La cinematica Inversa ed il Jacobiano

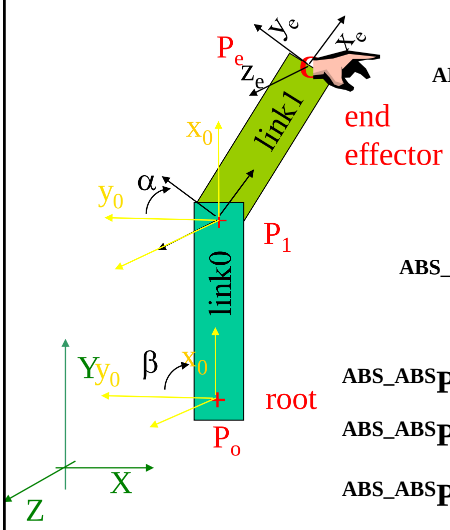
Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.

Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

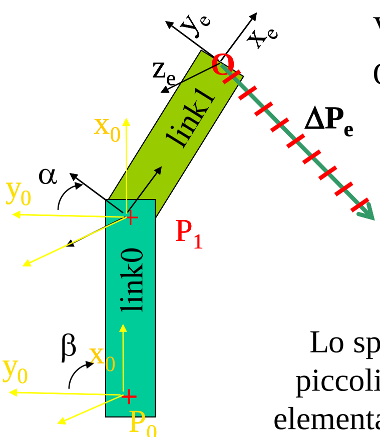
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A(t)} \quad {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

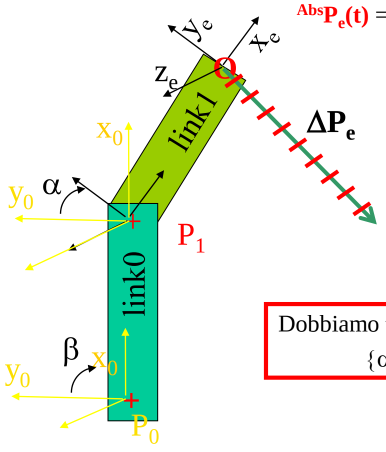
Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare o la traslazione richiesta per **tutti i joint**. Lavoriamo sulle variazioni (differenziale).

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

${}^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}Pe_e(t)$



$$\mathbf{{}^{ABS\_ABS}P(t)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

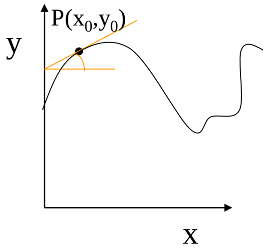
Linearizzazione – 1 variabile

$y_0 = f(x_0)$

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} dx^2 + \ldots$$

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x \Rightarrow y = mx + q$$

$\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di $P(x_o,y_o)$.
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili ($\mathbf{P(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$)?

Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili

z = f(x,y)

$$z - z_o = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P=P_0} dy}_{\boxed{\text{Parte lineare}}} + \frac{1}{2}\left\{ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P=P_0} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P=P_0} + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P=P_0} dy^2 \right\} + \ldots$$

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

P_x(t) = f_x(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).
P_y(t) = f_y(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).
P_z(t) = f_z(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

Chiamiamo $\mathbf{W_k = [\alpha_\kappa, \beta_\kappa, T_{xk}, T_{yk}]}$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{y_k})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{y_k})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{y_k})$$

Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.
P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

J

Chiamiamo **$W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\Delta P = \begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} = \Delta W$$

Caratteristiche del Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Contiene le derivate parziali di **f**(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'**espressione analitica** di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il **valore assunto** da J varia in funzione dei parametri liberi.

Come vengono trattate le velocità

Dividendo entrambi i membri per Δt si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\,\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel “punto di lavoro”.

L'espressione analitica di J vale $\forall$valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Jacobiano e velocità

$d\mathbf{P_e(t)} = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, d\mathbf{W(t)} \Rightarrow d\mathbf{P_e(t)} / dt = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, d\mathbf{W(t)} / dt$

Chiamiamo $\mathbf{W(t_k)}$= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\boxed{V_{\mathbf{P_e}}(t_k) = J(\mathbf{W}(\mathrm{t}_k), \mathbf{L})\dot{W}(\mathrm{t}_\mathrm{k})}$$

Parametri liberi Parametri geometrici

$\forall$k, cambia il valore di J, l'espressione analitica rimane valida.

Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P_e(t)} = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\Delta \mathbf{W(t)}$$

Chiamamo $\mathbf{W_k(t)}$= [(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parmetri liberi a quello dell'end-point: $\Delta\mathbf{W(t)}$ -> $\Delta\mathbf{P_e(t)}$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

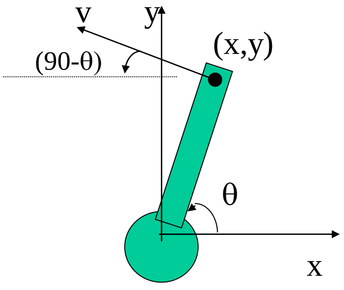
Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Esempio di determinazione del Jacobiano

x = r cos(θ)

y = r sin(θ)



$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v = \{\dot{x}, \dot{y}\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

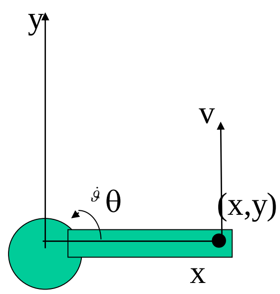
V = ωΛr Sono due espressioni equivalenti ∀k **$\mathbf{V} = \mathbf{J}_{\theta=\theta k}\dot{\Theta}$**

$\mathbf{V}_{2x1}$ $\mathbf{J}_{2x1}$ $\dot{\Theta}_{1x1}$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$



$\theta_k = 0$

$V_x = -r\sin(0)\ \dot{\vartheta} = 0\ \dot{\vartheta} = 0$

$V_y = r\cos(0)\ \dot{\vartheta} = r\ \dot{\vartheta}$

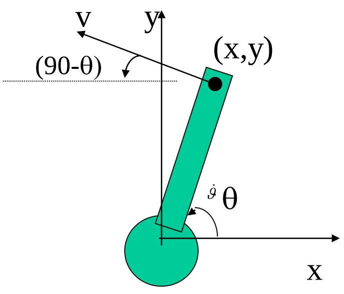
V = ωΛr ⟹ $$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manca determinante della matrice I j k e la soluzione e scrittura come vettore.

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta = \vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

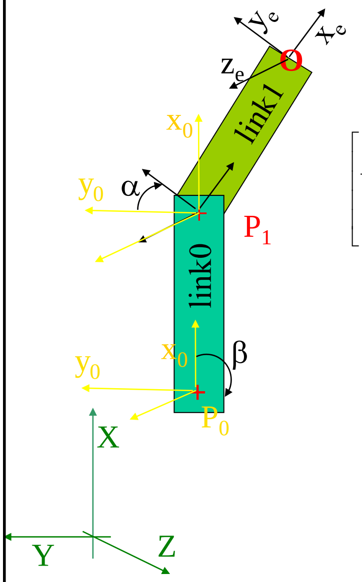


$$V_x = -r \sin(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$$

$$V_y = r \cos(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$$

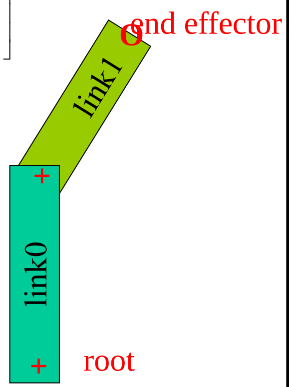
$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \Lambda \mathbf{r} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ r\cos\vartheta & r\sin\vartheta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cinematica diretta



$${}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta + T_x \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



La matrice di trasformazione dell'esempio

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

J

Il Jacobiano dell'esempio - I

$$^{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial P_x}{d\alpha} = -l_1 \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\partial P_x}{d\beta} = -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin(\beta)$$

$$\frac{\partial P_x}{dT_x} = 1$$

$$\frac{\partial P_x}{dT_y} = 0$$

Il Jacobiano dell'esempio - II

$$ {}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ \frac{\partial P_x}{d\alpha} = -l_1 \cos(\alpha+\beta) $$

$$ \frac{\partial P_x}{d\beta} = -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos(\beta) $$

$$ \frac{\partial P_x}{dT_x} = 0 $$

$$ \frac{\partial P_x}{dT_y} = 1 $$

Il Jacobiano dell'esempio - III

$$ {}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Il Jacobiano varia al variare dei parametric liberi

Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\Delta\mathbf{W(t)}$$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)}$= [(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare, dallo spazio dei parmetri liberi a quello dell'end-point: **ΔW(t)** -> **Δ$\mathbf{P_e}$(t)**

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

Determinazione delle variazioni dei parametri liberi

$$\Delta \mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\ \Delta\mathbf{W(t)}$$

E' un sistema lineare

Y = A X

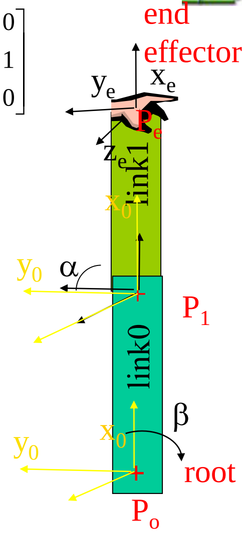
Y – vettore degli spostamenti desiderati dell'end-point (che vengono forniti dal sistema di controllo)
X – vettore delle variazioni richieste dei parametric liberi (che non conosciamo)
J(.) – matrice di disegno del problema (che conosciamo se conosciamo la posizione attuale dello scheletro). J(.) vale in un intorno di questa posizione.

La soluzione del sistema lineare è: $X = A^{-1} Y$

$$\Delta \mathbf{W(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})^{-1}\ \Delta\mathbf{P_e(t)}$$

Esempio di calcolo dello spostamento – I

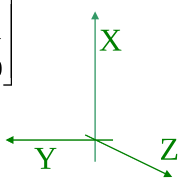
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Caso particolare: α = β = 0

$W_k = [0, 0, P_{ox}, P_{oy}]$

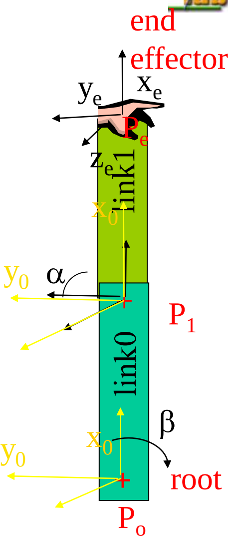
$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Esempio di calcolo dello spostamento – II

Caso particolare: α = β = 0

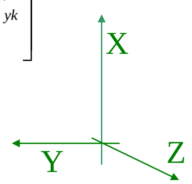
$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L}) \Delta W$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

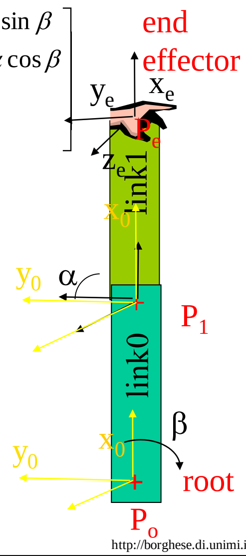
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ -l_0 \Delta a - (l_0 + l_1)\Delta\beta + T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

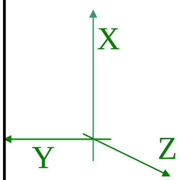


Caso semplificato

Elimino 2 gradi di libertà: Tx e Ty.

$$
{}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A}\;{}^{P0\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$





La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$
{}_{ABS\_ABS_e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Non tutti gli spostamenti sono possibili

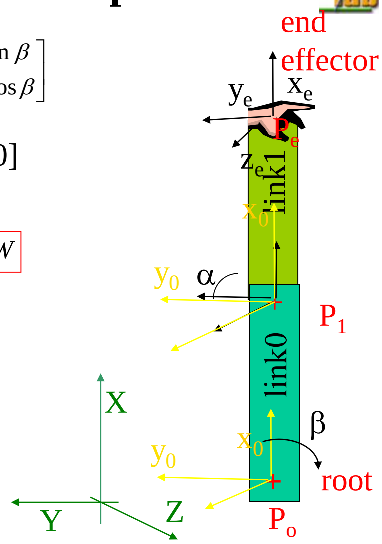
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\qquad W_k = [0, 0]$

$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L}) \Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

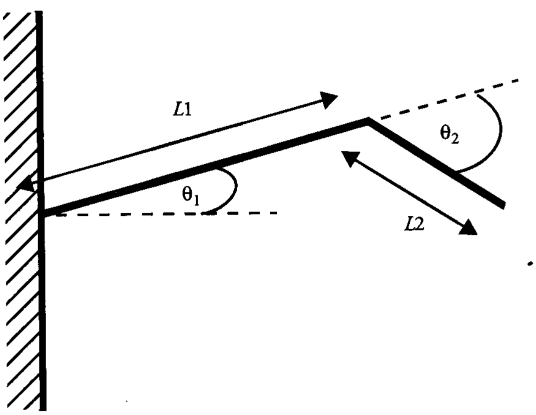
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \Delta a + (-l_0 + l_1)\Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

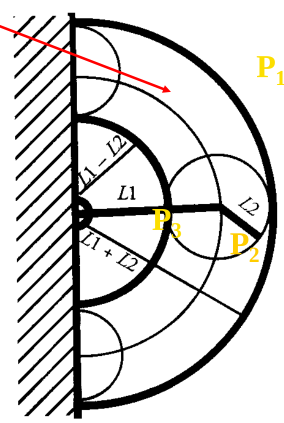


E' possibile spostarsi solamente in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per $\alpha = \beta = 0$

Soluzione diretta

Working space





Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \| P \| \leq L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Riassunto

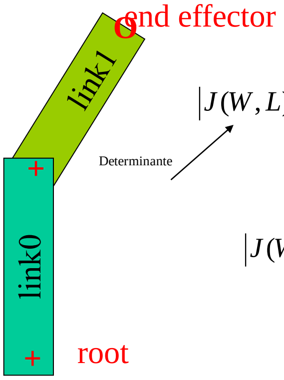
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Il Jacobiano dell'esempio semplificato: determinante

$$^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il caso piano (x,y) e Tx ≡ Ty ≡ 0 e coordinate non omogenee.

$$\mathrm{J}(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$



Determinante

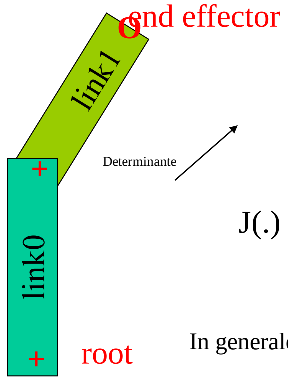
$$|J(W,L)| = l^2{}_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+l_o l_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta)- l^2{}_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-l_o l_1\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta)-l_o l_1\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

Condizioni di singolarità

$$|J(W,L)| = l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) -$$
$$l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$



$$J(.) \neq 0 \begin{cases} \alpha+\beta \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases}$$

$$J(.) \neq 0 \begin{cases} \alpha+\beta \neq 90 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases}$$

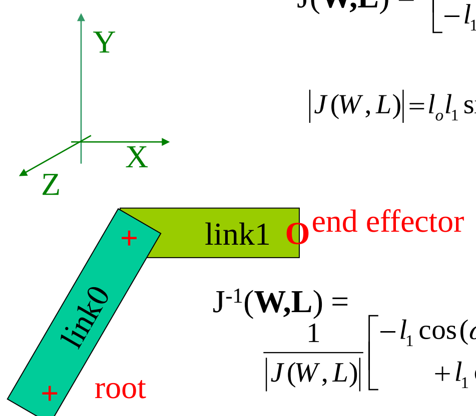
In generale, $\alpha \neq 0 \pm 180$. Definisce la frontiera dello spazio di lavoro

Inverso del Jacobiano dell'esempio semplificato

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

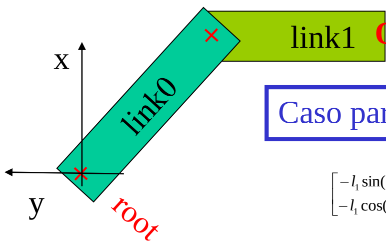
$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$



$$J^{-1}(\mathbf{W,L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & +l_1\sin(\alpha+\beta) + l_0\sin\beta \\ +l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano: determinante – caso particolare

$$^{ABS\_ABS}{}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Consideriamo il caso piano e Tx ≡ Ty ≡ 0

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

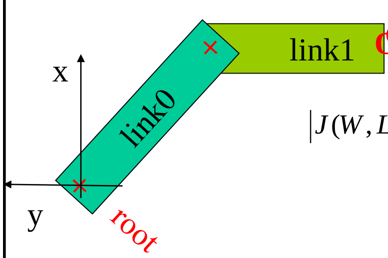
$$J([\mathbf{45,45}],[\mathbf{2,2}]) = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\det(J) = 2\sqrt{2}$

Inverso del Jacobiano: caso particolare

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J^{-1}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & +l_1\sin(\alpha+\beta)+l_0\sin\beta \\ +l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$



$$|J(W,L)| = l_o l_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$J^{-1}([\mathbf{45,\ 45}],[\mathbf{2,2}]) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2} & +2+2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Situazione del movimento

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

Posizione iniziale del braccio: $\left[\sqrt{2}; -\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$

Angoli iniziali: [45, 45]

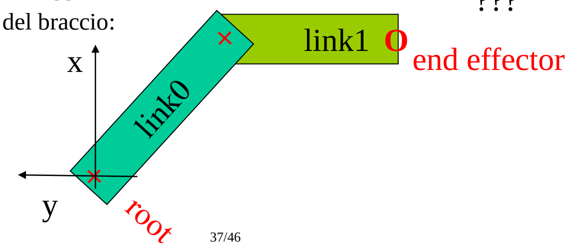
Posizione finale desiderata del braccio: $[2; -2]$

Spostamento desiderato del braccio: $\left[2-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Angoli finali del braccio: [90, 0]

Posizione finale raggiunta: ???

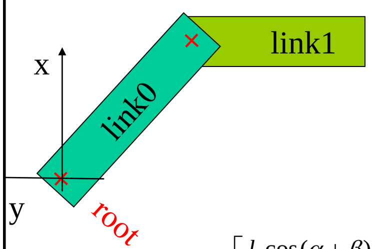
Spostamento del braccio:



Calcolo di [Δα, dβ]

$$\begin{bmatrix}\Delta\alpha \\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2} \\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}81.028 \\ -57.2958\end{bmatrix}_{gradi}$$

Angoli iniziali: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P = [2-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



W_{fin} = [45 + 81.028; 45 -57.2958] = [126.028; -12.2958]

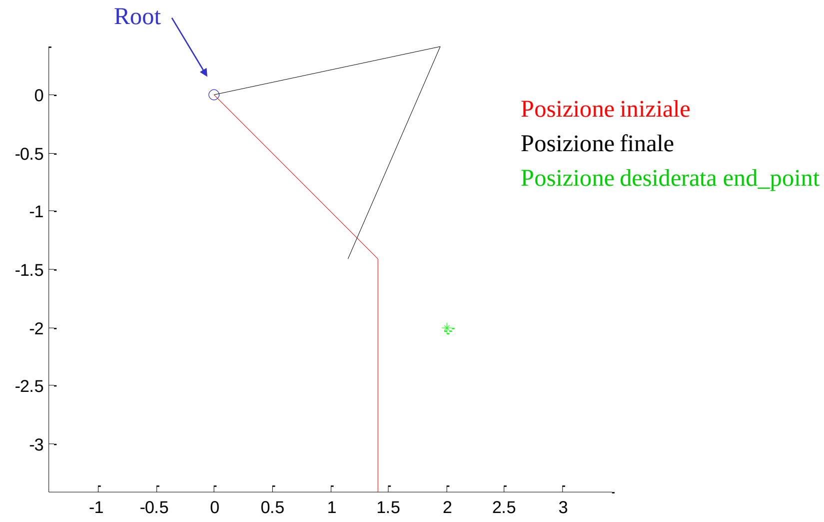
Angoli finali desiderati [90, 0]

Posizione iniziale: $\left[\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}\right]$

Posizione finale ottenuta: $[1.1492; -1.4050]$

$${}^{e}P = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*(-0.4025)+2*0.9771 \\ -2*0.9154-2*(-0.2130)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.1492 \\ -1.4050\end{bmatrix}$$

Rappresentazione grafica

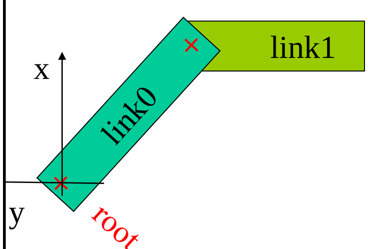


Verifica della soluzione

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\end{bmatrix} = J\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2-\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}-2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

J(**[45,45],[2,2]**)

$$\begin{bmatrix}2-\sqrt{2}\\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

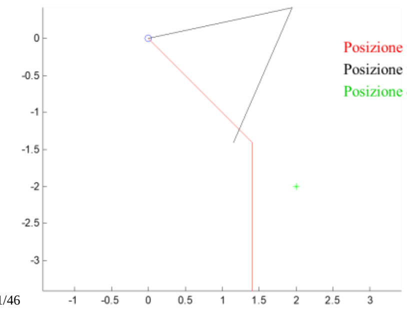


Spostamento desiderato del braccio

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ dP = $[2-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Situazione del movimento

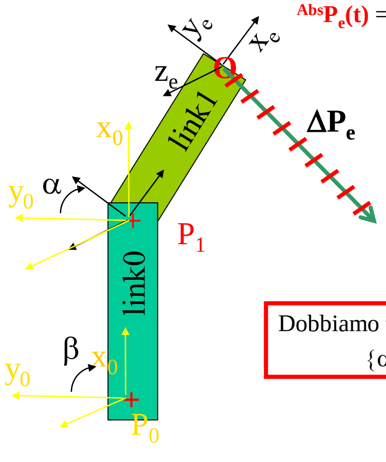
Posizione iniziale del braccio:	$\left[\sqrt{2}; -\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$
Angoli iniziali:	[45, 45]
Posizione finale desiderata del braccio:	$[2; -2]$
Spostamento desiderato del braccio:	$\left[2-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$
Angoli finali del braccio:	[90, 0]
Posizione finale raggiunta:	$[1.1492; -1.4050]$
Angoli finali prodotti:	[126.028; -12.2958]



Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$${}^{Abs}\mathbf{P_e(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\ {}^{e}P_e(t)$$



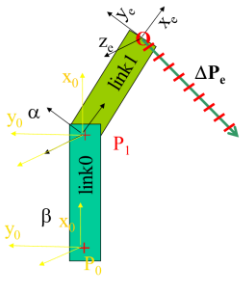
$${}^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
$\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, \mathbf{P_e(t)})$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

Perchè questa differenza?



$\Delta P_e(t) = J(W(t), L)\Delta W(t)$ La linearizzazione introduce un errore. Questo errore è tanto più piccolo tanto più è piccolo $\Delta P_e(t)$

La soluzione può introdurre un errore nel caso di sistemi sovradeterminati.

Caso indeterminato

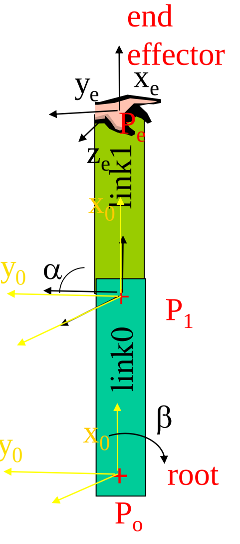
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\quad W_k = [0, 0]$

$$J([0,0],[2,2]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0-l_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha-0 \\ \beta-0 \end{bmatrix}$$

J(.) = 0 Sistema indeterminato



$P\text{-}P_x = 0$

$P\text{-}P_y = -l_0\alpha - (l_0+l_1)\,\beta \longrightarrow$

$P\text{-}P_x = 0$

$\alpha = \alpha \quad \beta = [(P\text{-}P_y) + l_0\alpha] / -(l_0+l_1)$

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $P_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento)

1) Identifico ΔP dalla posizione corrento verso la posizione finale.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w.
3) Calcolo invertendo il sistema lineare il valore Δw associato ($J\Delta w = \Delta P$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w + \Delta w$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point: $P_{new} = f(w + \Delta w, L)$. In generale, $P_{new} \neq P + \Delta P$.

Fino a quando non arrive sufficientemente vicino a P_{finale}.

Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi