La cinematica Inversa ed il Jacobiano

Prof. Alberto Borghese

Riassunto

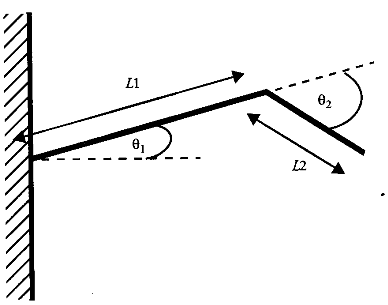
- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

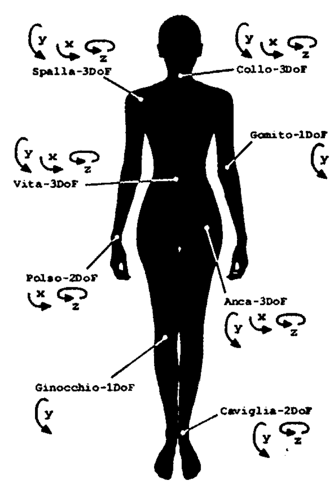
La cinematica inversa

Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.

Problema sotto-determinato (under-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?

Cerniere 3D





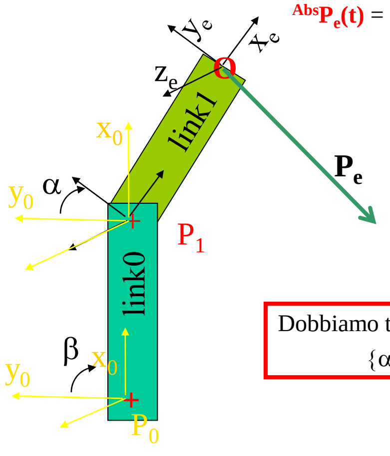
∞^1 soluzioni
NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

Cinematica diretta

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\, {}^{e}P_e(t_0)$

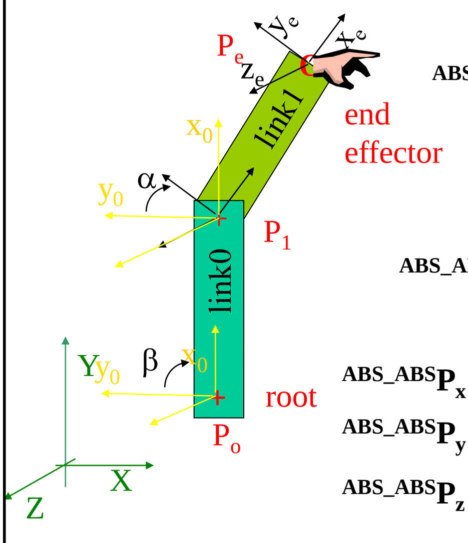


$$^{ABS}\mathbf{P_e(t)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t_0)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A(t)}\ {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_x(t)} = \mathbf{f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

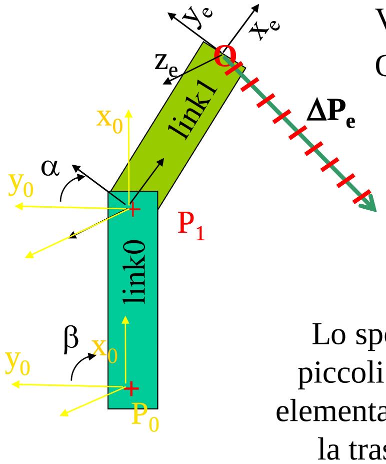
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_y(t)} = \mathbf{f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_z(t)} = \mathbf{f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

Riassunto

- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

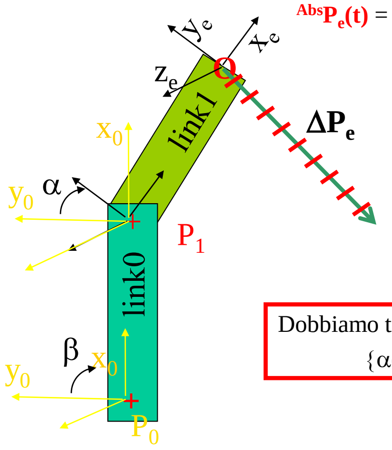
Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare o la traslazione richiesta per **tutti i joint**.
Lavoriamo sulle variazioni (differenziale).

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

${}^{Abs}\mathbf{P_e(t)}$ = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1) = ${}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}Pe_e(t)$



$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
{α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)} = F*(l_0,l_1,$\mathbf{P_e(t)}$)

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

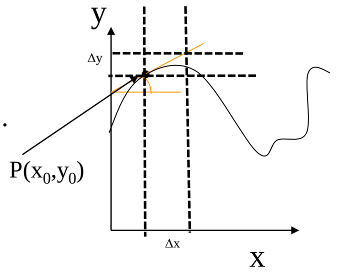
Linearizzazione – 1 variabile

$y_0 = f(x_0)$

$$
dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} dx^2 + \dots
$$

$$
y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x \Rightarrow y = mx + q
$$

$\Delta y = f'(x_o)\, \Delta x$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

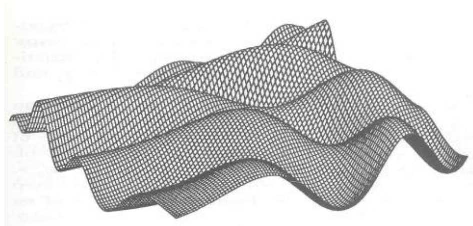
- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di P(x_o,y_o).
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili (**P(t)** = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1))?

Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili

$z = f(x,y)$ Superficie nello spazio 3D

$$z - z_o = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P=P_0} dy}_{\boxed{\text{Parte lineare}}} + \frac{1}{2}\left\{ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P=P_0} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P=P_0} + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P=P_0} dy^2 \right\} + \ldots$$



Sistema di equazioni lineari

Considieriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = $f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.

Chiamiamo $\mathbf{W_k} = [\alpha_\kappa, \beta_\kappa, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

$\mathbf{P(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{W}$

Chiamiamo $\mathbf{W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]}$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\Delta P = \begin{bmatrix} P_x - P_{x\,k} \\ P_y - P_{y\,k} \\ P_z - P_{z\,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} = \Delta W$$

Caratteristiche del Jacobiano

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Contiene le derivate parziali di **f**(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'**espressione analitica** di J vale ∀valore dei parametri liberi, {w}, ma il **valore assunto** da J varia in funzione dei parametri liberi.

Come vengono trattate le velocità

Dividendo entrambi i membri per Δt si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

$\boxed{\text{Elemento chiave è il Jacobiano, } \mathbf{J}.}$

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale $\forall$valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Jacobiano e velocità

$\Delta \mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, \Delta \mathbf{W(t)} \quad \Rightarrow \Delta \mathbf{P_e(t)} / \Delta t = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, \Delta \mathbf{W(t)} / \Delta t$

Chiamiamo $\mathbf{W(t_k)} = \{\alpha(t_k), \beta(t_k), T_x(t_k), T_y(t_k)\}$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\mathbf{V_{Pe}}(t_k) = \mathbf{J}(W(t_k),L)\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t_k)$$

Parametri liberi

Parametri geometrici

$\forall$k, cambia il valore di J, l'espressione analitica rimane valida.

Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \\ \mathbf{\Delta P_e(t_k)} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Delta W(t_k)} \end{matrix}$$

$\mathbf{\Delta P_e(t_k)} = J(\mathbf{W(t_k)}, \mathbf{L})\mathbf{\Delta W(t_k)}$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)}$= [(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parmetri liberi a quello dell'end-point: $\mathbf{\Delta W(t)}$ -> $\mathbf{\Delta P_e(t)}$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

Riassunto

- Introduzione alla cinematica inversa
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{1N}\,x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{2N}\,x_N = b_2$

………………

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{MN}\,x_N = b_M$

$\{a_{ij}\}$ – coefficienti in numero N x M

$\{x_j\}$ – incognite, N

$\{b_j\}$ – termini noti, M

$J\,\dot{\Theta} = V$

$\mathbf{A\,x = b}$

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N
(Matrice di disegno)

Vettore delle incognite

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

Esempio:

$3x_1 + 2\,x_2 + \ldots\ldots\quad 4x_N = 5$

$4x_1 - 2\,x_2 + \ldots\ldots\quad 0.5\,x_N = 3$

………………

$2x_1 + 3\,x_2 + \ldots\ldots\quad -3\,x_N = -1$

$\{x_j\}$ soddisfano tutte le equazioni

Matrice inversa

Viene definita per matrici **quadrate** (N x N):

$$A^{-1}A = I$$

Esiste ed è unica se $\det(A) \neq 0$.

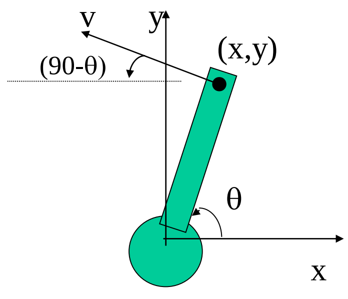
Inv(A) è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna per il loro complemento algebrico (formula di Leibniz).

$\mathbf{Ax = b} \Rightarrow A^{-1}A\,x = A^{-1}\,b \Rightarrow Ix = A^{-1}\,b \Rightarrow \boxed{\mathbf{x = A^{-1}\,b}}$

Rotazione semplice

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta)$



$\omega \triangleq \dot{\theta} \Rightarrow v \qquad \dot{\theta} = f\{\dot{x}, \dot{y}\}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \dot{\theta}$$

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

Sono due espressioni equivalenti $\forall k$

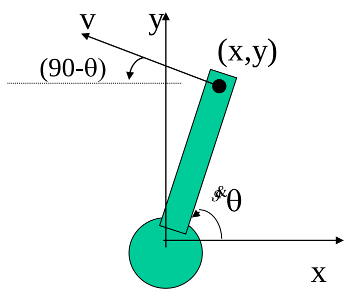
$$\mathbf{V} = \mathbf{J}_{\theta=\theta_k}\boldsymbol{\omega}$$

$\mathbf{V}_{2x1} \quad \mathbf{J}_{2x1} \quad \boldsymbol{\omega}_{1x1}$

Utilizzo del Jacobiano

$\omega \triangleq \dot{\theta} \Rightarrow v$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \dot{\theta}$$



$V_x = -r\sin(\theta)$

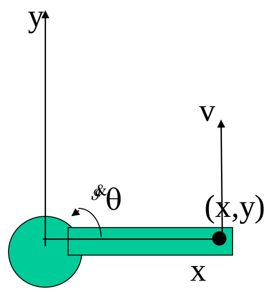
$V_y = r\cos(\theta)$

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\dot{\theta} \\ x\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\,\dot{\theta} \\ r\cos\theta\,\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio di utilizzo del Jacobiano

$\omega \triangleq \dot{\theta} \Rightarrow v$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix}_{\theta=\theta_k} \dot{\theta}$$



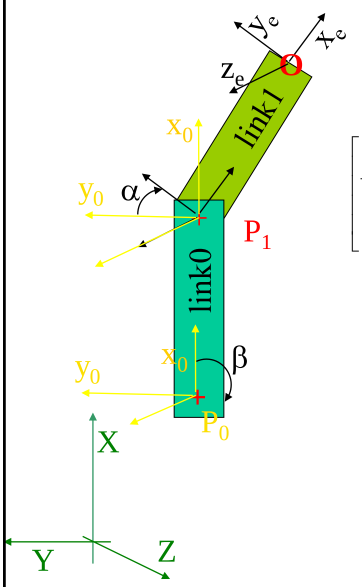
$\theta_k = 0$

$V_x = -r \sin(0)\, \dot{\theta} = 0$

$V_y = r \cos(0)\, \dot{\theta} = r\, \dot{\theta}$

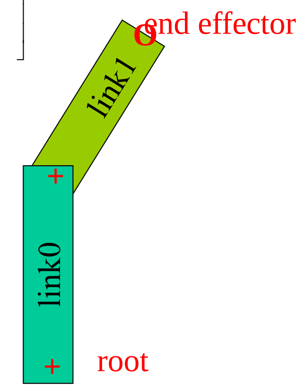
$$\mathbf{V = \omega \Lambda r} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cinematica diretta



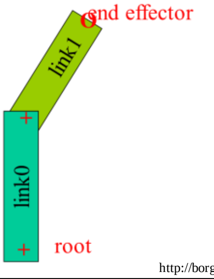
$$^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



La matrice di trasformazione

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{P_e(t_k)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{W(t_k)}}$$



Il Jacobiano dell'esempio - I

$$^{\mathbf{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial P_x}{d\alpha} = -l_1 \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\partial P_x}{d\beta} = -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin(\beta)$$

$$\frac{\partial P_x}{dT_x} = 1$$

$$\frac{\partial P_x}{dT_y} = 0$$

Il Jacobiano dell'esempio - II

$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$\frac{\partial P_x}{d\alpha} = -l_1 \cos(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\partial P_x}{d\beta} = -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos(\beta)$$

$$\frac{\partial P_x}{dT_x} = 0$$

$$\frac{\partial P_x}{dT_y} = 1$$

Il Jacobiano dell'esempio - III

$$
{}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Il Jacobiano varia al variare dei parametric liberi

Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$\Delta \mathbf{P_e(t_k)}$ J $\Delta \mathbf{W(t_k)}$

$\Delta \mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\Delta \mathbf{W(t)}$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)} = \{(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\}$ il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parametri liberi a quello dell'end-point: $\Delta\mathbf{W(t)} \rightarrow \Delta\mathbf{P_e(t)}$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

Determinazione delle variazioni dei parametri liberi

$\Delta \mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\ \Delta \mathbf{W(t)}$ E' un sistema lineare

$$Y = A \quad X$$

Y – vettore degli spostamenti desiderati dell'end-point (che vengono forniti dal sistema di controllo)
X – vettore delle variazioni richieste dei parametric liberi (che non conosciamo)
J(.) – matrice di disegno del problema (che conosciamo se conosciamo la posizione attuale dello scheletro). J(.) vale in un intorno di questa posizione.

La soluzione del sistema lineare è: $X = A^{-1} Y$

$\Delta \mathbf{W(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})^{-1}\ \Delta \mathbf{P_e(t)}$

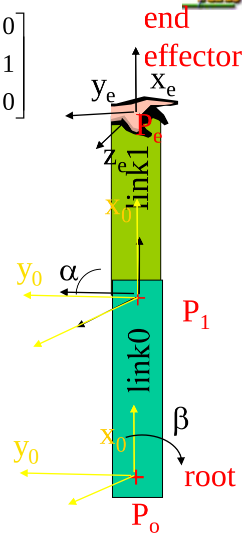
Esempio di calcolo dello spostamento – I

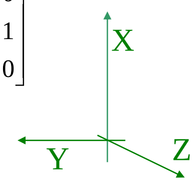
$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$$W_k = \{0, 0, T_{x_k}, T_{y_k}\}$$

$$J(\mathbf{W_k,L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





Esempio di calcolo dello spostamento – II

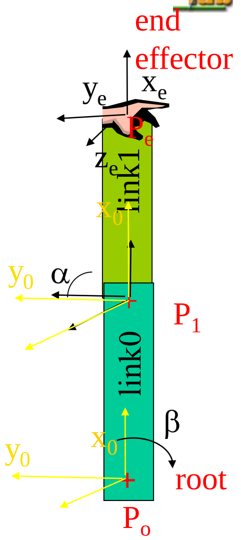
Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

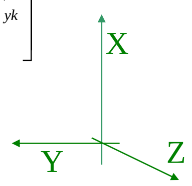
$$J(\mathbf{W_k,L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(\mathrm{t}), \mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0-l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_x \\ -l_0\Delta\alpha - (l_0+l_1)\Delta\beta + \Delta T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

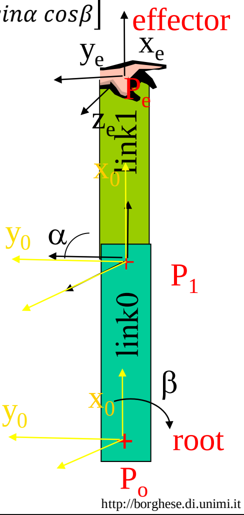


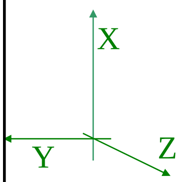


Caso semplificato

Elimino 2 gradi di libertà: Tx e Ty e considero solamente il movimento sul piano x,y.

$$ {}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 cos\alpha + l_0)cos\beta & -l_1 sin\alpha\ sin\beta \\ -(l_1 cos\alpha + l_0)sin\beta & -l_1 sin\alpha\ cos\beta \end{bmatrix} $$





La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$ {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 cos\alpha + l_0)cos\beta & -l_1 sin\alpha\ sin\beta \\ -(l_1 cos\alpha + l_0)sin\beta & -l_1 sin\alpha\ cos\beta \end{bmatrix} $$

$$ J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 sin(\alpha+\beta) & -l_1 sin(\alpha+\beta) - l_0 sin\beta \\ -l_1 cos(\alpha+\beta) & -l_1 cos(\alpha+\beta) - l_0 cos\beta \end{bmatrix} $$

Non tutti gli spostamenti sono possibili

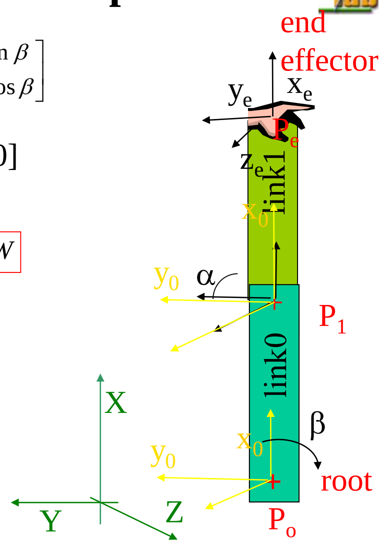
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: α = β = 0 $W_k = [0, 0]$

$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0-l_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha-0 \\ \beta-0 \end{bmatrix}$$

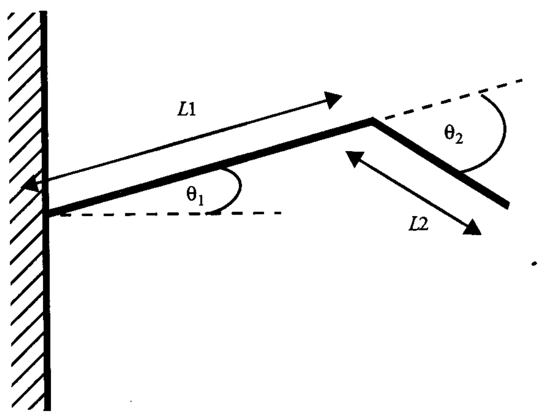
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0\Delta a + (-l_0+l_1)\Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

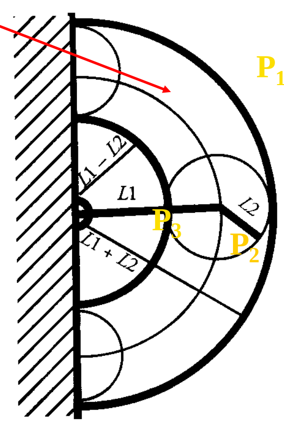


E’ possibile spostarsi solamente in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per α = β = 0

Soluzione diretta

Working space





Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \le \| P \| \le L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Riassunto

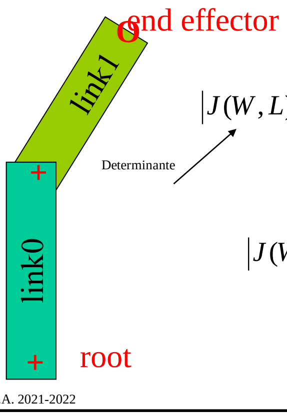
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Il Jacobiano dell'esempio semplificato: determinante

$$ {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 cos\alpha + l_0) cos\beta & -l_1 sin\alpha \; sin\beta \\ -(l_1 cos\alpha + l_0) sin\beta & -l_1 sin\alpha \; cos\beta \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(\mathrm{t}), \mathbf{L}) \Delta W} $$

Consideriamo il caso piano (x,y) e Tx ≡ Ty ≡ 0 e coordinate non omogenee.

$$ \mathrm{J}(\mathbf{W}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix} $$



Determinante

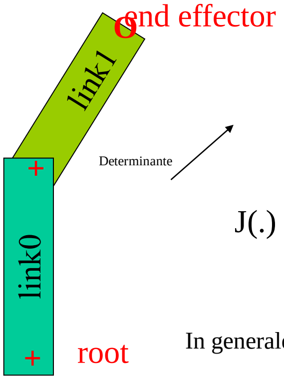
$$ |J(W,L)| = l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta \cos(\alpha+\beta) $$

$$ |J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta \cos(\alpha+\beta) $$

Condizioni di singolarità

$$|J(W,L)| = l_1^2 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) -$$
$$l_1^2 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$



Determinante

$$J(.) \neq 0 \begin{cases} \alpha+\beta \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases}$$

$$J(.) \neq 0 \begin{cases} \alpha+\beta \neq 90 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases}$$

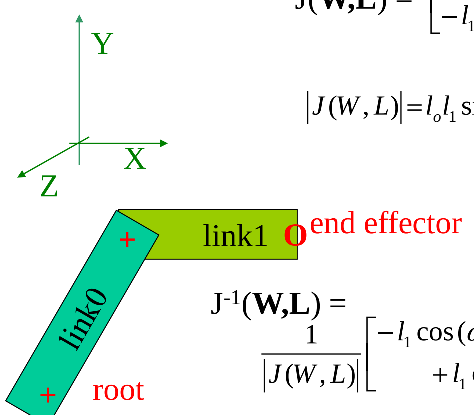
In generale, $\alpha \neq 0 \pm 180$. Definisce la frontiera dello spazio di lavoro

Inverso del Jacobiano dell'esempio semplificato

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

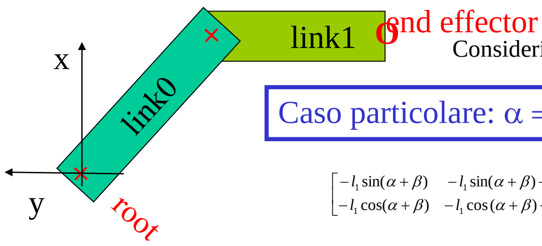
$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$



$$J^{-1}(\mathbf{W,L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & +l_1\sin(\alpha+\beta) + l_0\sin\beta \\ +l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano: determinante – caso particolare

$$^{ABS\_ABS}{}_{\mathbf{e}}\mathbf{P} = \; = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Consideriamo il caso piano e Tx ≡ Ty ≡ 0

Caso particolare: α = β = 45 - $l_0 = l_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W}$$

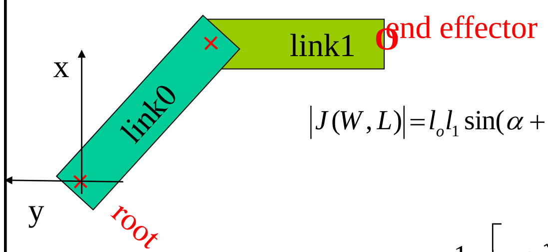
J(**W**,**L**) =

$$J([45,45],[2,2]) = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \det(J) = 2\sqrt{2}$$

Inverso del Jacobiano: caso particolare

Caso particolare: α = β = 45 - $l_0 = l_1 = 2$

$$J^{-1}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & +l_1\sin(\alpha+\beta)+l_0\sin\beta \\ +l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$



$$|J(W,L)| = l_o l_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$J^{-1}([45,45],[2,2]) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2} & +2+2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

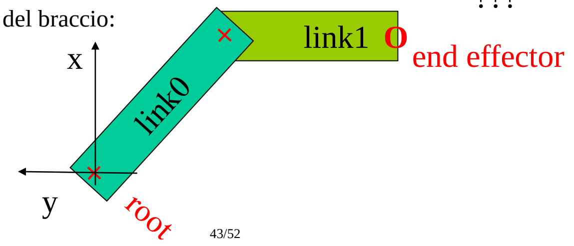
Situazione del movimento

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

Posizione iniziale del braccio: $\{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\}$
Angoli iniziali: {45, 45}

Posizione finale desiderata del braccio: {2, -2}
Spostamento desiderato del braccio: $\{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
Angoli finali del braccio: {90, 0]}

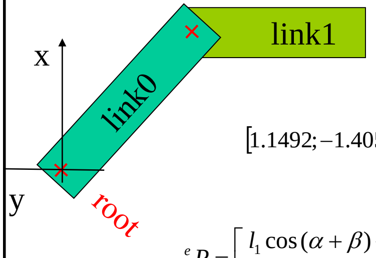
Posizione finale raggiunta: ???
Spostamento del braccio:



Calcolo di [Δα, dβ]

$$\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}81.028\\ -57.2958\end{bmatrix}_{gradi}$$

Angoli iniziali: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ {ΔPx ΔPy}= {2-√2, √2}



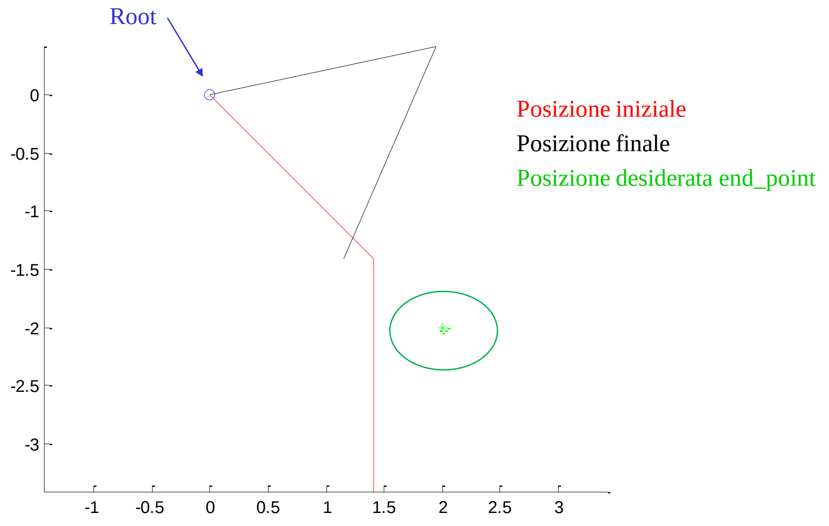
W_{fin} = {45 + 81.028; 45 -57.2958} = {126.028; -12.2958}
Angoli finali desiderati: {90, 0}

Posizione iniziale: $\{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\}$

$[1.1492; -1.4050]$ Posizione finale ottenuta: {1.1492, -1.4050}

$$^{e}P = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta\\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2*(-0.4025)+2*0.9771\\ -2*0.9154-2*(-0.2130)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.1492\\ -1.4050\end{bmatrix}$$

Rappresentazione grafica

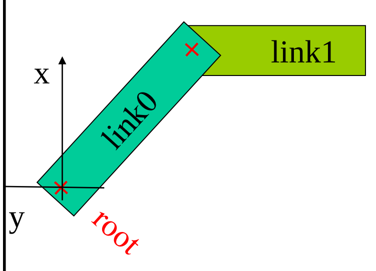


Verifica della soluzione

$$\begin{bmatrix}\Delta X \\ \Delta Y\end{bmatrix} = J \begin{bmatrix}\Delta\alpha \\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sqrt{2} \\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}-2\sqrt{2}+2+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

J(**[45,45],[2,2]**)

$$\begin{bmatrix}2-\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

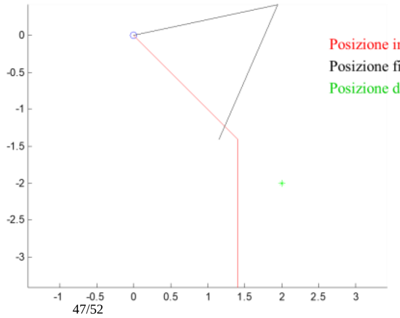


Spostamento desiderato del braccio

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P = \{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Situazione del movimento

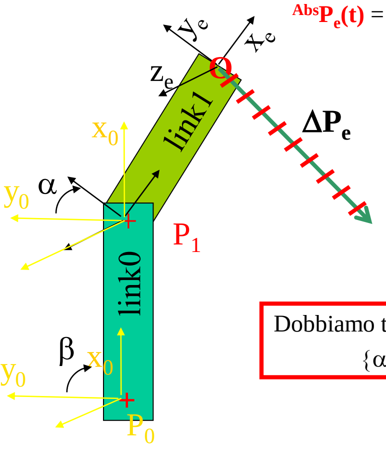
Posizione iniziale del braccio:	$\{\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\}$
Angoli iniziali:	{45, 45}
Posizione finale desiderata del braccio:	{2, -2}
Spostamento desiderato del braccio:	$\{2-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
Angoli finali del braccio (non noti all'inizio):	{90, 0}
Posizione finale raggiunta:	{1.1492, -1.4050}
Angoli finali prodotti:	{126.028; -12.2958}



Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}Pe_e(t)$



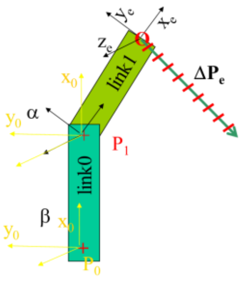
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

Perchè questa differenza?



$\Delta P_e(t) = J(W(t), L)\Delta W(t)$ La linearizzazione introduce un errore. Questo errore è tanto più piccolo tanto più è piccolo $\Delta P_e(t)$

La soluzione può introdurre un errore nel caso di sistemi sovradeterminati.

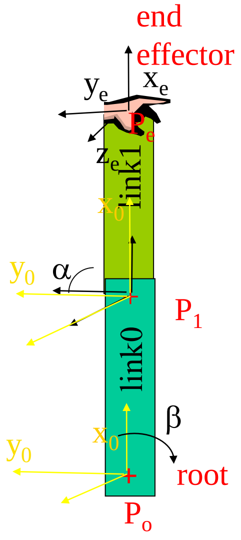
Caso indeterminato

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $W_k = [0, 0]$

$$J([0,0],[2,2]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$



Det (J(.)) = 0 Sistema indeterminato

$P\text{-}P_x = 0$

$P\text{-}P_y = -l_0\alpha - (l_0+l_1)\beta$ ⟶

$P\text{-}P_x = 0$

$\alpha = \alpha \quad \beta = [(P\text{-}P_y) + l_0\alpha] / -(l_0+l_1)$

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point ${}^eP_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento) per ogni passo k:

1) Identifico ΔP_k dalla posizione corrente verso la posizione finale di ${}^eP$.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w_k.
3) Calcolo, attraverso J_k^{-1}, il valore Δw_k associato ($\Delta w_k = J_k^{-1} \Delta P_k$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point:

   ${}^eP_{k+1} = f(w_k + \Delta w_k, L)$. In generale, ${}^eP_{k+1} \neq P_k + \Delta P_k$.

Fino a quando non arriva a P_{finale}.

Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi