Realtà Virtuale
From 3D to 2D

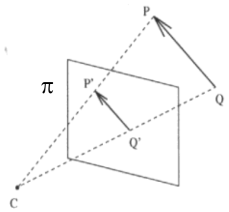
Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano

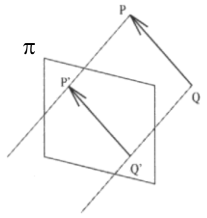
Sommario

- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

Proiezione centrale e proiezione ortogonale



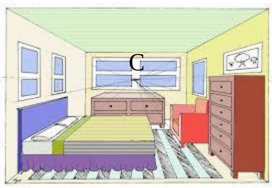
1)



2)

P(X,Y,Z) viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto P'(X',Y'). Z è la distanza dal piano immagine.

1) X' dipende da X **e** Z.
2) X' non dipende da Z, ma solo da X.



Proiezione centrale: centro di proiezione al finito - C.

Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.

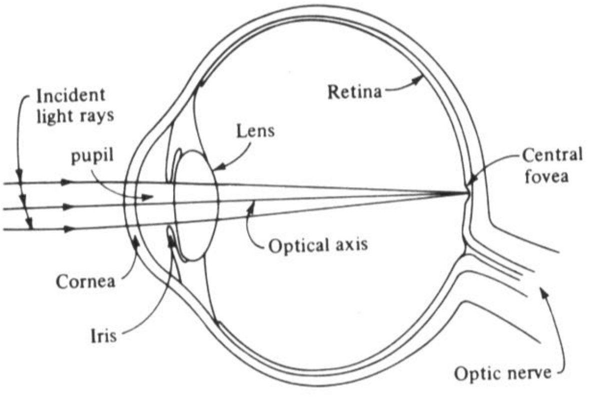
Dal 3D al 2D

Come si forma un'immagine?

•Scena con oggetti riflettenti.
•Sorgente di illuminazione
•Piano di rilevazione della luce riflessa.

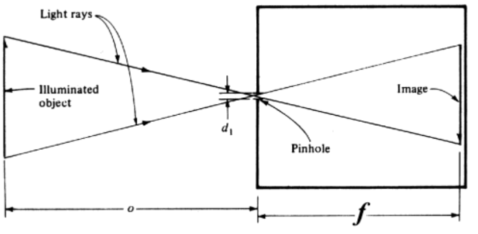
Il motore di questa trasformazione è la **proiezione prospettica**.

L'occhio umano

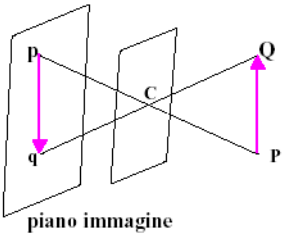


Its behavior is very similar to that of a camera

La pin-hole camera



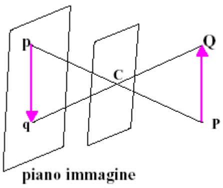
Proiezione prospettica: tutti i raggi di proiezione passano per un unico punto, detto **centro di proiezione**.



Pinhole camera

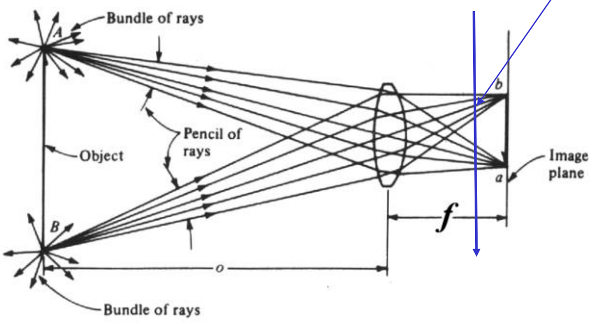
Perchè non funziona in pratica?

La lente



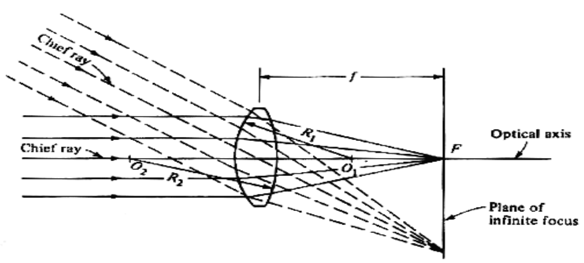
Pinhole camera

Cerchio di confusione



Lente convergente

Geometria dell'ottica



Oggetti all'infinito

•Distanza focale: distanza del piano immagine quando un oggetto si trova all'infinito e dà un'immagine nitida sul piano immagine.

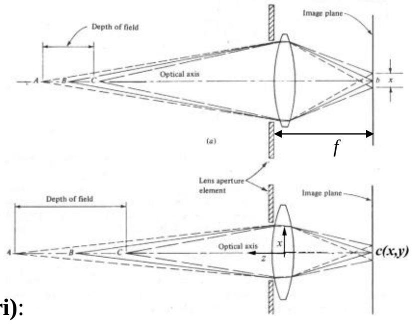
•Asse ottico: raggio che non viene deviato dalla lente.

• Intersezione dell'asse ottico con il piano immagine dà il punto principale (F).

Messa a fuoco

Problema della messa a fuoco

La profondità di campo dipende dall'apertura dell'obbiettivo.



Parametri di camera (o intrinseci – 3 parametri):
• Punto principale c(x,y)
• distanza focale (piano messa a fuoco), f

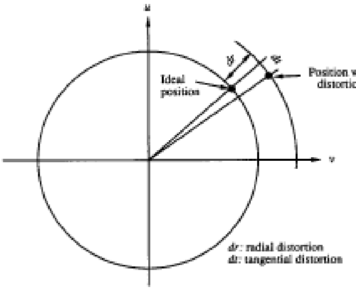
Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).

Distorsioni.

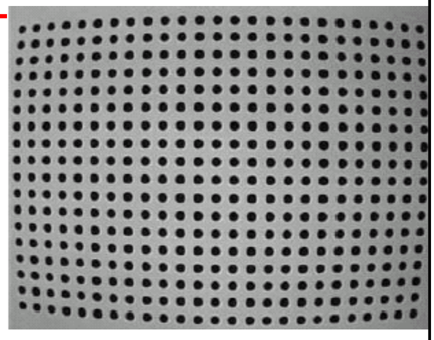
Distorsioni

Distorsioni radiali.
Distorsioni tangenziali.
Shrinkage ($x' = \lambda x$, $y' = y$).

$$x_m = x + f(x,y)$$
$$y_m = y + g(x,y)$$



Esempi di Distorsioni

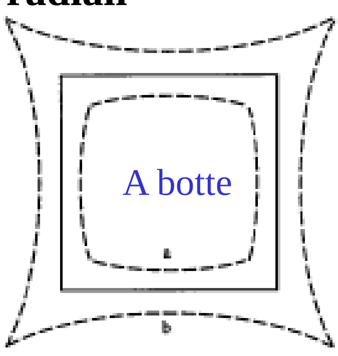


Ottime per effetti speciali, un po' meno per delle misure…..

Le camere non sono metriche.

Distorsioni radiali

A cuscinetto



$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \ldots$$

$$r = |p - p_o|$$

Rappresentazione polare (ρ, ϕ):

$x = \rho \cos\phi$

$y = \rho \sin\phi$

$$dx(p) = k_0 x + k_1 x(x^2 + y^2) + O[(x,y)^4]$$

$$dy(p) = k_0 y + k_1 y(x^2 + y^2) + O[(x,y)^4]$$

Il parametro k_o non si considera perchè corrisponde ad una variazione di scala.

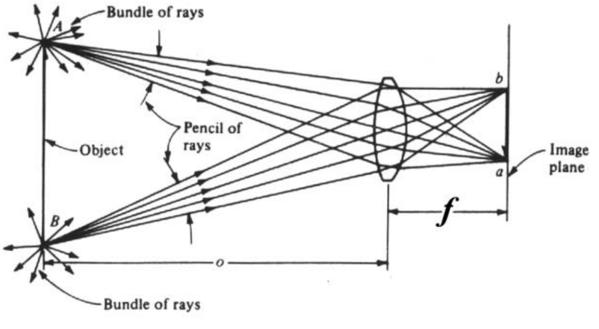
I modelli di distorsioni

Modelli parametrici

1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$	(1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$	(2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 \left(r^2 + 2x^2\right) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 \left(r^2 + 2y^2\right) + k_2 2xy$	(3)

In alternativa: modelli **semi-parametrici** che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.

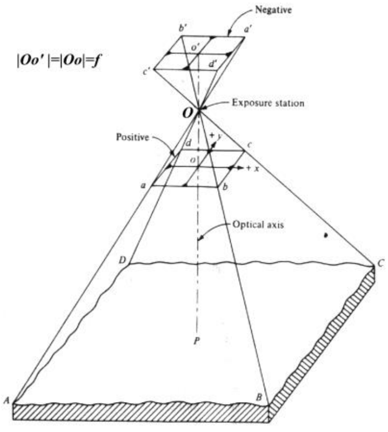
Le distorsioni

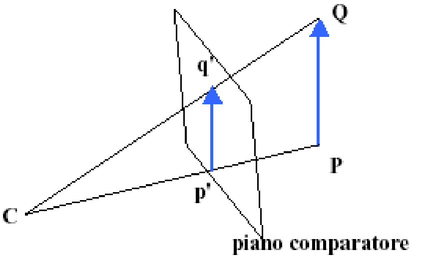


$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots$

Il punto a per effetto delle distorsioni viene misurato in una posizione $p_a + dr(p_a)$

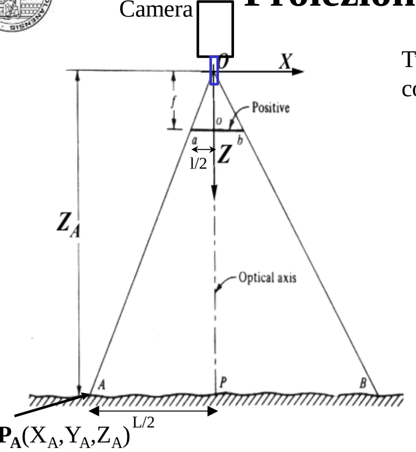
Raddrizzamento dell'immagine





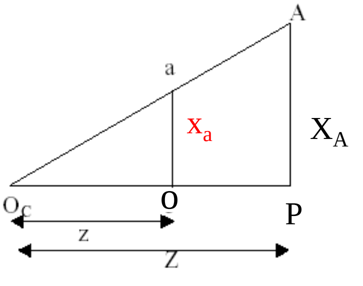
Si considera un piano posto davanti al centro di proiezione (si ottiene scandendo l'immagine dall'angolo a dx in basso). In digitale si ottiene iniziando a «contare» i pixel dal punto in alto a dx invece che in basso a sx.

Proiezione semplice



$P_A(X_A, Y_A, Z_A)$

Tutte le coordinate misurate rispetto a un centro comune



Per similitudine fra i triangoli aOo e AOP:

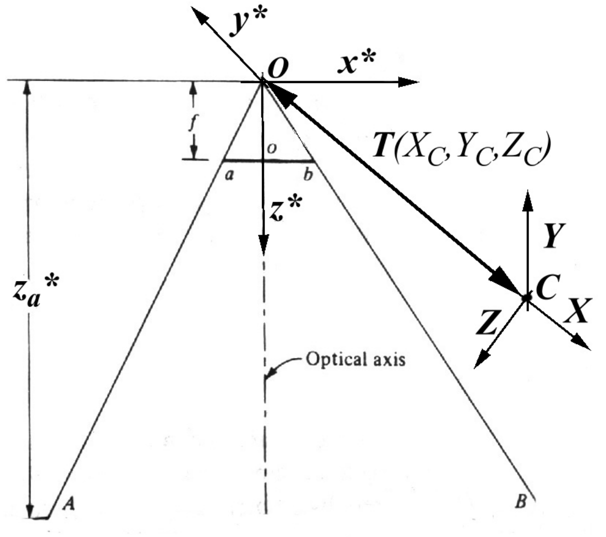
Oo : OP = ao : AP

f : $Z_A = x_A : X_A \rightarrow x_A = f\, X_A / Z_A$

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = f\, X_A / Z_A \\ y_a = f\, Y_A / Z_A \end{cases}$$

I parametri esterni

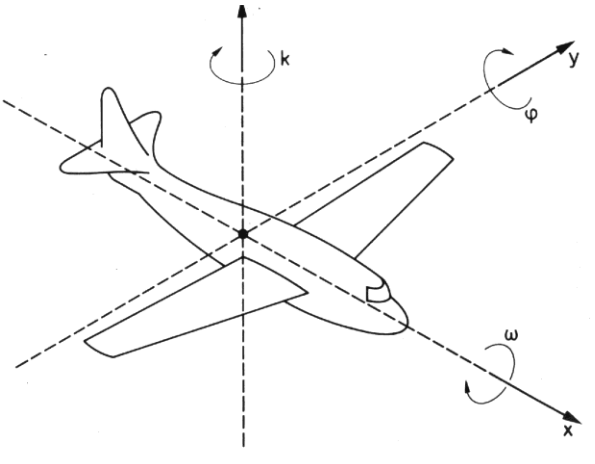
- ***Traslazione:*** 3 componenti: $\mathbf{T}(X_C, Y_C, Z_C)$.
- ***Rotazione*** $R_{3x3}(\omega, \phi, k)$



Angoli di orientamento nello spazio 3D

Modo generale: roll, pitch, e yaw. (ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.



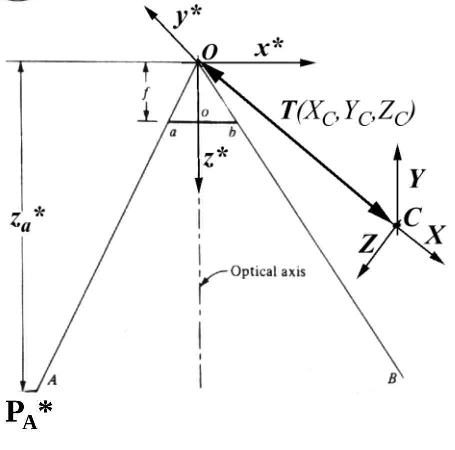
Rototraslazione

P* = R (P – T)

$X^* = r_{11}(X-X_C) + r_{12}(Y-Y_C) + r_{13}(Z-Z_C)$
$Y^* = r_{21}(X-X_C) + r_{22}(Y-Y_C) + r_{23}(Z-Z_C)$
$Z^* = r_{31}(X-X_C) + r_{32}(Y-Y_C) + r_{33}(Z-Z_C)$

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dal 3D al 2D

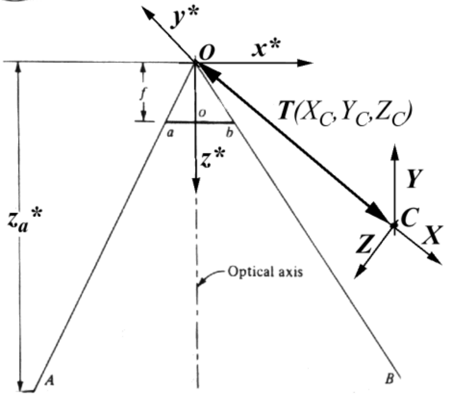


1) Mi riconduco alla proiezione semplice

$P_A^* = R\ (P_A - T)$

$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P^*_A(X^*_A, Y^*_A, Z^*_A)$

Dal 3D al 2D



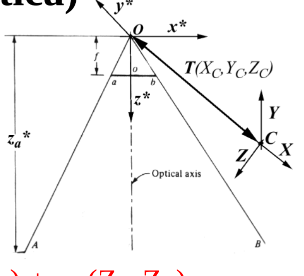
2) Implemento la proiezione semplice

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = f\, X^*_A / Z^*_A \\ y_a = f\, Y^*_A / Z^*_A \end{cases}$$

$P(X_A,Y_A,Z_A) \Rightarrow P^*_A(X^*_A, Y^*_A, Z^*_A) \Rightarrow a(x_a,y_a)$

La terza coordinata sul piano immagine, $z_a = f = \overline{oO}$

Equazioni di collinearità (rappresentazione perspettica)



$$X^*_A = r_{11}(X_A-X_C) + r_{12}(Y_A-Y_C) + r_{13}(Z_A-Z_C)$$
$$Y^*_A = r_{21}(X_A-X_C) + r_{22}(Y_A-Y_C) + r_{23}(Z_A-Z_C)$$
$$Z^*_A = r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)$$

$$(x_a - x_o)/f = X^*_A / Z^*_A = \frac{r_{11}(X_A-X_C) + r_{12}(Y_A-Y_C) + r_{13}(Z_A-Z_C)}{r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)}$$

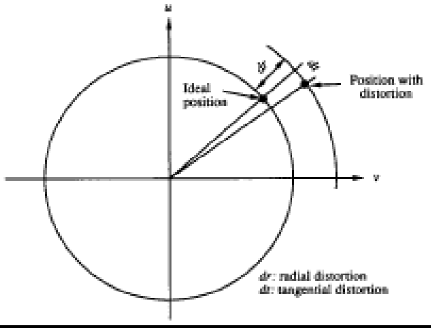
$$y_a - y_o = f\, Y^*_A / Z^*_A = \frac{r_{21}(X_A-X_C) + r_{22}(Y_A-Y_C) + r_{23}(Z_A-Z_C)}{r_{31}(X_A-X_C) + r_{32}(Y_A-Y_C) + r_{33}(Z_A-Z_C)}$$

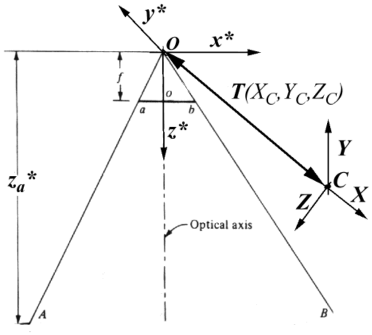
Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.

Modello reale della ripresa fotografica

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \, \frac{m_{11}(X - X_O) + m_{12}(Y - Y_O) + m_{13}(Z - Z_O)}{m_{31}(X - X_O) + m_{32}(Y - Y_O) + m_{33}(Z - Z_O)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \, \frac{m_{21}(X - X_O) + m_{22}(Y - Y_O) + m_{23}(Z - Z_O)}{m_{31}(X - X_O) + m_{32}(Y - Y_O) + m_{33}(Z - Z_O)}$$





Tassonomia dei parametri

$P^3 \to p^2$ Interior parameters → Focal length, f; Principal point (x_o,y_o)

$P^3 \to P^3$ Exterior parameters → Orientation (ω, ϕ, κ); Position (X_o,Y_o,Z_o)

$p^2 \to p^2_m$ Distortion parameters: g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, ……
$(f(x,y,x_o,y_o); g(x,y,x_o,y_o))$

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

Notazione matriciale

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{RT} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Roto-traslazione

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_o \\ 0 & f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione mediante scala (f) e traslazione (x_0,y_0)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

p = KMA P = H **P**

Che forma ha H?
Che dimensioni?

Proiezione in coordinate omogenee

$$P^* = MA\,P = \begin{Bmatrix} m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0) \\ m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0) \\ m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{RT} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{omogene} \\ y_{omogene} \\ w_{omogene} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^* = \begin{bmatrix} fX^* + x_0 Z^* \\ fY^* + y_0 Z^* \\ Z^* \end{bmatrix}$$

Dividendo per la terza coordianata, $w_{omogenee}$.

$$\begin{bmatrix} x_{cartesiana} \\ y_{cartesiana} \\ w = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX^*/Z^* + x_0 \\ fY^*/Z^* + y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sommario

- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

A) I punti nello spazio 3D: {**P**(X,Y,Z)}

B) I punti misurati sul piano immagine {**p**(x,y,f)}

C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega,\phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

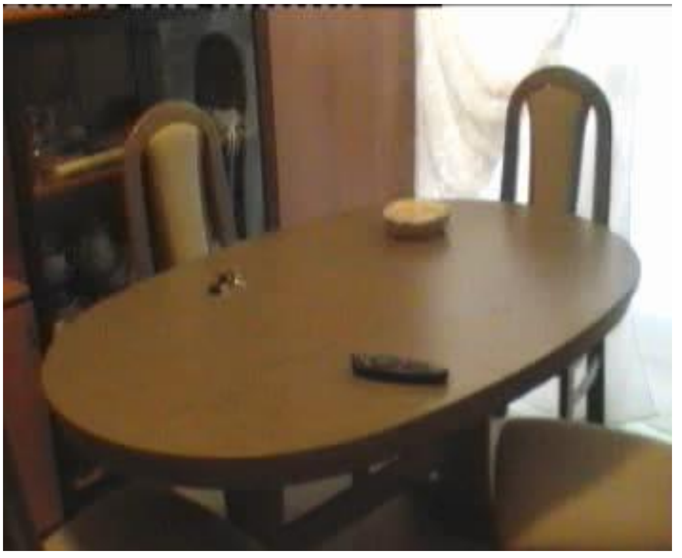
3 problemi:

A) + B) → C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).

B) + C) → A) Ricostruzione (ray intersection, VR).

A) + C) → B) Proiezione (augmented reality).

Augmented reality at work (proiezione)



Le operazioni richieste

- Posiziono l'oggetto virtuale nella scena reale manualmente
  - Definisco la sua posizione e orientamento
  - Definisco la sua grandezza (proiezione)ù
- Applico all'oggetto virtuale la stessa rototraslazione della camera
  - Calcolo la rototraslazione della camera a ogni frame (dallo spostamento di un insieme di punti identificati nella scena attraverso marker virtuali o reali)
  - Applico la stessa rototraslazione all'oggetto virtuale

Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

A) I punti nello spazio 3D: {**P**(X,Y,Z)}

B) I punti misurati sul piano immagine {**p**(x,y,f)}

C) I parametri {X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(ω,ϕ, k), f, x_o, y_o, {ap_x}, {ap_y}}

3 problemi:

A) + B) → C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).

B) + C) → A) Ricostruzione (ray intersection, VR).

A) + C) → B) Proiezione (augmented reality).

Set-up

Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to view the volume of interest!

Set-up requires:
- Cameras position
- Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

Optimal set-up may require some time
and/or
Multiple cameras are used.

In che cosa consiste la calibrazione

Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- Parametri esterni: X_C, Y_C, Z_C, $m_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- Parametri interni: x_o, y_o, f.
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, ……

Calibrazione dei parametri esterni può essere fatta separatamente dai parametri interni e/o di distorsione.

Perchè calibrare?

- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.
- Per proiettare oggetti virtuali su camere.

Calibrations

2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).

Metodi:
- Scacchiere (Zhang et al., Software in Matalab e OpenCV)
- Barra rigida con 2 marker (Borghese e Cerveri, 2000; utilizzata nei sistemi di Mocap; e.g. nello SMART-3D).
- Griglie 3D (non più utilizzato, Borghese et al., 1990)

Metodi ibridi:
- **Structure from** Motion (SfM), **SLAM** (Simultaneous Localization and Mapping), vengono ricostruite le coordinate 3D dei punti, stimati i parametri interni e determinato il movimento. Molto utilizzata in robotica.

Algoritmi:
- DLT (Direct Linear Transform -> da 9 parametri, si passa a 12 in un sistema lineare).
- Bundle adjustment. Stima iterativa dei parametri.

2D Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)

On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).

Calibrazione con punti in posizione nota

- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.
Ho 9 + D parametri aggiuntivi.

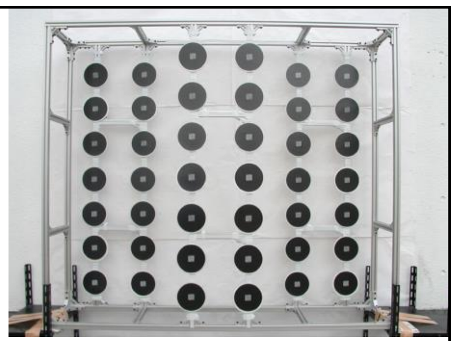
Ho bisogno di (9 + D) / 2 punti di controllo (ogni punto di controllo -> 2 equazioni).

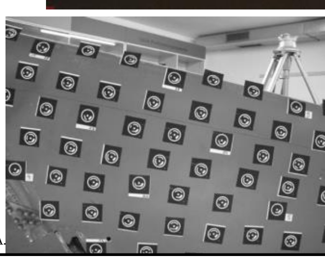
$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

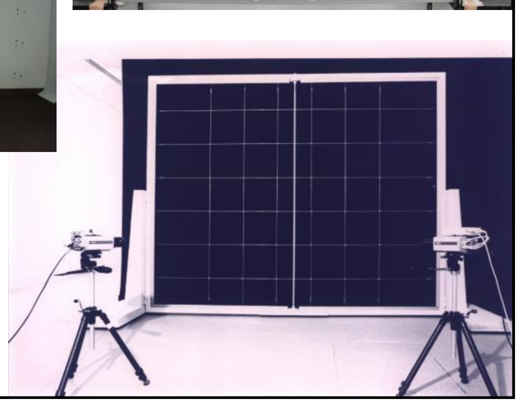
$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

Test field (Known control points)

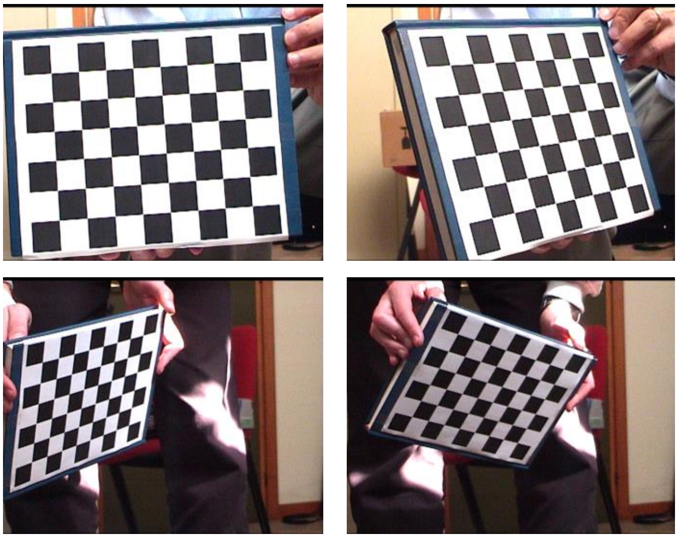
3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.







Calibration through a chessboard



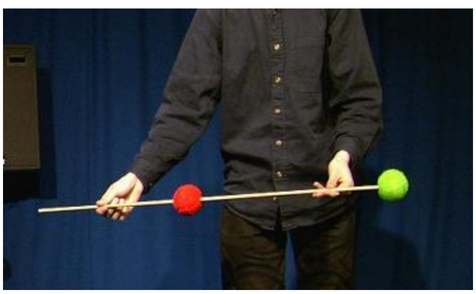
Estimated Parameters.

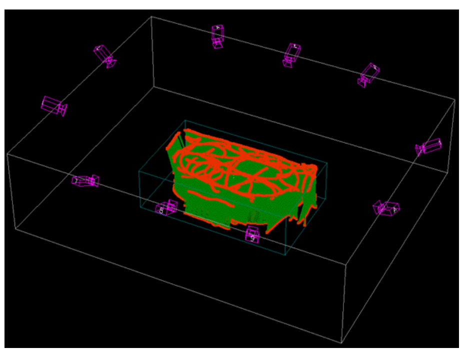
Distortions
Internal
External

http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/ Also suite in Matlab

Wand Calibration

2 steps:
- Establish external reference system (and initialize estimate)
- "Refinement": estimate of the parameters.

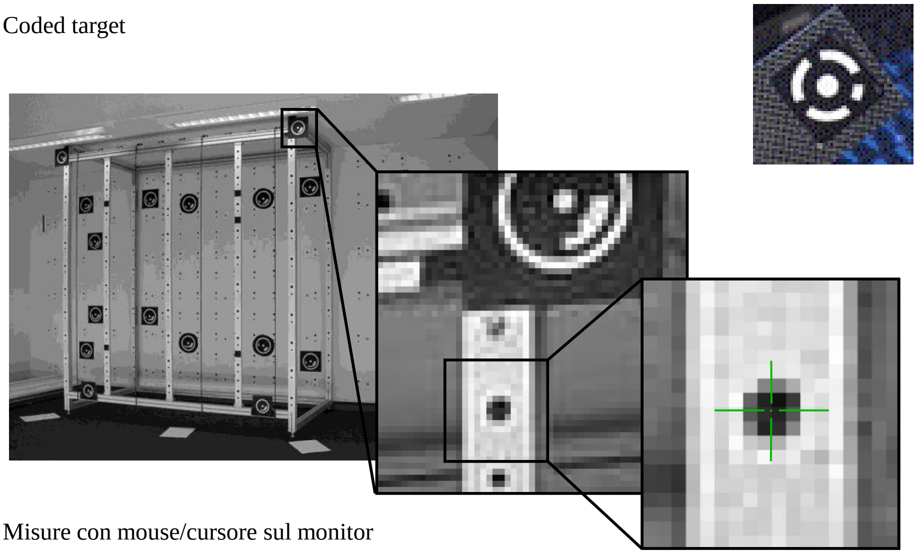




Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor, video).

Misurazione manuale dei punti di controllo

Coded target

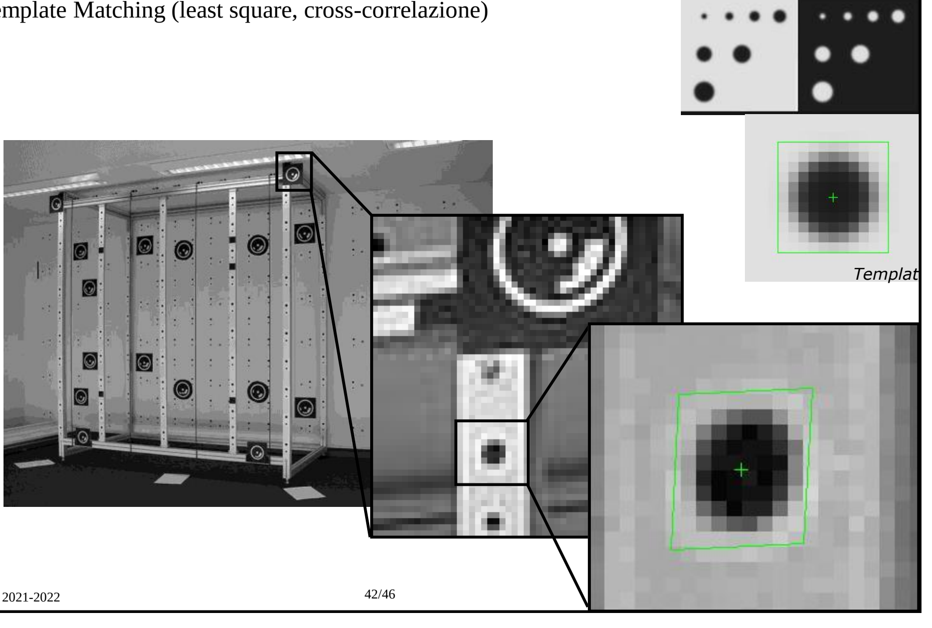


Misure con mouse/cursore sul monitor

Precisione: 1/4 - 1/8 Pixel

Misurazione automatica dei control points

Template Matching (least square, cross-correlazione)



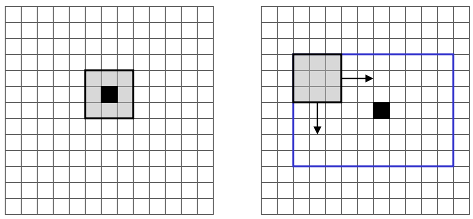
Cross-correlazione

Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

$$\gamma(x,y)=\frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L\sigma_R}$$

$$\sigma_L=\sqrt{\frac{\sum_i\sum_j\left(g_L(x_i,y_j)-\bar{g}_L\right)^2}{mn-1}}\qquad \sigma_R=\sqrt{\frac{\sum_i\sum_j\left(g_R(x_i,y_j)-\bar{g}_R\right)^2}{mn-1}}\qquad \sigma_{LR}=\frac{\sum_i\sum_j\left(\left(g_L(x_i,y_j)-\bar{g}_L\right)\left(g_R(x_i,y_j)-\bar{g}_R\right)\right)}{nm-1}$$

finestra di correlazione

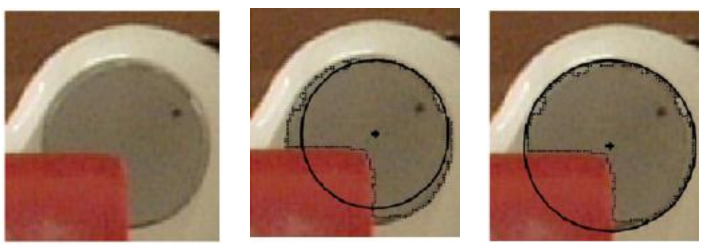


finestra di ricerca

Conjugate pixels

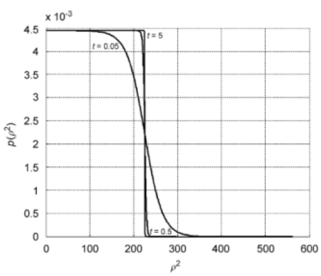
Search window

Approccio statistico al circle fitting



Frosio, Borghese – Pattern Recognition - 2008

$$L(\mathbf{p}_C, R_C)=\prod_{i=1}^{N} p(\rho_i^2, R_C).$$



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione

3 attori:

A) I punti nello spazio 3D: {**P**(X,Y,Z)}

B) I punti misurati sul piano immagine {**p**(x,y,f)}

C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega,\phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

A) + B) → C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).

B) + C) → A) Ricostruzione (ray intersection, VR).

A) + C) → B) Proiezione (augmented reality).

Sommario

- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione