Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso dei joint

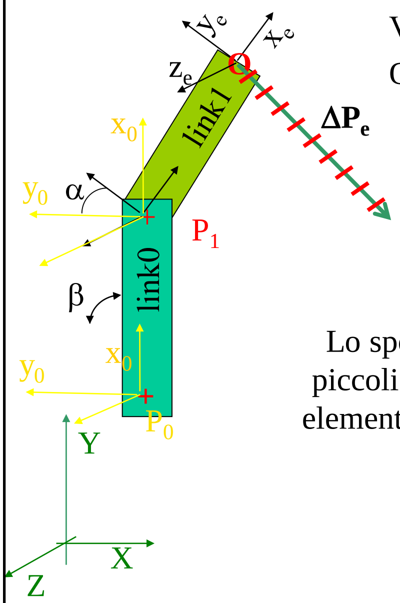
Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Cinematica inversa

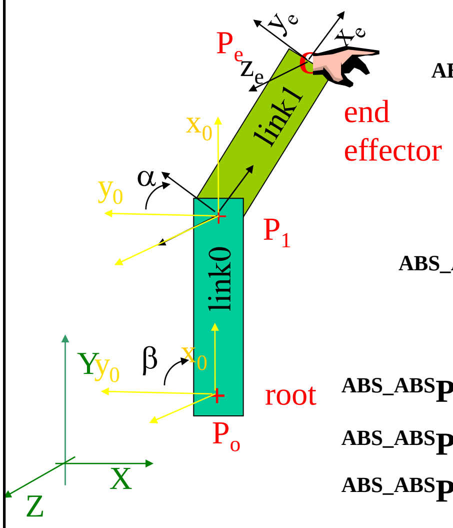


Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

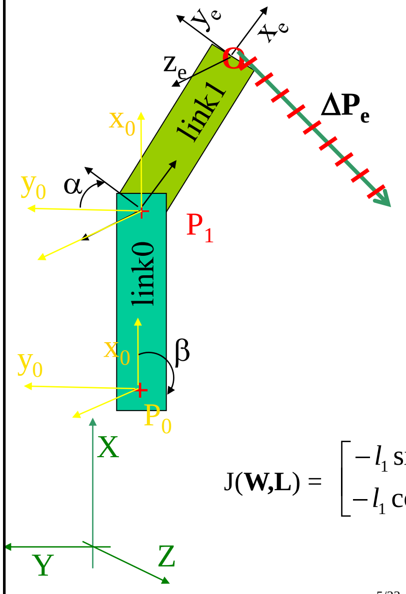
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}(t) = {}^{ABS\_ABS}_{\ \ e}\mathbf{A}(t) \ \ {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Cinematica inversa



Consideriamo la trasformazione end_point -> joint.

La trasformazione joint -> end_point è:

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\ \mathbf{(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$

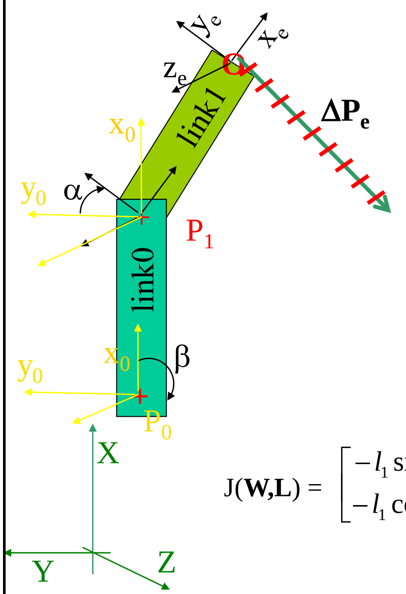
$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\ \mathbf{(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$

$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\ \mathbf{(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$

$$^{\mathbf{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema sottodeterminato



Sono 2 equazioni in 4 incognite

End point: $dP_e=\{X_e, Y_e\}$: 2 dof

Parametri di controllo:

- dα
- dβ
- dT_x
- dT_y

Esistono ∞^2 modi di spostare l'end-point.

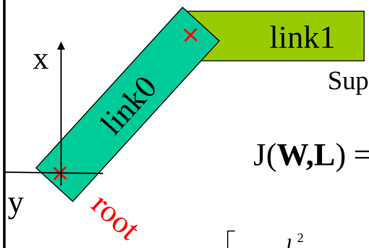
Quale scegliamo?

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 2, n = 4)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \underset{2\ x\ 1}{\begin{bmatrix} dP_{e_x}/dt \\ dP_{e_y}/dt \end{bmatrix}} \qquad x = \underset{4\ x\ 1}{\begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ dT_x/dt \\ dT_y/dt \end{bmatrix}}$$



Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

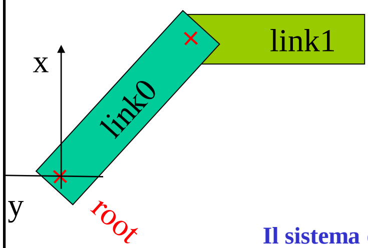
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0\sin 45 & -l_0\cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0\sin 45 & -l_0\cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$$

$$\det(J^T * J) = 0$$



Il sistema è indeterminato, ammette inifinite soluzioni.

Voglio poterne determinare una secondo un qualche criterio ragionevole.

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Decomposizione ai valori singolari

A X = **b**

U W V X = **b**

Ortonormale M x N
Determinante = 1

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N
Determinante = 1

Singular Value Decomposition

Se A è singolare -> almeno 1 dei $w_{ii} = 0$.

SVD e soluzione dei sistemi lineari

A X = b $\Rightarrow$ **$(A^T A)$ X = A^T B** $\Rightarrow$ **X = $(A^TA)^{-1}A^T$b**

Numero di condizionamento varia circa con (A'*A).

Soluzione tramite Singular Value Decomposition

A X = b **(U W V) X = b** x = $(UWV)^{-1}$ b

x = $(V^{-1} W^{-1} U^{-1})$ b $\boxed{\mathbf{x = V^T W^{-1} U^T b}}$

W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W.
Le matrici inverse di U e V sono le loro trasposte.

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Numero di condizionamento varia circa con A.

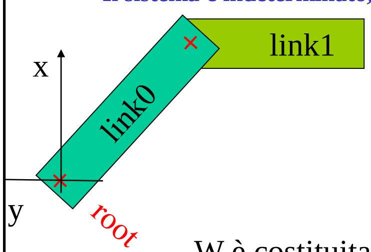
Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T * J) = 0$ $x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$\boxed{\mathbf{x = (V' W^{-1} U') \, J^T \, b}}$

W è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$x = (A'{*}A)^{-1}A'{*}\,b$ $\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'\,A'b}}$

Se A è rank-deficient, A'*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W.

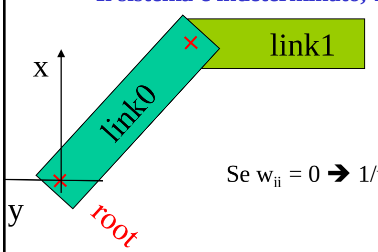
In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T{*}J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(J^T{*}J) = 0$? $x = (J^T{*}J)^{-1} * J^T * b$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$\boxed{\mathbf{x = V'\,\tilde{W}^{-1}\,U'\,J^T\,b}}$

Se $w_{ii} = 0 \Rightarrow 1/w_{ii} = 0$

$\tilde{W}^{-1}$ è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gli zeri sulla diagonale corrispondono ai valori singolari nulli.

Soluzione (m=2, n=4)

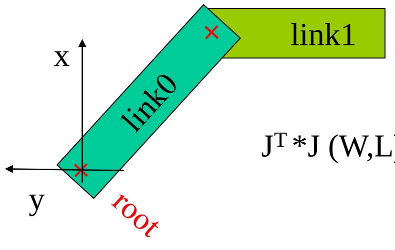
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\det(J^T * J) = 0$



$$J^T * J\ (W,L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

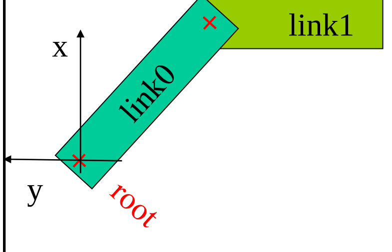
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

$\det(J^T * J) = 0$

```
>>[U W V] = svd(JTJ)
U =
   -0.4469    0.5005   -0.7398    0.0497
   -0.8633   -0.2591    0.3622    0.2375
    0.2234   -0.2502   -0.2432    0.9101
    0.0710    0.7873    0.5122    0.3359
W =
   18.1915         0         0         0
         0    1.4653         0         0
         0         0    0.0000         0
         0         0         0    0.0000
V =
   -0.4469    0.5005    0.7407    0.0336
   -0.8633   -0.2591   -0.3333   -0.2766
    0.2234   -0.2502    0.3436   -0.8771
    0.0710    0.7873   -0.4713   -0.3911
```



Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

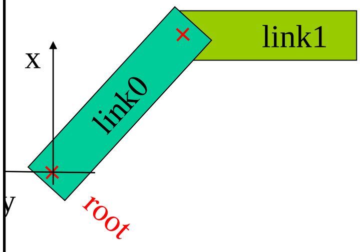
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$x = V' W^{-1} U' J' b$

$A = \tilde{W}^{-1} =$

0.0550	0	0	0
0	0.6824	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\det(J^T * J) = 0$



$>>x = V' * \tilde{W}^{-1} * U' * J' * b$

x =
-0.2251
-0.1281
0.1125
-0.1811

Norma l^2 pari a 0.0839

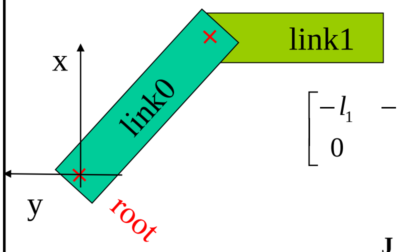
Verifica Soluzione

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$x = V' W^{-1} U' J' b$

Soluzione mediante pseudo-inversa



$J * \Delta w = \Delta P$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta w}} = \underbrace{[1\ \ 0]^T}_{\mathbf{\Delta P}}$$

Spostamento ottenuto = spostamento desiderato

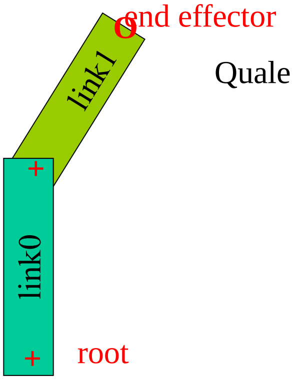
Norma l^2 pari a 0.0839

Utilizzo più o meno con la stessa ampiezza tutti i gradi di libertà

Proprietà della Soluzione

Proprietà: **soluzione a norma minima**

Altre soluzioni possibili (tali per cui Ax = b), si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione



Quale altra soluzione sarebbe possibile per ottenere lo spostamento desiderato: {1 0}?

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P^e_x = 1$ $\Delta P^e_y = 0$

Norma l^2 pari a 1 > 0.0839

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Come rendere risolubile il sistema

$dP = J\,dW$ $\min \| dP - J\,dW \|$ $\|dW\|$ a norma minima

$b - Ax = \nu$

Inserisco il vincolo $\|dW\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare.

Il problema si trasforma in un problema di **regolarizzazione**

$$\min \left(\| J\,dW - dP \|^2 + \lambda \|dW\|^2\right)$$

Dove la norma è intesa in l_2.

$$\min \left[(J\,dW - dP)^2 + \lambda\,(dW)^2 \right]$$

Risulta un funzionale quadratico di "facile" minimizzazione

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min \left(\| J\,dW - dP \|^2 + \lambda \|dW\|^2\right)$$

dW penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, $\min \left(\|J\,dW - dP\|^2 + \lambda \|dW\|^2 \right)$

il risultato è relativamente semplice $2[J^T(J\,dW - dP) + \lambda\,dW] = 0$

$$J^T(J\,dW - dP) + \lambda\,dW = 0$$

Da cui risulta:

$$J^T(J\,dW - dP) + \lambda I\,dW = 0 \Rightarrow (J^TJ + \lambda I)\,dW - J^TdP = 0$$

$$\boxed{dW = (J^TJ + \lambda I)^{-1}J^T\,dP)}$$

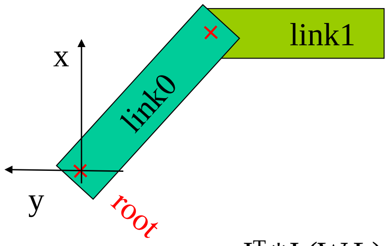
Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)

$$
J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$ $\quad$ $\det(J^T * J) = 0$

$l_0 = l_1 = 2 \quad dP^e_x = 1 \quad dP^e_y = 0 \quad \lambda = 1$ $\quad$ $\det(J^T * J + I) \neq 0$



$$
J^T * J\ (W,L) + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}
$$

Soluzione senza regolarizzazione (m=2, n=4)

$$
J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

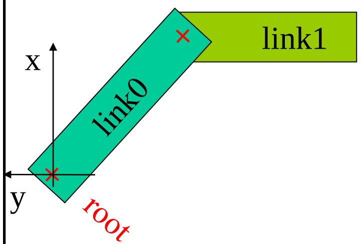
$l_0 = l_1 = 2 \quad dP^e_x = 1 \quad dP^e_y = 0$

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'J'b}}$

$A = \widetilde{W}^{-1} =$

0.0550	0	0	0
0	0.6824	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\det(J^T * J) = 0$




```
>>x =  V' * W-1 * U' * J' * b
x =
  -0.2251
  -0.1281
   0.1125
  -0.1811
```

Norma l^2 pari a 0.0839

Esempio regolarizzazione

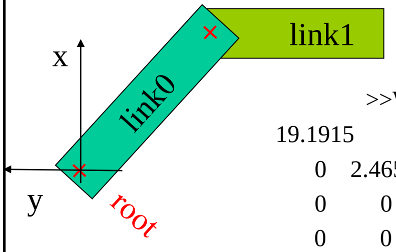
$$J^T * J + I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$ >>det = 47.3137



Soluzione con regolarizzazione con λ =1

>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>dW =
-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>dP =
0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto $\neq$ spostamento desiderato

||dW|| = 0.0647, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione

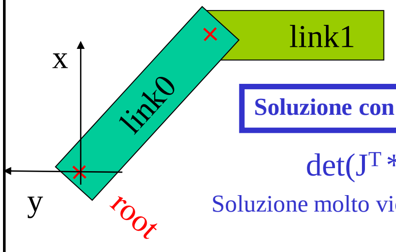
$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$



Soluzione con regolarizzazione con λ =0.01

$\det(J^T * J + \lambda I) = 0.0027$

Soluzione molto vicina a quella non regolarizzata

>>dW =
-0.2242
-0.1284
0.1121
-0.1798

>>dP =
0.9989
0.0018

||dW|| = 0.116

Soluzione con regolarizzazione con λ =10

$\det(J^T * J + \lambda I) = 3.32 \times 10^{-4}$

>>dW =
-0.0804
-0.1162
0.0402
-0.0149

>>dP =
0.5978
0.1494

Come introdurre un peso sui joint

$dP = J\, dW$ $\min \| dP - J\, dW\|$ $\|dW\|$ a norma minima

Inserisco il vincolo $\|dW\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare e peso il costo sui vari joint in modo differente.

$$\min (\| J\, dW - dP \| + \lambda\, C\, \|dW\|)$$

Dove la norma è intesa in l_2 e C è una matrice diagonale

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\min [\, (J\, dW - dP)^2 + \lambda\, C(dW)^2 \,]$$

Risulta un funzionale quadrato di "facile" minimizzazione

2 termini:

- Fedeltà al movimento $\| J\, dW - dP \|$
- "utilizzo" dei gradi di libertà $\|dW\|$

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min (\| J\, dW - dP \|^2 + \lambda\, C\|dW\|^2)$$

$d\Theta$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, $\min (\| J\, dW - dP \|^2 + \lambda\, C\|dW\|^2)$

il risultato è relativamente semplice $2[J^T(J\, dW - dP) + \lambda\, C\, dW] = 0$

$$J^T(J\, dW - dP) + \lambda\, C\, dW = 0$$

Da cui risulta:

$$(J^TJ + \lambda\, C)\, dW = J^T dP$$

$$\boxed{dW = (J^TJ + \lambda\, C)^{-1} J^T\, dP)}$$

Esempio regolarizzazione con pesi

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

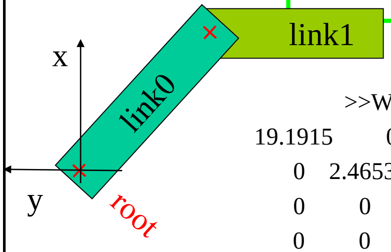
$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$

Supponiamo: c1 = c2 = c3 = c4 = 1

Incorporiamo λ dentro i c_i $\rightarrow$ $\lambda = 1$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

>>det = 47.3137



Soluzione con regolarizzazione con pesi unitari C = I

>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>dW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>dP =

0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto $\neq$ spostamento desiderato

$\|dW\|$ = 0.2588, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione con pesi non uguali

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

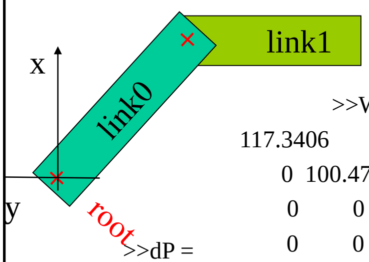
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$

Supponiamo: c1 = c2 = 100; c3 = c4 = 1

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

>>det = 4.3539e+004



Soluzione con regolarizzazione con pesi inferiori applicati alle traslazioni

>>Ws2 =

117.3406	0	0	0
0	100.4701	0	0
0	0	1.9953	0
0	0	0	1.8510

>>dW =

-0.0093
-0.0157
0.4639
-0.0111

Utilizzo molto Tx

>>dP =

0.5361
0.0111

Spostamento ottenuto $\neq$ spostamento desiderato

$\|dW\|$ = 0.1161, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+p_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+p_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+p_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+p_4 \end{bmatrix}$$

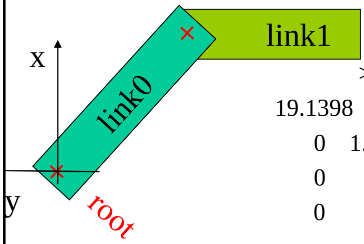
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e{}_x = 1$ $dP^e{}_y = 0$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = 1; c3 = c4 = 0.01



>>det = 1.1992

>>Ws2 =

$$\begin{matrix} 19.1398 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9568 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0618 \end{matrix}$$

>>x

$$\begin{matrix} -0.0172 \\ -0.0288 \\ 0.8589 \\ -0.0403 \end{matrix}$$

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

>>dP =

0.9914
0.0004

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)

||dW|| = 0.2151, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti di dTx e dTy

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

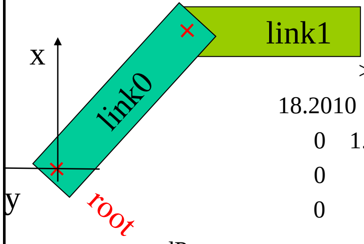
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e{}_x = 1$ $dP^e{}_y = 0$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = 0.01; c3 = c4 = 0.0001



>>det = 1.17×10^{-4}

>>Ws2 =

$$\begin{matrix} 18.2010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4686 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0068 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0006 \end{matrix}$$

>>x

$$\begin{matrix} -0.0173 \\ -0.0290 \\ 0.8663 \\ -0.0410 \end{matrix}$$

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

>>dP =

0.9999
0.0000

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)

||dW|| = 0.2170, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti di dTx e dTy

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo