A^T * b$$

P = [-0.25 +1.75]

intersezione

$$\sum_k^n v_k^2 = ||Ax - b|| = 0$$

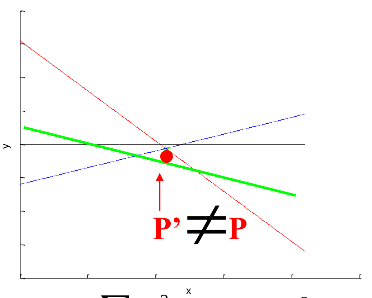
Sistemi lineari con m > n – non esiste soluzione (matematica)

$y = x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 1/2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\sum_k v_k^2 = ||Ax - b||^2 = 0.865$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \qquad P' = C * A^T * b$$

P' = [-0.25 +1.4167]

No intersezione

Sistemi lineari con m > n – residui

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 1/2

$x = x_1$
$y = x_2$

AX = b **A di dimensioni m x n**

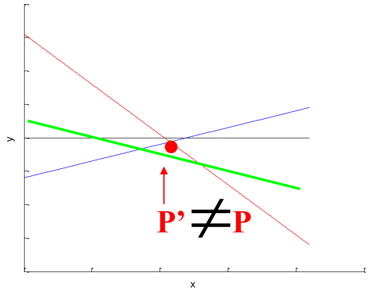
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P' = C * A^T * b$ **P' = [-0.25 +1.4167]**

No intersezione



ν_1 = 1*(-0.25) -1*(1.4167) – (-2) = 0.333
ν_2 = -3*(-0.25) -1*(1.4167) – (-1) = 0.333
ν_3 = -1*(-0.25) -1*(1.4167) – (-0.5) = -0.666

$$\sum_k^n \nu_i = \|Ax - b\|^2 = |\nu|^2 =$$
0.111 + 0.111 + 0.444 = 0.666

Commenti

$$\sum_k {\nu_k}^2 = \|Ax - b\|^2 = \sum_k \| A_{k,*}x - b_k \|^2 =$$
$$[(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) - b_1]^2 + [(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) - b_2]^2 +$$
$$[(A_{31}x_1 + A_{32}x_2) - b_3]^2$$

Lo scarto misura la distanza del punto dalle rette misurata lungo y

y – x + 2 = ν_1 = 0.33333
y + 3x – 1 = ν_2 = 0.33333
y + x – 1/2 = ν_3 = -0.6666

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

$\mathbf{A\,x = b}$

$\mathbf{A} = \mathbf{U^T W V}$

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

Se N = M

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

$\mathbf{A^{-1} = (U^T W V)^{-1} = V^T W^{-1} U}$

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
w_{ii} sono detti valori singolari.

$$\mathbf{Ax = b \rightarrow x = A^{-1}\,b = V^T W^{-1} U^T b}$$

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
w_{ii} sono detti valori singolari.

$\mathbf{A\,x = b}$

M x N

$\mathbf{A} = \mathbf{U^T W V}$

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

Se M > N

$\mathbf{A^T A\,x = A^T b}$ $\quad$ $\mathbf{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$

$$\mathbf{x = (V^T W U U^T W V)^{-1} V^T W U b = (V^T W I W V)^{-1} V^T W U b}$$

Essendo W diagonale, posso riorganizzare il prodotto di matrici:

$$\mathbf{x = (U U^T W W)^{-1} V^T W U b = (W W)^{-1} V^T W U b = V^T W^{-1} U b}$$

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

$\mathbf{A\,x = b}$

M x N

$\mathbf{A} = \mathbf{U^T\,W\,V}$

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

w_{ii} sono detti valori singolari.

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

$$\mathbf{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$$

$$\mathbf{x = V^T\,W^{-1}\,U\,b}$$

Non devo calcolare l'inversa di una matrice dell'ordine di A*A

Calcolo l'inversa in modo semplice: inversa di W è ottenuta come $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Controllo il condizionamento della matrice: rapporto tra w_{11} e w_{nn}

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

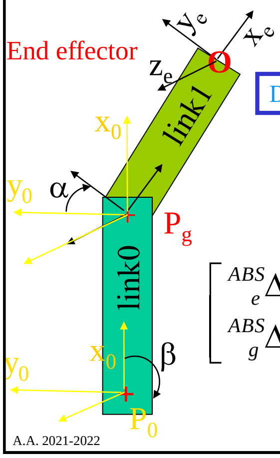
Il Jacobiano dell'esempio

Considero solo α e β

$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{\;e}P \\ {}^{ABS}_{\;g}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ l_o \cos\beta \\ -l_o \sin\beta \end{bmatrix}$$

Jacobiano rettangolare: 4 x 2

Definiamo la traiettoria dell'end effector **e** del joint **g, link 0**

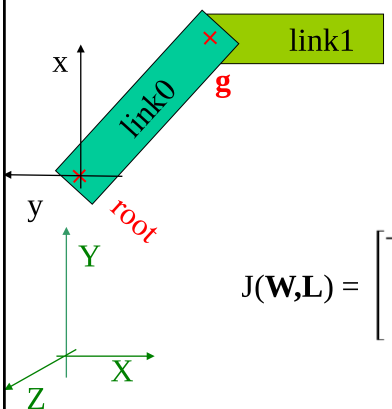


$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{\;e}\Delta P \\ {}^{ABS}_{\;g}\Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2) – sistema lineare

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P_e$$



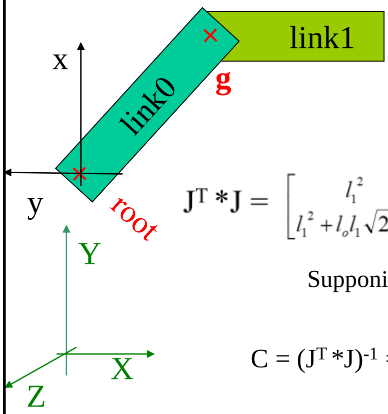
$$b = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \qquad x = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \\ 0 & -l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \end{bmatrix}$$

Supponiamo: α = β = 45°

Esempio (m = 4, n = 2) - Jacobiano

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \\ 0 & -l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \end{bmatrix} =$$

Supponiamo:
$\alpha = \beta = 45^o$

$$\begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2 \\ l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2 & (-l_1 - l_o \sin 45)^2 + (l_o \cos 45)^2 + (l_0 \sin 45)^2 + (l_0 \cos 45)^2 \end{bmatrix} =$$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} & 12+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

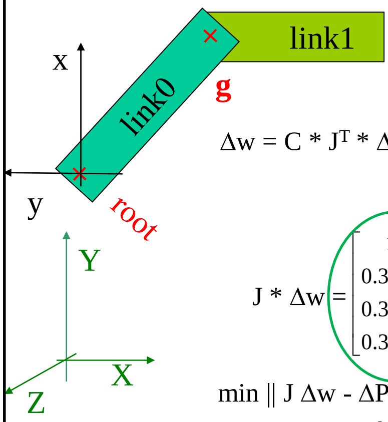
$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2) - soluzione

$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P$ $\qquad b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$ $\qquad x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$
Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$\Delta P_{e_x} = 1$ $\quad \Delta P_{e_y} = 0$
$\Delta P_{g_x} = 1$ $\quad \Delta P_{g_y} = 0$



$$\Delta w = C * J^T * \Delta P = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} radianti = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} gradi$$

$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$

è diverso dal valore desiderato per ΔP

$\min \| J\,\Delta w - \Delta P \| = 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2$

Esempio (m = 4, n = 2) - errore

$\Delta w = (J^T * J)^{-1} * J^T * \Delta P$

$b = \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$

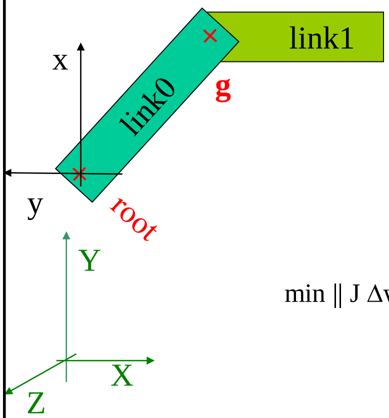
$x = \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} grad$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$\Delta P_{e_x} = 1$ $\Delta P_{e_y} = 0$

$\Delta P_{g_x} = 1$ $\Delta P_{g_y} = 0$



$$J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix}$$

$$\min \| J \Delta w - \Delta P \| = 0^2 + 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2 = 0.8165$$

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:
1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ^eP.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso J_k^{-1}, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

   $^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, $^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n, sistemi sovradeterminati).
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Stima ai minimi quadrati pesata

min || P(Ax –b) ||^2 **PAx = Pb** **A di dimensioni m x n**

P di dimensioni m x m – matrice dei pesi, diagonale

$$p_1a_{11}x_1 + p_1a_{12}x_2 - p_1b_1 = p_1\nu_1$$
$$p_2a_{21}x_1 + p_2a_{22}x_2 - p_2b_2 = p_2\nu_2$$
$$p_3a_{31}x_1 + p_3a_{32}x_2 - p_3b_3 = p_3\nu_3$$

Residuo pesato $\min \sum_k (p_k \nu_k)^2$

$$\mathbf{A^T P A\, x = A^T P\, b}$$

$$\boxed{\mathbf{x = (A^T P A)^{-1} A^T P\, b}}$$

Rank(A) = Rank(C)

$C = (A^T * P * A)^{-1}$ è la matrice di covarianza

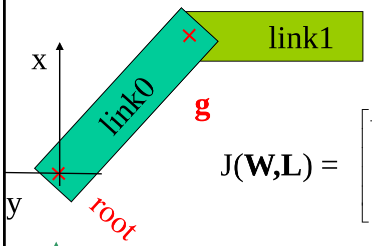
(matrice quadrata n x n)

Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

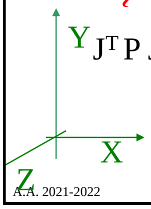
$$\Delta w = (J^T * P * J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e$$

$$\Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \qquad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin 45 \\ 0 & -l_0\cos 45 \\ 0 & -l_o\sin 45 \\ 0 & l_o\cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$



$$J^T P J = \begin{bmatrix} p_1 * l_1^2 & p_1(l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2) \\ p_1(l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2) & p_1[(-l_1 - l_o\sin 45)^2] + p_2(l_o\cos 45)^2 + p_3(l_0\sin 45)^2 + p_4(l_0\cos 45)^2 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$$\Delta w = (J^T PJ)^{-1} * J^T P * \Delta P_e \qquad \Delta P_e = \begin{bmatrix} \Delta P_{e_x} \\ \Delta P_{e_y} \\ \Delta P_{g_x} \\ \Delta P_{g_y} \end{bmatrix} \qquad \Delta w = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

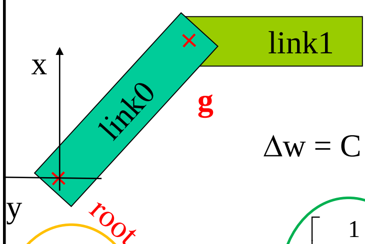
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$

$dP^g_x = 1$ $\quad dP^g_y = 0$



$$(J^T PJ) = \begin{bmatrix} 40 & 68.284 \\ 68.284 & 140.568 \end{bmatrix}$$

$$\Delta w = C * J^T * \Delta P_e = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \qquad J * \Delta w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{f_x} \\ dP_{f_y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix}$$

più vicino al valore desiderato per il punto **e** e **meno vicino** per il punto **g**

$$\min \| P(J\,\Delta w - \Delta P_e) \| = ((1-1)*10)^2 + ((0.0833-0)*10)^2 + (0.0833-1)^2 + (0.0833-0)^2$$

Privilegio di alcuni punti dello scheletro rispetto ad altri

$$\Delta w = (J^T P J)^{-1} * J^T P * \Delta P_e$$

Attraverso la matrice diagonale dei pesi P
posso influenzare la soluzione
(vincolo soft sul movimento)

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.