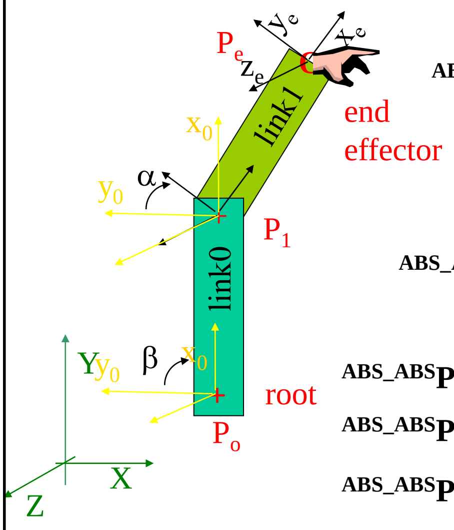
Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso di end-point

Prof. Alberto Borghese

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

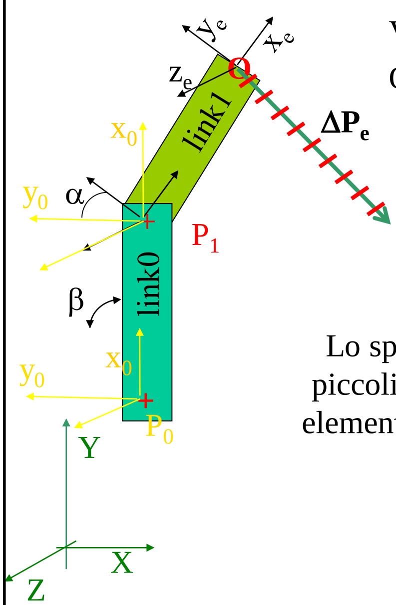
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{\ \ \ \ \ e}\mathbf{A(t)} \ \ {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\,\mathbf{(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\,\mathbf{(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\,\mathbf{(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell’end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

Chiamiamo **$W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$\mathbf{\Delta P = J\, \Delta W}$$

Come vengono trattate le velocità

Quando la matrice del Jacobiano è quadrata, risolvo la cinematica inversa mediante inversione della matrice Jacobiano

$$\mathbf{V = J\,\dot{\Theta}} \longrightarrow \mathbf{J^{-1}V = \dot{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

$\boxed{\text{Elemento chiave è il Jacobiano, } \mathbf{J}.}$

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a tutti i parametri liberi.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $P_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento)

1) Identifico ΔP dalla posizione corrente verso la posizione finale.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w.
3) Calcolo invertendo il sistema lineare il valore Δw associato ($\Delta w = J^{-1} \Delta P$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo (liberi): $w + \Delta w$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell'end point: $P_{new} = f(w + \Delta w, L)$. In generale, $P_{new} \neq P + \Delta P$ (il modello lineare è approssimato).

Fino a quando non arriva sufficientemente vicino a P_{finale}.

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + ... \quad a_{1N}\, x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + ... \quad a_{2N}\, x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + ... \quad a_{MN}\, x_N = b_M$

$\{a_{ij}\}$ – coefficienti in numero N x M

$\{x_j\}$ – incognite, N

$\{b_j\}$ – termini noti, M

$J\,\dot{\Theta} = V$

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N
(Matrice di disegno)

Vettore delle incognite

I sistemi lineari sono interessanti perchè sono manipolabili con operazioni semplici (algebra delle matrici)

Esempio:

$3x_1 + 2\, x_2 + ... \quad 4x_N = 5$

$4x_1 -2\, x_2 + ... \quad 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + ... \quad -3\, x_N = -1$

$\{x_j\}$ soddisfano tutte le equazioni

Matrice inversa

Viene definita per matrici **quadrate** (N x N):

$$A^{-1}A = I$$

Esiste ed è unica se $\det(A) \neq 0$.

Inv(A) è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna per il loro complemento algebrico (formula di Leibniz).

$\mathbf{Ax = b} \Rightarrow A^{-1}A\,x = A^{-1}\,b \Rightarrow Ix = A^{-1}\,b \Rightarrow \boxed{\mathbf{x = A^{-1}\,b}}$

Sistema lineare: soluzione robusta (SVD)

$\mathbf{A\,x = b}$

$\mathbf{A\ = U^T\,W\,V}$

Ortonormale M x N

Diagonale (N x N)

Ortonormale N x N

Se N = M

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

$\mathbf{A^{-1}\ =\ (U^T\,W\,V)^{-1}\ =\ V^T\,W^{-1}\,U}$

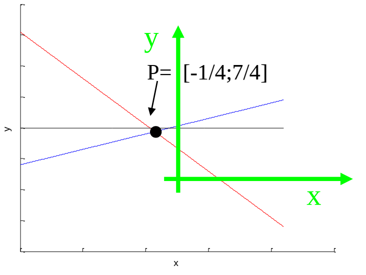
W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$
w_{ii} sono detti valori singolari.

$$\mathbf{Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}\,b = V^T\,W^{-1}\,U^T\,b}$$

Esempio di soluzione di un sistema lineare

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$



$1\ x_1 - 1\ x_2 = -2$

$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

$y = x_2$

$x = x_1$

Risolvo per sostituzione: $x_1 = -2 + 1\ x_2$.

$-3(-2 + x_2) - x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 7/4$

$x_1 - 1/4 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1/4$

Rette e sistemi lineari

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$

$y = x_2$

$x = x_1$

Scrivo il sistema lineare: Ax = b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$1\ x_1 - 1\ x_2 = -2$

$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

X è una soluzione se soddisfa tutte le equazioni del sistema stesso.

Soluzione di sistemi lineari quadrati

$x = A^{-1} b$

Condizione di esistenza dell'inversa è $\det(A) \neq 0$

Il sistema ammette 1 ed 1 sola soluzione se $\det(A) \neq 0$

Altrimenti: **nessuna** o **infinite** soluzioni

Risoluzione di un sistema 2x2

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$$

$\mathbf{y = Ax}$

$\mathbf{x = A^{-1} y}$

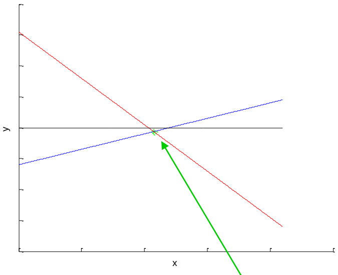
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$

Esempio

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$



$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$

$-3\,x_1 - 1\,x_2 = -1$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Rango di A è pieno

$\det(A) = 1(-1)-(-1)(-3)=-1-3=-4 \neq 0$

P = [-1/4 7/4]

A^{-1}

$x = A^{-1}\, b = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +3 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

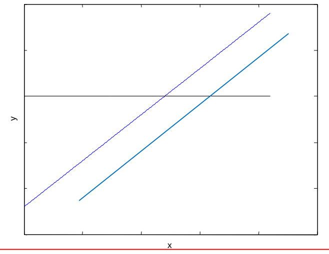
$x_1 = -1/4$

$x_2 = 7/4$

Esempio di soluzione non univoca (det(A) = 0)

$y = x + 2$

$2y = 2x + 3$



$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$

$2\,x_1 - 2\,x_2 = -3$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Non esistono soluzioni

$\det(A) = 1(-2)-(-1)(2)=-2+2=0$ La soluzione non esiste o ∞ soluzioni.

$y = x + 2$

$2y = 2x + \mathbf{4}$

La soluzione, non è unica: tutti i punti della retta soddisfano contemporaneamente le 2 equazioni. In questo caso ∞ soluzioni: rette sovrapposte.

Sistema M x N, M > N

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{1N}\, x_N = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{2N}\, x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{MN}\, x_N = b_M$

Esempio:
$3x_1 + 2\, x_2 + \ldots\ldots\ \ 4x_N = 5$
$4x_1 - 2\, x_2 + \ldots\ldots\ \ 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + \ldots\ldots\ \ -3\, x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A x = b

A è M x N, M > N, **non è una matrice quadrata**.

1, nessuna, ∞ soluzioni.

Ho delle equazioni di troppo, devono essere correlate (combinate linearmente), perché il sistema ammetta soluzione.

Posso sempre calcolare la soluzione in forma matriciale.

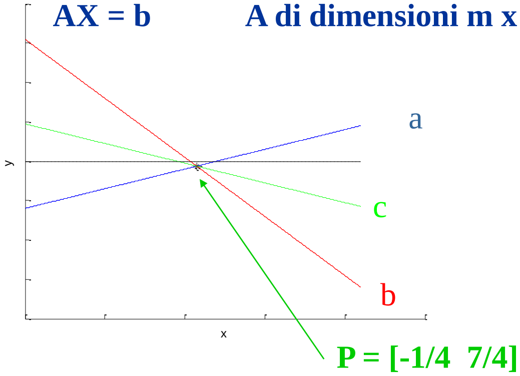
Sistemi lineari con m > n

J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$
$y = -x + 3/2$

$x = x_1$
$y = x_2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

Sistema lineare: soluzione algebrica

Caso generale:

A X = B $\Rightarrow$ **A' A X = A' B** $\Rightarrow$ **(A' A)$^{-1}$ (A' A) X = (A' A)$^{-1}$A' B** $\Rightarrow$ **X = (A'A)$^{-1}$A'B**

(A'A) gioca il ruolo di A quadrata.

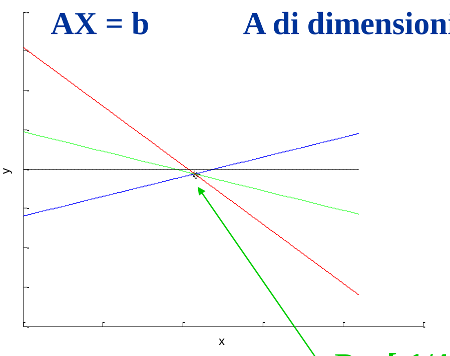
Quale criterio viene soddisfatto da X?

Sistemi lineari con m > n

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 3/2

$x=x_1$
$y=x_2$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$$P = C * A^T * b$$

P = [-1/4 7/4]

P = [-0.25 +1.75]

intersezione

Riformulazione del problema

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{1N}\,x_N = b_1 + \nu_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{2N}\,x_N = b_2 + \nu_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\quad a_{MN}\,x_N = b_M + \nu_M$

Modello

Misure

M x 1 => **Residuo.**

A x = b + N

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Vettore dei termini noti M x 1

Quale criterio viene soddisfatto da X?

Soluzione come problema di ottimizzazione

Funzione costo: $(Ax - b)^2 = \sum_k^n \nu_k^{\,2} = ||Ax - b||^2 = |\nu|^2$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x, non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza minima da tutte le rette.

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_k \nu_k^{\,2} = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{A^T A x = A^T b}$$

$$\mathbf{X = (A^T A)^{-1} A^T b}$$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convesse perchè hanno un unico minimo globale.

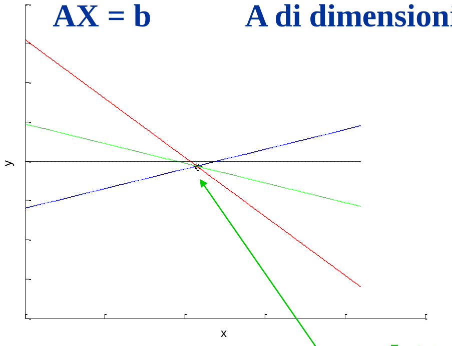
Sistemi lineari con m > n

$y = x - 2$ $\quad x=x_1$

$y = -3x + 1$ $\quad y=x_2$

$y = -x + 3/2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



P = [-1/4 7/4]

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -1.5\end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix}11 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}0.1250 & -0.1250\\ -0.1250 & 0.4583\end{bmatrix} \qquad P = C * A^T * b$$

P = [-0.25 +1.75]

intersezione

$$\sum_k^n v_k^2 = ||Ax- b|| = 0$$

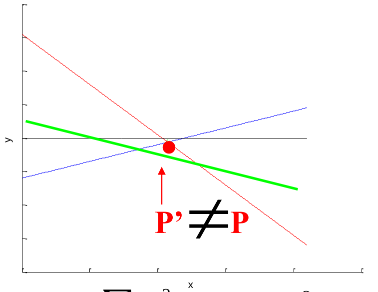
Sistemi lineari con m > n – non esiste soluzione (matematica)

$y = x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 1/2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$\sum_k v_k^2 = ||Ax - b||^2 = 0.865$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ -0.5\end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix}11 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}0.1250 & -0.1250\\ -0.1250 & 0.4583\end{bmatrix} \qquad P = C * A^T * b$$

P = [-0.25 +1.4167]

No intersezione

Sistemi lineari con m > n – residui

y = x - 2

y = -3x + 1 $\quad x = x_1$

y = -x + 1/2 $\quad y = x_2$

AX = b **A di dimensioni m x n**

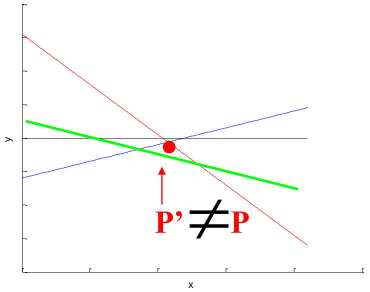
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P = C * A^T * b$ **P = [-0.25 +1.4167]**

No intersezione



ν_1 = 1*(-0.25) -1*(1.4167) – (-2) = 0.333

ν_2 = -3*(-0.25) -1*(1.4167) – (-1) = 0.333

ν_3 = -1*(-0.25) -1*(1.4167) – (-0.5) = -0.666

$\sum_{k}^{n} \nu_i$ = $\|Ax - b\|^2 = |\nu|^2$ = 0.111 + 0.111 + 0.111 + 0.111 + 0.444 = 0.666

Commenti

$$\sum_k \nu_k^{\,2} = \|Ax - b\|^2 = \sum_k \| A_{k,*}x - b_k \|^2 =$$

$$[(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) - b_1]^2 + [(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) - b_2]^2 +$$

$$[(A_{31}x_1 + A_{32}x_2) - b_3]^2$$

Lo scarto misura la distanza dalla retta

y – x + 2 = ν_1 = 0.33333

y + 3x – 1 = ν_2 = 0.33333

y + x – 1/2 = ν_3 = -0.6666

Sommario

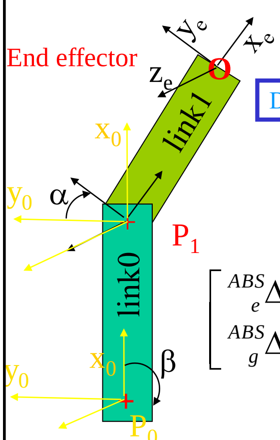
- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Il Jacobiano dell'esempio

Considero solo α e β

$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{e}P \\ {}^{ABS}_{g}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ l_o \cos\beta \\ -l_o \sin\beta \end{bmatrix}$$

Jacobiano rettangolare: 4 x 2



Definiamo la traiettoria dell'end effector e del joint g, link 0

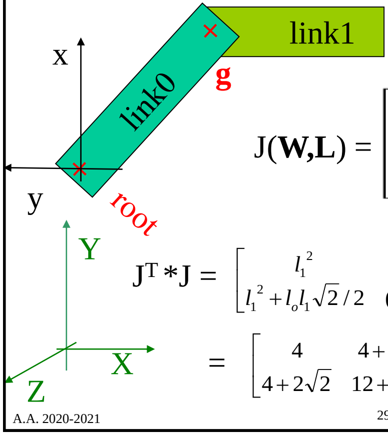
$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{e}\Delta P \\ {}^{ABS}_{g}\Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin(\beta) \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos(\beta) \\ 0 & -l_0\sin(\beta) \\ 0 & -l_0\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$$

$$b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$



$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \\ 0 & -l_0\sin(45) \\ 0 & -l_0\cos(45) \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2 \\ l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2 & (-l_1 - l_o\sin 45)^2 + (l_o\cos 45)^2 + (l_0\sin 45)^2 + (l_0\cos 45)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} & 12+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

Esempio (m = 4, n = 2)

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$$

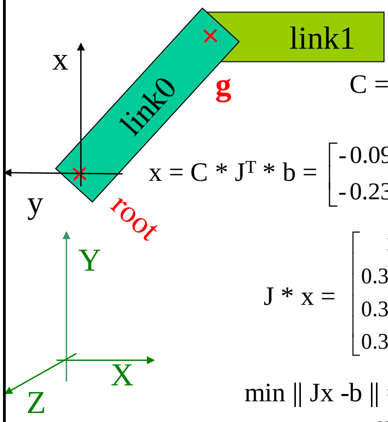
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$dP^g_x = 1$ $dP^g_y = 0$

$$(J^T * J) = \begin{bmatrix} 4 & 6.8284 \\ 6.8284 & 17.6568 \end{bmatrix}$$



$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$x = C * J^T * b = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} radianti = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} gradi$$

$$J * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{g_x} \\ dP_{g_y} \end{bmatrix}$$

che è diverso
dal valore impostato
per ΔP

$$\min \| Jx - b \| = 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2$$

Cinematica inversa (sistema sovradeterminato)

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $P_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento)

1) Identifico ΔP dalla posizione corrento verso la posizione finale.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w.
3) Calcolo invertendo il sistema lineare attraverso la matrice pseudo-inversa il valore Δw associato $(J'J)^{-1}J'\Delta w \neq \Delta P$). La soluzione è approssimata: minimizza la somma quadratica dei residui.
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w + \Delta w$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell'end point: $P_{new} = f(w + \Delta w, L)$. In generale, $P_{new} \neq P + \Delta P$ (il modello lineare è approssimato).

Fino a quando non arriva sufficientemente vicino a P_{finale}.

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n, sistemi sovradeterminati).
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Stima ai minimi quadrati pesata

min || P(Ax –b) || **PAX = Pb**   **A di dimensioni m x n**

P di dimensioni m x m – matrice dei pesi, diagonale

$p_1 a_{11} x_1 + p_1 a_{12} x_2 - p_1 b_1 = p_1 \nu_1$
$p_2 a_{21} x_1 + p_2 a_{22} x_2 - p_2 b_2 = p_2 \nu_2$
$p_3 a_{31} x_1 + p_3 a_{32} x_2 - p_3 b_3 = p_3 \nu_3$

Residuo pesato $\min \sum_k (p_k \nu_k)^2$

$\mathbf{A^T PA\, X = A^T P\, b}$

$\boxed{\mathbf{X = (A^T P A)^{-1} A^T P\, b}}$ Rank(A) = Rank(C)

$C = (A^T * P * A)^{-1}$ è la matrice di covarianza

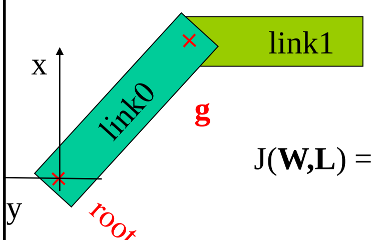
(matrice quadrata n x n)

Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin(\beta) \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos(\beta) \\ 0 & -l_0 \sin(\beta) \\ 0 & -l_0 \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

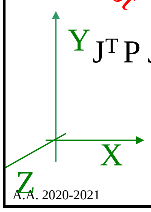
$x = (J^T * P * J)^{-1} * J^T P * b$

$b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix}$ 4 x 1 $x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$ 2 x 1



$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 \\ 0 & -l_0 \cos 45 \\ 0 & -l_o \sin 45 \\ 0 & l_o \cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45°$



$$J^T P J = \begin{bmatrix} p_1 * l_1^2 & p_1(l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2) \\ p_1(l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2) & p_1[(-l_1 - l_o \sin 45)^2] + p_2(l_o \cos 45)^2 + p_3(l_0 \sin 45)^2 + p_4(l_0 \cos 45)^2 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$x = (J^T P J)^{-1} * J^T P * b$ $\qquad b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix}$ $\qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$

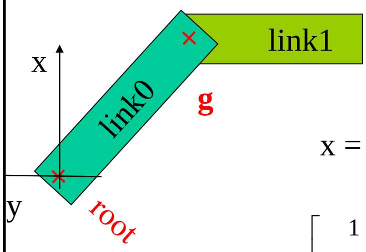
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$dP^e_x = 1$ $\qquad dP^e_y = 0$

$dP^g_x = 1$ $\qquad dP^g_y = 0$



$$(J^T P J) = \begin{bmatrix} 40 & 68.284 \\ 68.284 & 140.568 \end{bmatrix}$$

$$x = C * J^T * b = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{f_x} \\ dP_{f_y} \end{bmatrix}$$

più vicino al valore desiderato per il punto **e** e meno per il punto **g**

min || P(Jx –b) || = $((1-1)*10)^2 + ((0.0833-0)*10)^2 + (0.0833-1)^2 + (0.0833-0)^2$

Privilegio di alcuni punti dello scheletro rispetto ad altri

$$x = (J^T P J)^{-1} * J^T P * b$$

Attraverso P posso influenzare la soluzione
(vincolo soft sul movimento)

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.