



Realtà Virtuale Geometria I



Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano



Lesson content



- **Skeleton**
- Representation of the skeleton position



Visione 3D, Elaborazione di immagini e grafica



- **Vision 3D:** Image/s \Rightarrow 3D reconstruction of the static or dynamic scene and its interpretation
- **3D Graphics:** 3D model of the scene, static or dynamic \Rightarrow 3D visualization

Virtual Reality is a branch of 3D graphics

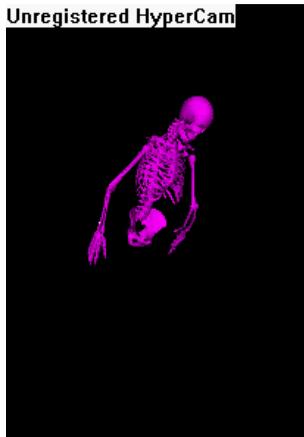
They meet on the ground of 3D visualization



Skeleton animation through rotations



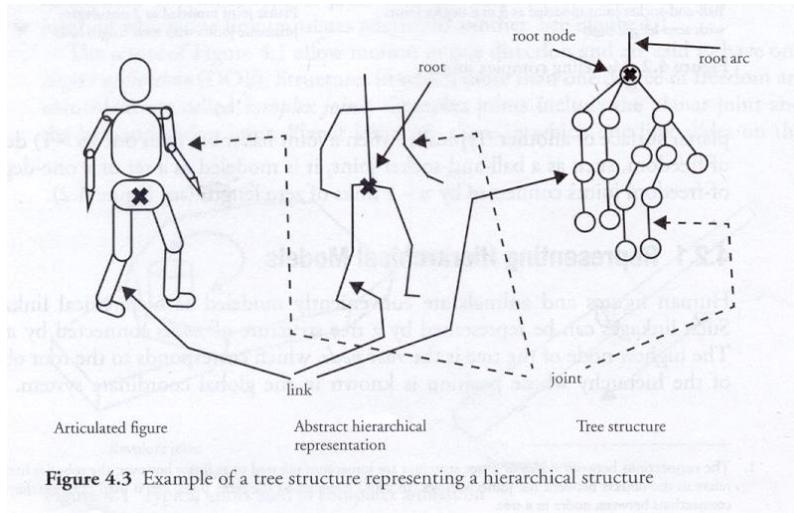
Unregistered HyperCam



Skeleton - segments connected by hinges



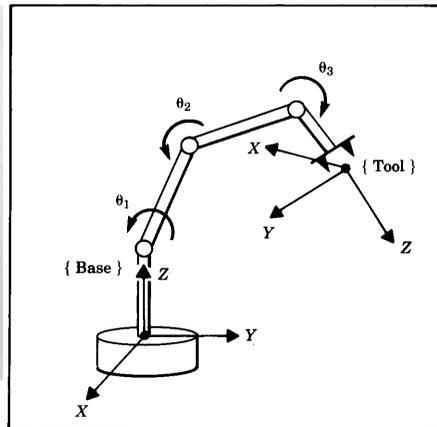
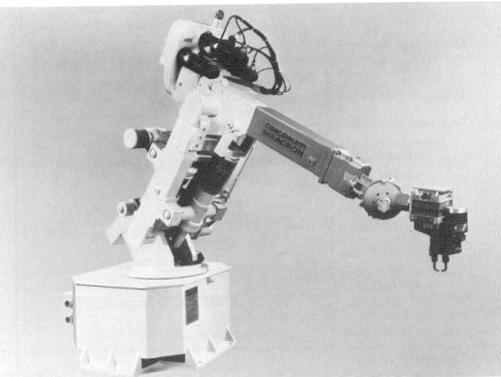
Graphical representation



Scheletro senza skin



Position description (skeleton = robot)



Kinematic chain. Hierarchical structure.

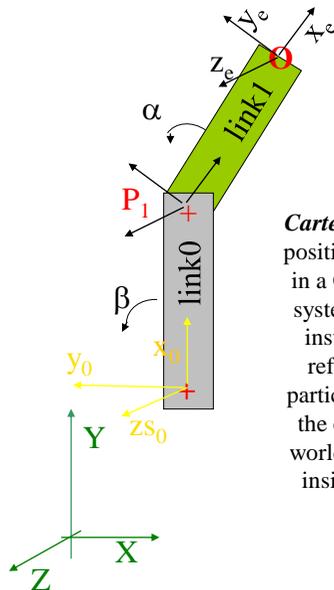
Position fully defined by degrees of freedom (movements allowed by articulated joints).

Frame. Reference system rigidly connected with part of the robot.

Convenzione di Denavit-Hartenberg importata dalla robotica.

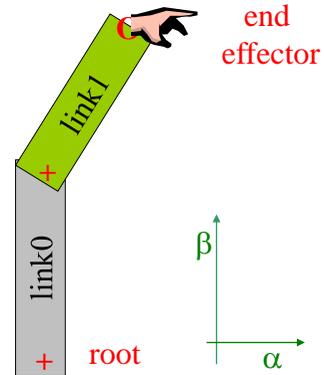


Movement spaces



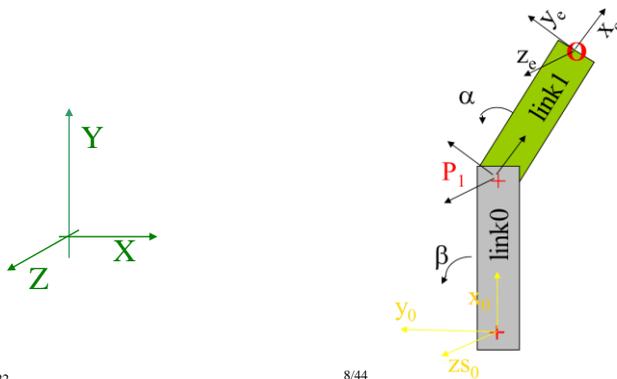
Joint space. It is the space of free parameters.
Here: α e β .

Cartesian space. It is the position of points, hinges in a Cartesian reference system. This can be for instance the absolute reference system. In particular the position of the end-effector as the world is often described inside a Cartesian 3D space.



Position description

- Transform from one frame into another.
- The transform is a function of the free parameters and of the geometrical parameters.
- We will consider here the rototranslation (rotation + translation) that can be expressed through matrixes.





Lesson content



- Skeleton
- Representation of the skeleton position

A.A. 2021-2022

9/44

<http://borghese.di.unimi.it/>

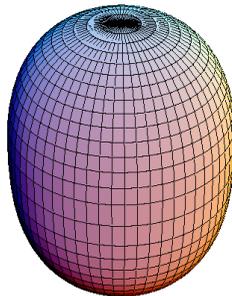


Descrizione della posizione di un corpo rigido (non solo scheletri)

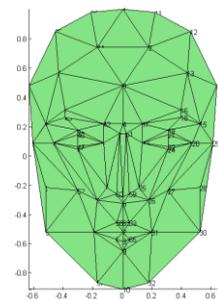


- Punto materiale: $\mathbf{P} = \mathbf{P}(X, Y, Z)$ – 3 dof
- Corpo rigido: 6 dof $[\mathbf{R}, \mathbf{T}]$.
- Corpo deformabile: N dof \mathbf{G} (poligono / griglia di controllo)

Griglia di controllo generica



Griglia di controllo semantica



A.A. 2021

se.di.unimi.it/



Coordinate omogenee



Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate cartesiane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo w :

$V(x, y, z)$ corrisponde a :

$$V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X/w$$

$$y = Y/w$$

$$z = Z/w$$

solitamente si sceglie $w=1$

$w = 0$ identifica il punto all' ∞ sulla retta per l'origine, passante per $V(x,y,z)$.

I coseni direttori saranno $x/|V|$, $y/|V|$, $z/|V|$.



Trasformazioni 3D



Traslazione - tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione - tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all'asse.



Scala - variazione della dimensione lungo un asse.



Traslazione in coordinate omogenee



Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

Traslazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x + 0 + 0 + T_x)$$

$$y' = (0 + y + 0 + T_y)$$

$$z' = (0 + 0 + z + T_z)$$

$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x' = x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x$$

$$y' = y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y$$

$$z' = z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z$$

coord. cartesiane



Scala in coordinate omogenee



$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x \cdot S_x + 0 + 0 + 0)$$

$$y' = (0 + y \cdot S_y + 0 + 0)$$

$$z' = (0 + 0 + z \cdot S_z + 0)$$

$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^s = x'/w' = (x \cdot S_x)/1$$

$$y^s = y'/w' = (y \cdot S_y)/1$$

$$z^s = z'/w' = (z \cdot S_z)/1$$

coord. cartesiane



Traslazione + Scala



$$V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione Scala

$$V'' = S \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x(x + T_x) \\ S_y(y + T_y) \\ S_z(z + T_z) \\ 1 \end{pmatrix}$$



Traslazione + Scala



$$V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione Scala

$$V'' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & S_x T_x \\ 0 & S_y & 0 & S_y T_y \\ 0 & 0 & S_z & S_z T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V$$

$$V'' = S(TV) = (ST)V$$

Fattorizzazione delle trasformazioni:
rappresentazione della trasformazione
in un'unica matrice



Scala + Traslazione

$$V'' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V$$

Scala

$$V'' = SV' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_z \\ 0 & 1 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V'$$

Traslazione

$$V'' = (TS)V = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione delle trasformazioni:
rappresentazione della trasformazione
in un'unica matrice.

Scala + Traslazione



La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

- 1) Quaternioni (asse + angolo)
- 2) Matrice di rotazione
- 3) Tre angoli di rotazione indipendenti

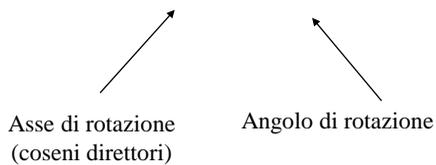




Quaternioni



Rappresentazione della rotazione mediante:
1 vettore + 1 scalare



Si può dimostrare che data una rotazione attorno all'asse identificato dal versore \mathbf{n} , di un angolo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, questa può essere rappresentata dal quaternion: $q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$



Algebra with quaternions



- La rotazione di un punto $p(X, Y, Z)$ si può ottenere mediante prodotto di Hamilton:
 - ◆ Dato q il quaternione che rappresenta la rotazione
 - ◆ Espresso un punto p mediante quaternione come: $p = [0, X, Y, Z]$
 - ◆ Il punto p' ottenuto da p dopo l'applicazione della rotazione q si ottiene come:

$$p' = q p q^*$$

$$q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$$

$$q^* = (\cos \theta/2, -\mathbf{n} \sin \theta/2)$$

- Più semplicemente, senza coinvolgere il prodotto di Hamilton...



Matrici di rotazione e quaternioni



Si può trasformare un quaternioni in una matrice di rotazione secondo:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_j^2 + q_k^2) & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_i q_k + q_j q_r) \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_k^2) & 2(q_j q_k - q_i q_r) \\ 2(q_i q_k - q_j q_r) & 2(q_j q_k + q_i q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_j^2) \end{bmatrix}$$

Dove: $q = \{q_r, q_i, q_j, q_k\}$

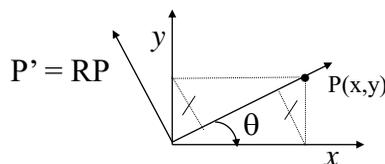


La rotazione attorno a z (forma matriciale)



$$\sin \theta = \cos (90-\theta)$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}\mathbf{P}$$

Matrice di rotazione

$$\sum_{i=1}^3 m_{ij}^2 = 1$$

$$\det(\mathbf{M}) = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 m_{ij} m_{ik} = 0 \quad i \neq k$$

Matrice ortonormale

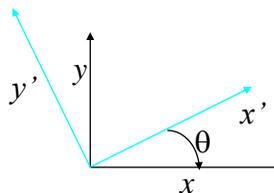


Significato geometrico della matrice di rotazione



Ruotiamo il sistema di riferimento xy in $x'y'$ di un angolo $-\theta$.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

$$M = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento xy sugli assi di $x'y'$.



Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)



$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta + 0 + 0)$$

$$x^{R_z} = x' / w' = (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta) / 1$$

$$y' = (-x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta + 0 + 0)$$

$$y^{R_z} = y' / w' = (-x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta) / 1$$

$$z' = (0 + 0 + z + 0)$$

$$z^{R_z} = z' / w' = (z \cdot 1) / 1$$

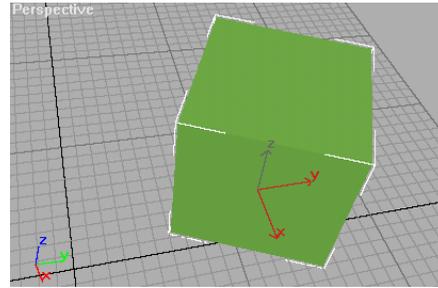
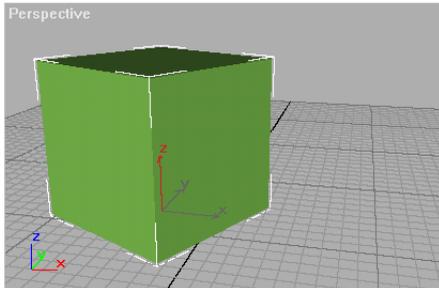
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. cartesiane

coord. omogenee



Orientamento di un corpo rigido nello spazio



Tre rotazioni indipendenti → tre parametri.

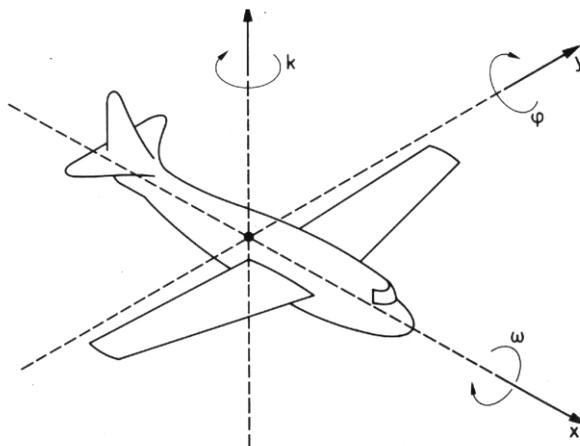


Angoli di orientamento nello spazio 3D



Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω , ϕ , k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.





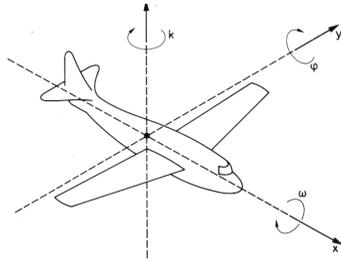
Rotazione attorno ad un singolo asse

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω , ϕ , k): rollio, beccheggio e deriva.

$$R_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$R_{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

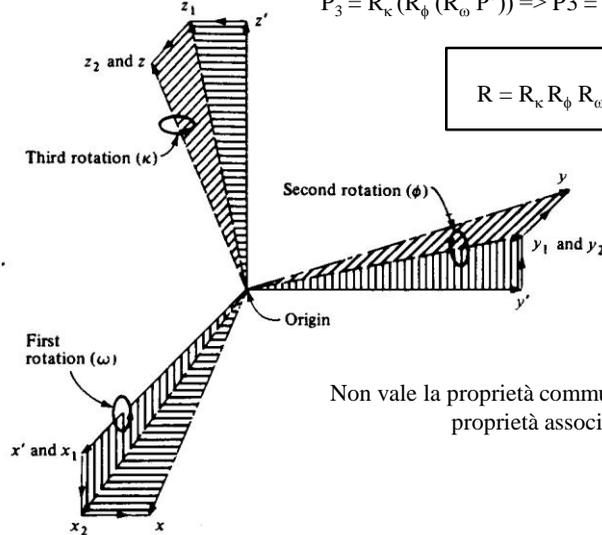
$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotazioni sequenziali

$$P_3 = R_{\kappa}(R_{\phi}(R_{\omega}P')) \Rightarrow P_3 = (R_{\kappa}R_{\phi}R_{\omega})P'$$

$$R = R_{\kappa}R_{\phi}R_{\omega}$$



Non vale la proprietà commutativa, vale la proprietà associativa.

Ciascuna rotazione avviene su uno dei piani coordinati.



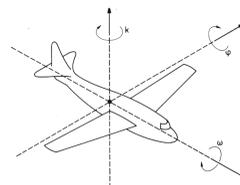
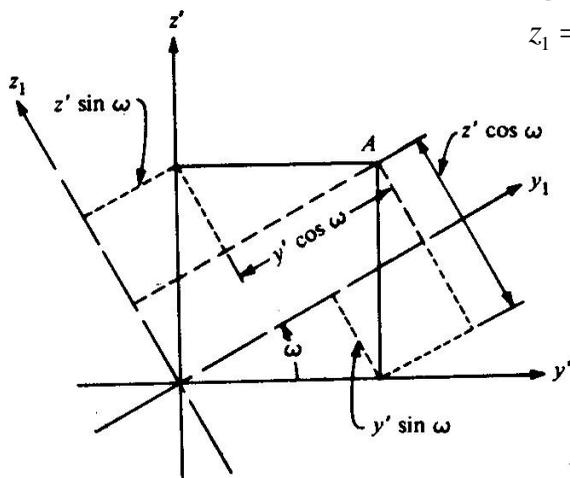
I) Rotazione attorno all'asse x (roll)



$$x_1 = x'$$

$$y_1 = y' \cos \omega + z' \sin \omega$$

$$z_1 = -y' \sin \omega + z' \cos \omega$$



<http://borghese.di.unimi.it/>



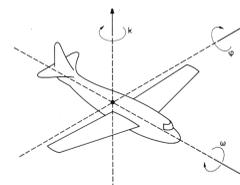
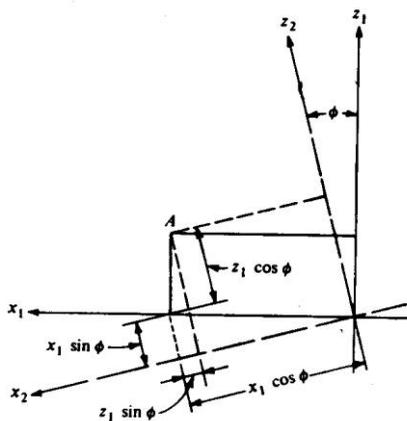
II) Rotazione attorno all'asse y (pitch)



$$x_2 = x_1 \cos \phi - z_1 \sin \phi$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = +x_1 \sin \phi + z_1 \cos \phi$$



$$x_2 = x' \cos \phi - (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \sin \phi$$

$$y_2 = y' \cos \omega + z' \sin \omega$$

$$z_2 = +x' \sin \phi + (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \cos \phi$$

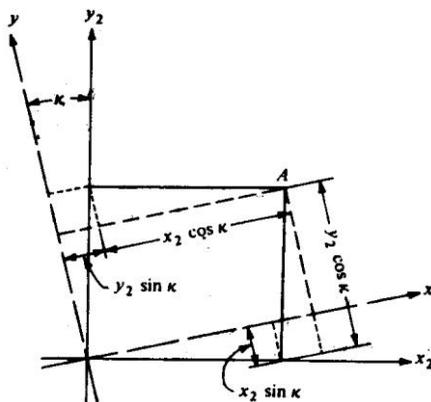
A.A. 2021-2022

30/44

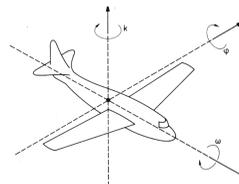
<http://borghese.di.unimi.it/>



III) Rotazione attorno all'asse z (yaw)



$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 \cos k + y_2 \sin k \\ y_3 &= -x_2 \sin k + y_2 \cos k \\ z_3 &= z_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_3 &= [x' \cos \phi - (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \sin \phi] \cos k + [y' \cos \omega + z' \sin \omega] \sin k \\ y_3 &= -[x' \cos \phi + (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \sin \phi] \sin k + [y' \cos \omega + z' \sin \omega] \cos k \\ z_3 &= +x' \sin \phi + (-y' \sin \omega + z' \cos \omega) \cos \phi \end{aligned}$$

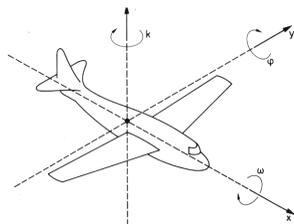
A.A. 2021-2022

31/44

<http://borghese.di.unimi.it/>



Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$R = R_\kappa R_\phi R_\omega$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos k & \sin \omega \sin \phi \cos k + \cos \omega \sin k & -\cos \omega \sin \phi \cos k + \sin \omega \sin k \\ -\cos \phi \sin k & -\sin \omega \sin \phi \sin k + \cos \omega \cos k & \cos \omega \sin \phi \sin k + \sin \omega \cos k \\ \sin \phi & -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega \cos \phi \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.

Rotazioni "semplici" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale efficiente del calcolo.

A.A. 2021-2022

32/44

<http://borghese.di.unimi.it/>



Rotazione generica (coordinate omogenee)



$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Esempi di trasformazioni



$$V'' = S(T V) \Rightarrow V'' = (S T) V$$

$$V'' = R_\kappa(R_\phi(R_\omega V)) \Rightarrow V'' = (R_\kappa R_\phi R_\omega) V$$

$$V'' = R V$$

$$V''' = T(R V) \Rightarrow V''' = (T R) V$$



Trasformare gli oggetti



- i vertici dell'oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate)
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna V .
- R , D e S sono matrici associate a rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene come:
 $V'=V+D$ traslazione, D è un vettore di traslazione
 $V'=SV$ scala, S è una matrice di scala
 $V'=RV$ rotazione, R è una matrice di rotazione
- Il punto trasformato si ottiene **in coordinate omogenee** come:
 $V'=V * D$ traslazione, D è una matrice 4x4 che contiene il vettore di traslazione
 $V'=S * V$ scala, S è una matrice di scala 4 x 4.
 $V'=R * V$ rotazione, R è una matrice 4x4 che contiene la matrice di rotazione



La rototraslazione in forma matriciale



$$P' = RP + T \Rightarrow P' = AP$$

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione



Composizione di trasformazioni



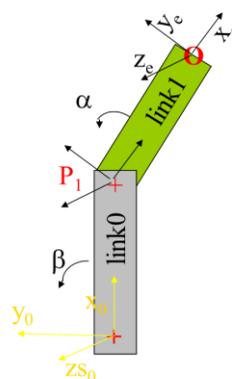
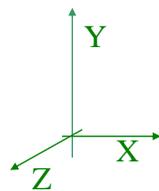
- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

$$V'' = A_2 A_1 V = A_2(A_1 V) = (A_2 A_1) V = A V$$

- la trasf. A_1 viene applicata per prima!
- ricordiamo che il prodotto di matrici non è commutativo: $A_2 A_1 \neq A_1 A_2$, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1 V) = (A_2 A_1) V$.
- L'applicazione di trasformazioni dipende dall'ordine con cui sono applicate.**
- Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice, fattorizzazione delle single matrici di trasformazione.**



Trasformazioni inverse



Trasformazione diretta: passo da $\{X_e, Y_e, Z_e\}$ nel sistema di riferimento end-point a $\{X_A, Y_A, Z_A\}$ nel sistema di riferimento assoluto.

Trasformazione inversa: passo da $\{X_A, Y_A, Z_A\}$ nel sistema di riferimento assoluto a $\{X_e, Y_e, Z_e\}$ nel sistema di riferimento di end-point.



Trasformazioni inverse



- La trasformazione inversa si ottiene invertendo l'ordine delle trasformazioni ed invertendo le singole matrici:

$$A = A_3 A_2 A_1 \Leftrightarrow A^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1}$$

$$V'' = AV \Rightarrow V = A^{-1}V''$$

- Denotiamo le inverse come le matrici di trasformazione: T^{-1} , S^{-1} , R^{-1} .
- La traslazione inversa si ottiene **negando** i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il **reciproco** dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene **negando l'angolo di rotazione. Matrice trasposta.** Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa \rightarrow R^{-1} = R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$



La rototraslazione inversa in forma matriciale



$$P' = RP + T \Rightarrow P' = AP$$

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T R P = R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P'$$

Proiezione di T sugli assi di arrivo: $r_i \cdot T$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - (r_{11} T_x + r_{21} T_y + r_{31} T_z) \\ - (r_{12} T_x + r_{22} T_y + r_{32} T_z) \\ - (r_{13} T_x + r_{23} T_y + r_{33} T_z) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

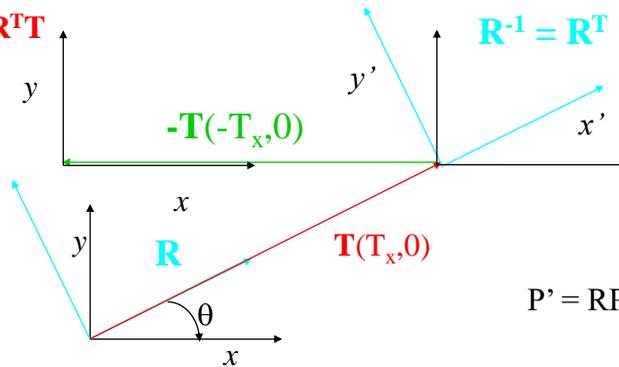
Vettore di traslazione (inverso)



Perchè $-R^T T$?

Solo così applicando trasformatata diretta e inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.

$$P = R^T P' - R^T T$$



$$P' = RP + T$$

$R^T T$ è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.



Trasformazioni rigide

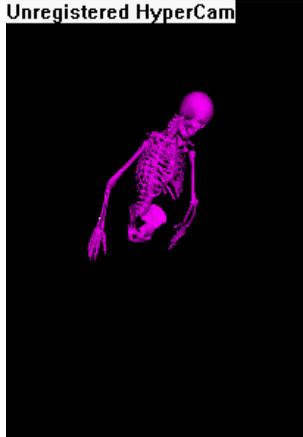
- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, scala e traslazione.



Skeleton animation through rotations



Unregistered HyperCam



Skeleton - segments connected by hinges

We have to specify the orientation of one segments with respect to the previous one -> stack of transformations.



Sommario della lezione



- I comportamenti
- Comportamento reattivo
- Comportamento deliberativo (FSM)
- Gli scheletri
- Rappresentazione della posizione di uno scheletro