



Realtà Virtuale From 3D to 2D

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano



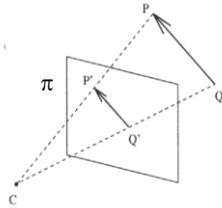
Sommario

- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

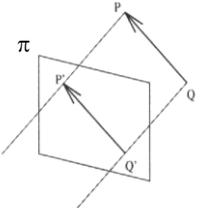


Proiezione centrale e proiezione ortogonale





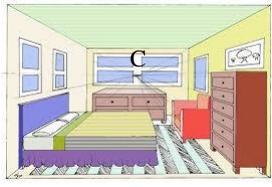
1)



2)

$P(X,Y,Z)$ viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto $P'(X',Y')$. Z è la distanza dal piano immagine.

1) X' dipende da X e Z .
 2) X' non dipende da Z , ma solo da X .



Proiezione centrale: centro di proiezione al finito - C.



Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.

A.A. 2020-2021

3/43



Dal 3D al 2D



Come si forma un'immagine?

- Scena con oggetti riflettenti.
- Sorgente di illuminazione
- Piano di rilevazione della luce riflessa.

Il motore di questa trasformazione è la **proiezione prospettica**.

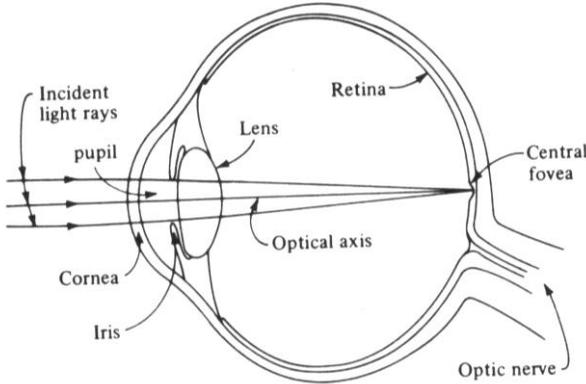
A.A. 2020-2021

4/43



L'occhio umano





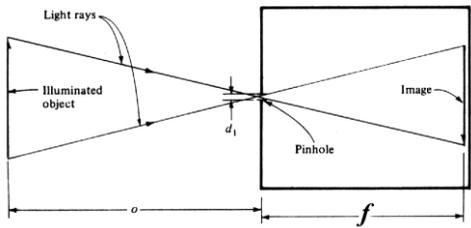
Its behavior is very similar to that of a camera

A.A. 2020-2021
5/43

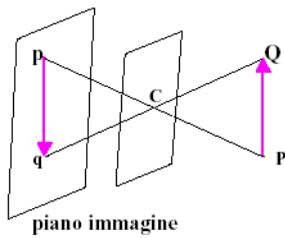


La pin-hole camera





Proiezione prospettica:
tutti i raggi di proiezione
passano per un unico punto,
detto **centro di proiezione**.



piano immagine

Pinhole camera

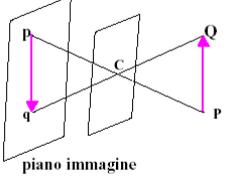
Perchè non funziona in pratica?

A.A. 2020-2021
6/43

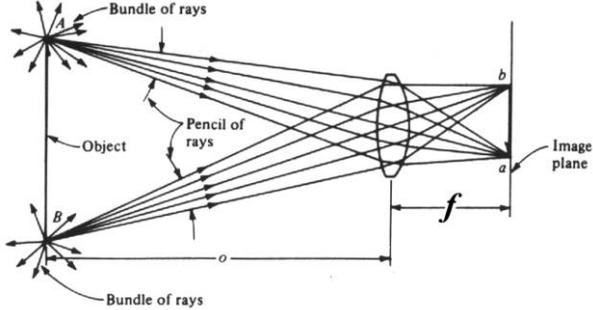


La lente





Pinhole camera



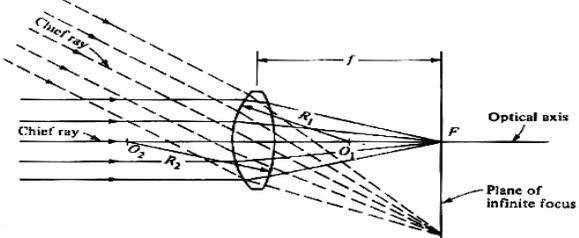
Lente convergente

A.A. 2020-2021
7/43



Geometria dell'ottica





Oggetti all'infinito

- **Distanza focale:** distanza del piano immagine quando un oggetto si trova all'infinito e dà un'immagine nitida sul piano immagine.
- **Asse ottico:** raggio che non viene deviato dalla lente.
- **Intersezione dell'asse ottico con il piano immagine dà il punto principale (F).**

A.A. 2020-2021
8/43

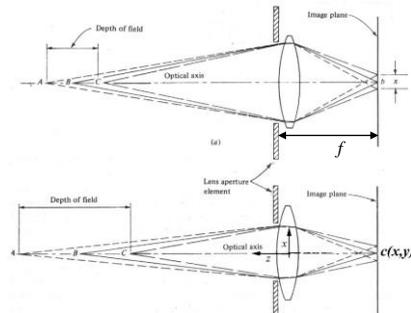


Messa a fuoco



Problema della messa a fuoco

La profondità di campo dipende dall'apertura dell'obiettivo.



Parametri di camera (o intrinseci):

- Punto principale $c(x,y)$ + distanza focale (piano messa a fuoco), f (3 parametri).
- Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).
- (Distorsioni).

A.A. 2020-2021

9/43



Distorsioni



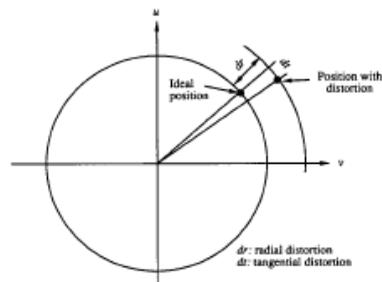
Distorsioni radiali.

Distorsioni tangenziali.

Shrinkage ($x' = \lambda x, y' = y$).

$$x_m = x + f(x,y)$$

$$y_m = y + g(x,y)$$



A.A. 2020-2021

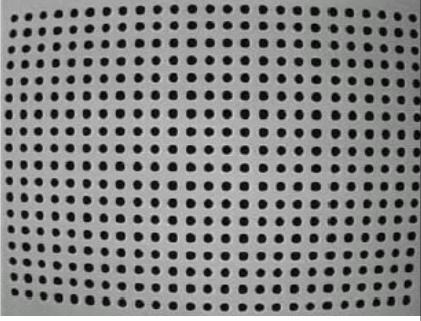
10/43

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgese>

Esempi di Distorsioni









Ottime per effetti speciali, un po' meno per delle misure.....
Le camere non sono metriche.

A.A. 2020-2021
11/43

Distorsioni radiali




A cuscinetto

$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots$$

$$r = |p - p_0|$$

Rappresentazione polare (ρ, ϕ):

$$x = \rho \cos\phi$$

$$y = \rho \sin\phi$$
$$dx(p) = k_0 x + k_1 x(x^2 + y^2) + O[(x,y)^4]$$

$$dy(p) = k_0 y + k_1 y(x^2 + y^2) + O[(x,y)^4]$$

Il parametro k_0 non si considera perchè corrisponde ad una variazione di scala.

A.A. 2020-2021
12/43



I modelli di distorsioni



Semplificazioni possibili delle equazioni che modellano i parametri di distorsione

1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$	(1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$	(2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$	(3)

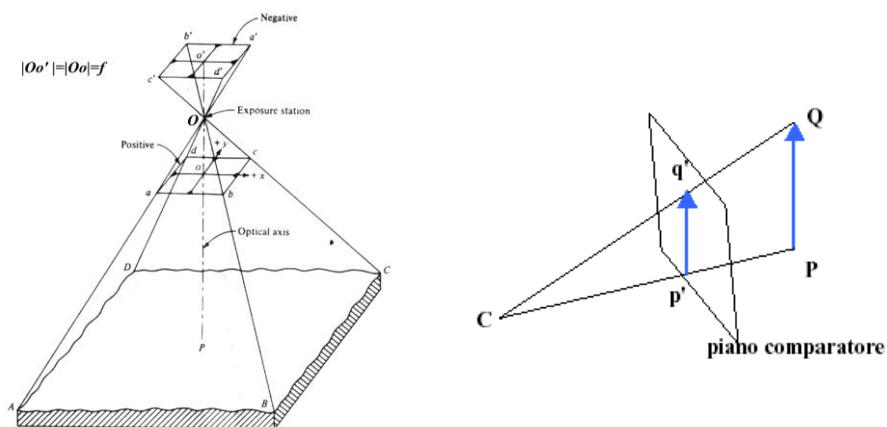
In alternativa: modelli semi-parametrici che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.

A.A. 2020-2021

13/43



Raddrizzamento dell'immagine



Si considera un piano posto davanti al centro di proiezione (si ottiene scendendo l'immagine dall'angolo a dx in basso).

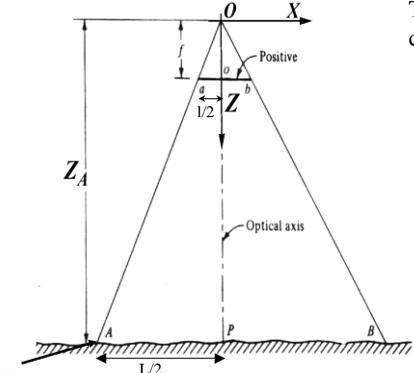
A.A. 2020-2021

14/43

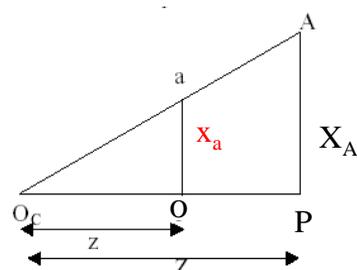


Proiezione semplice





Tutte le coordinate misurate rispetto a un centro comune



Per similitudine fra i triangoli aOo e AOP:
 Oo : OP = ao : AP
 $f : Z_A = x_a : X_A \Rightarrow x_a = f X_A / Z_A$

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = f X_A / Z_A \\ y_a = f Y_A / Z_A \end{cases}$$

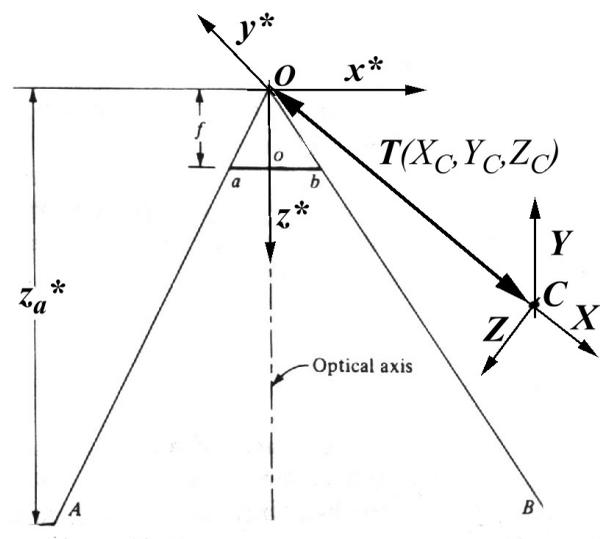
A.A. 2020-2021

15/43



I parametri esterni





- **Traslazione:**
3 componenti:
 $T(X_C, Y_C, Z_C)$.
- **Rotazione**
 $R_{3 \times 3}(\omega, \phi, k)$

A.A. 2020-2021

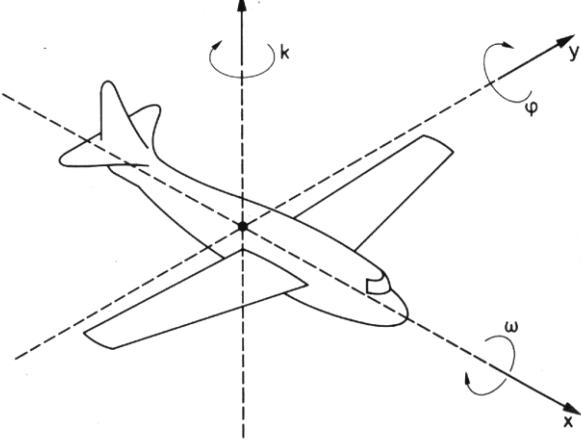
16/43



Angoli di orientamento nello spazio 3D



Modo generale: roll, pitch, e yaw. Sono 3 rotazioni sequenziali,
 (ω, ϕ, κ): rollio, beccheggio e deriva. non commutative.

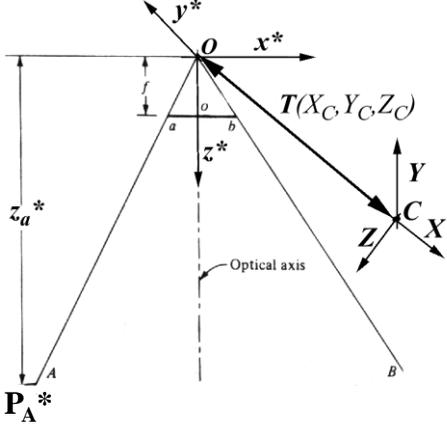


A.A. 2020-2021
17/43



Dal 3D al 2D





1) Mi riconduco alla proiezione semplice

$$P_A^* = R (P_A - T)$$

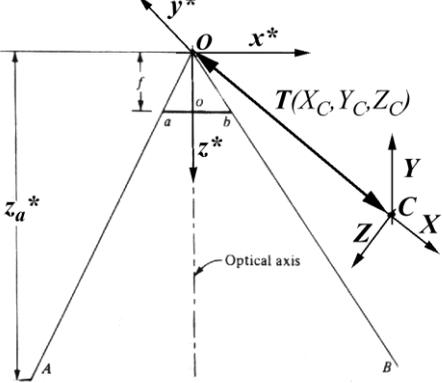
$$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*)$$

A.A. 2020-2021
18/43



Dal 3D al 2D





2) Implemento la proiezione semplice

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = f X_A^* / Z_A^* \\ y_a = f Y_A^* / Z_A^* \end{cases}$$

$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*) \Rightarrow a(x_a, y_a)$

La terza coordinata sul piano immagine, $z_a = f = \overline{oO}$

A.A. 2020-2021
19/43



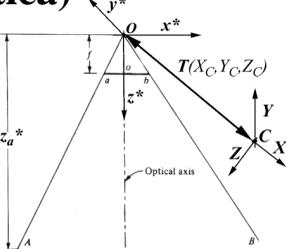
Equazioni di collinearità (rappresentazione prospettica)



$$X_A^* = r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)$$

$$Y_A^* = r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)$$

$$Z_A^* = r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)$$



$$(x_a - x_o) / f = X_A^* / Z_A^* = \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$y_a - y_o = f Y_A^* / Z_A^* = \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.

A.A. 2020-2021
20/43

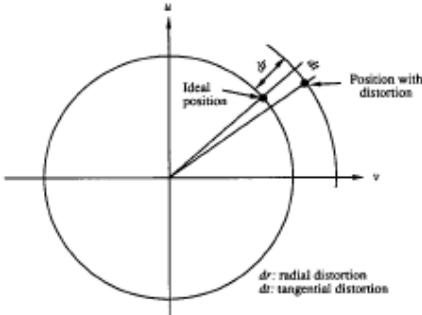
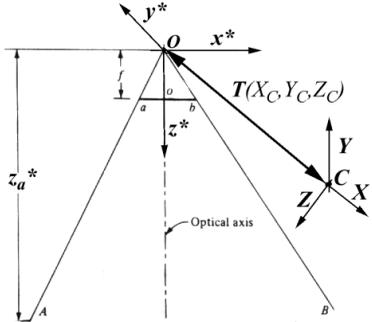


Modello reale della ripresa fotografica



$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$



Tassonomia dei parametri



$P^3 \rightarrow P^2$ Interior parameters

- Focal length, f
- Principal point (x_o, y_o)

$P^3 \rightarrow P^3$ Exterior parameters

- Orientation (ω, ϕ, κ)
- Position (X_o, Y_o, Z_o)

$P^2 \rightarrow P^2_m$ Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$
 $(f(x, y, x_o, y_o); g(x, y, x_o, y_o))$

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{21}(Y - Y_o) + m_{31}(Z - Z_o)}{m_{13}(X - X_o) + m_{23}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{32}(Z - Z_o)}{m_{13}(X - X_o) + m_{23}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

A.A. 2020-2021

22/43



Notazione matriciale



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione
mediante scala (f) e
traslazione (x_0, y_0)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Roto-traslazione

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMA} \quad \mathbf{P} = \mathbf{HP}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Che forma ha H?

Che dimensioni?

A.A. 2020-2021

23/43



Proiezione in coordinate omogenee



$$\mathbf{P}^* = \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{cases} m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0) \\ m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0) \\ m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{omogene} \\ y_{omogene} \\ w_{omogene} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} fX^* + x_0Z^* \\ fY^* + y_0Z^* \\ Z^* \end{bmatrix}$$

Dividendo per la terza coordianata, $w_{omogenee}$.

$$\begin{bmatrix} x_{cartesiana} \\ y_{cartesiana} \\ w = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} fX^*/Z^* + x_0 \\ fY^*/Z^* + y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2020-2021

24/43



Sommarrio



- La trasformazione proiettiva
- **Calibrazione**

A.A. 2020-2021

25/43



Calibrazione, **Proiezione** e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X, Y, Z)\}$

B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x, y, f)\}$

C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).

B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).

A) + C) \rightarrow B) **Proiezione (augmented reality).**

A.A. 2020-2021

26/43



Augmented reality at work (proiezione)





A.A. 2020-2021

27/43



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X, Y, Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x, y, f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2020-2021

28/43



Set-up



Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to **view the volume of interest!**

Set-up requires:

- Cameras position
- Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time
and/or
Multiple cameras are used.**



In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- **Parametri esterni:** $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- Parametri interni: x_o, y_o, f .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1,$
.....

Calibrazione dei parametri esterni può essere fatta separatamente dai parametri interni e/o di distorsione.



Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.
- Per proiettare oggetti virtuali su camere.



Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).

Metodi:

- Scacchiere (Zhang et al., Software in Matlab e OpenCV)
- Barra rigida con 2 marker (Borghese e Cerveri, 2000; utilizzata nei sistemi di Mocap; e.g. nello SMART-3D).
- Griglie 3D (non più utilizzato, Borghese et al., 1990)

Metodi ibridi:

- **Structure from Motion (SfM)**, **SLAM** (Simultaneous Localization and Mapping), vengono ricostruite le coordinate 3D dei punti, stimati i parametri interni e determinato il movimento. Molto utilizzata in robotica.

Algoritmi:

- DLT (Direct Linear Transform -> da 9 parametri, si passa a 12 in un sistema lineare).
- Bundle adjustment. Stima iterativa dei parametri.



2D Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).



A.A. 2020-2021

33/43



Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.

Ho $9 + D$ parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo (ogni punto di controllo -> 2 equazioni).

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

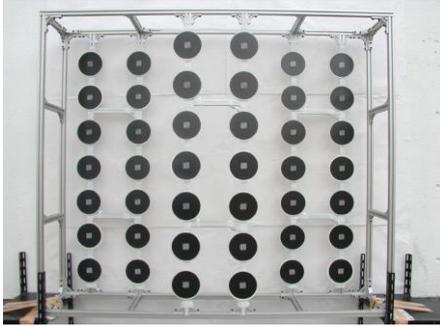
A.A. 2020-2021

34/43

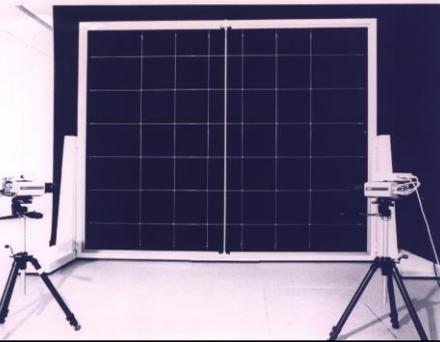


Test field (Known control points)

3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.









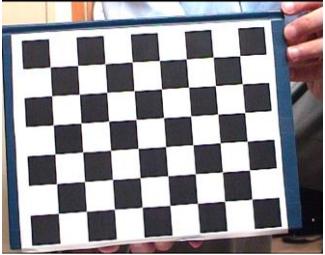
35/43

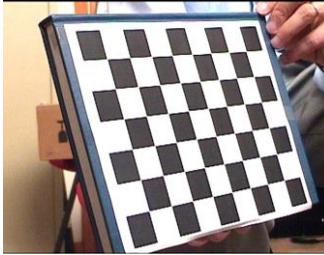
A.A



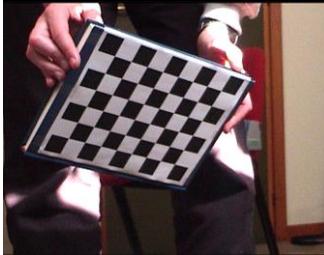
Calibration through a chessboard











Estimated Parameters.
Distortions
Internal
External

<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>

Also suite in Matlab

A.A. 2020-2021

36/43

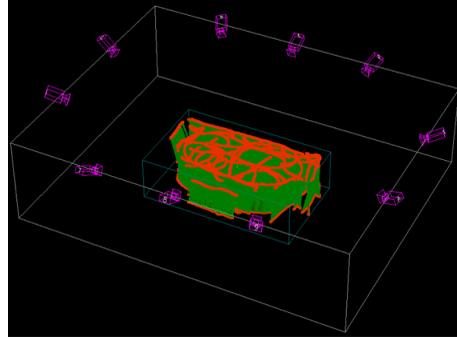


Wand Calibration



2 steps:

- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.



Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor, video).

A.A. 2020-2021

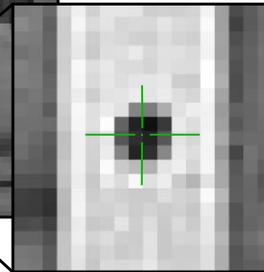
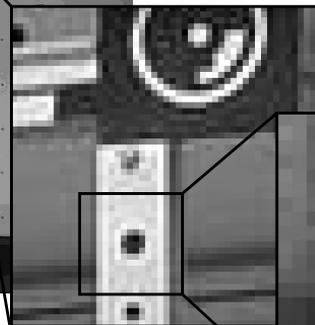
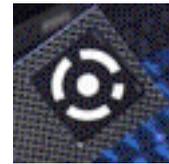
37/43



Misurazione manuale dei punti di controllo



Coded target



Misure con mouse/cursore sul monitor

Precisione: 1/4 - 1/8 Pixel

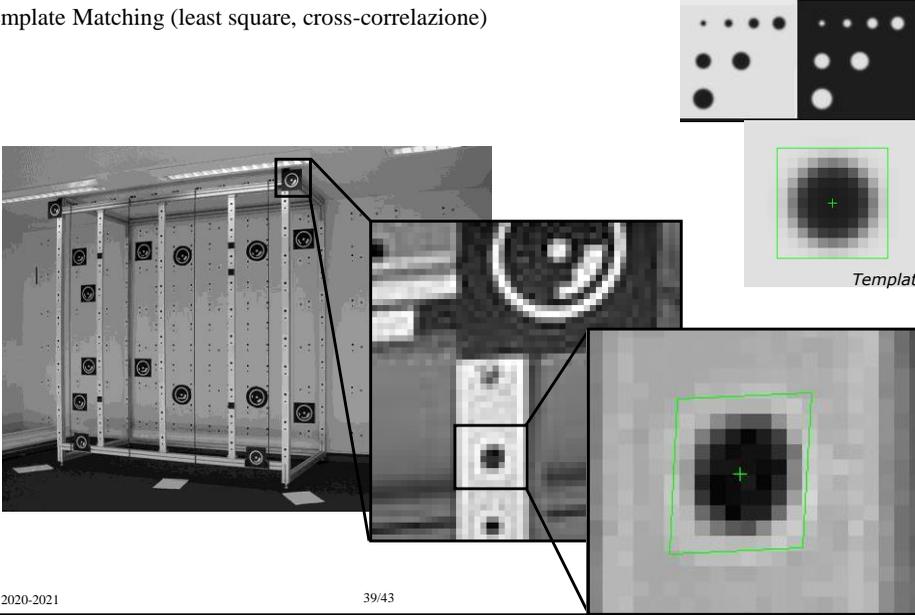
A.A. 2020-2021

38/43



Misurazione automatica dei control points

Template Matching (least square, cross-correlazione)



Templat

A.A. 2020-2021 39/43



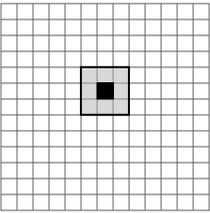
Cross-correlazione

Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

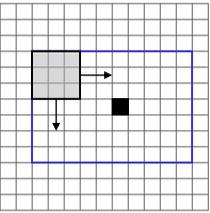
$$\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{mn-1}} \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{mn-1}} \quad \sigma_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$

finestra di correlazione



finestra di ricerca



■ Conjugate pixels

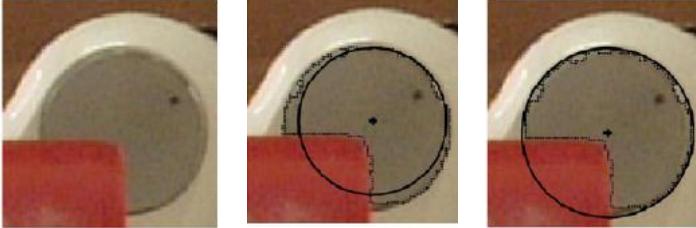
□ Search window

A.A. 2020-2021 40/43



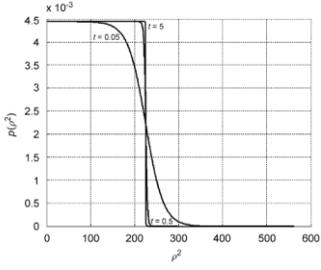
Approccio statistico al circle fitting





Frosio, Borghese – Pattern Recognition - 2008

$$L(\mathbf{p}_C, R_C) = \prod_{i=1}^N p(\rho_i^2, R_C).$$



A.A. 2020-2021
41/43



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2020-2021
42/43



Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione