Realtà Virtuale
Geometria I

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano

Lesson content

- Skeleton
- Representation of the skeleton position

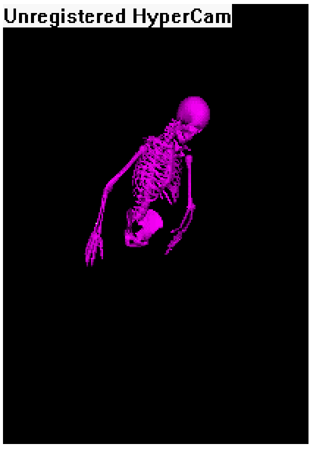
Visione 3D, Elaborazione di immagini e grafica

- **Vision 3D:** Imagine/s => 3D reconstruction of the static of dynamic scene and its interpretation
- **3D Graphics:** 3D model of the scene, static or dynamic => 3D visualization

Virtual Reality is a branch of 3D graphics

They meet on the ground of 3D visualization

Skeleton animation through rotations



Skeleton - segments connected by hinges

Graphical representation

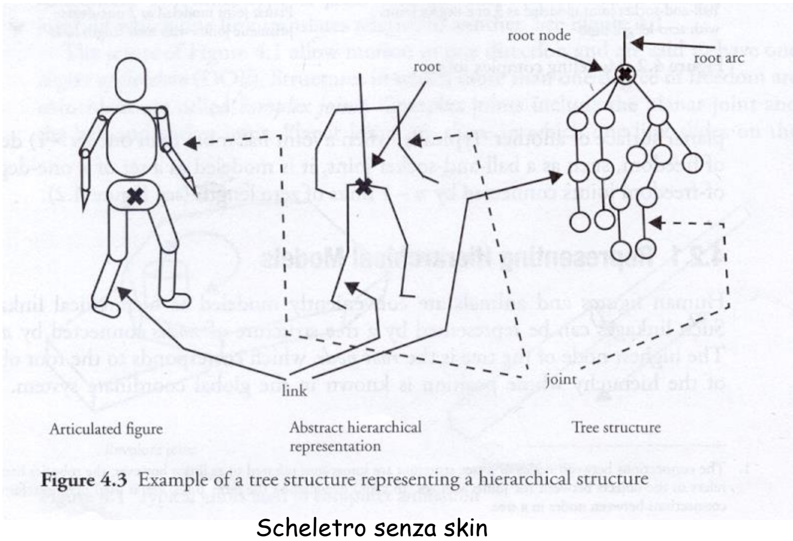
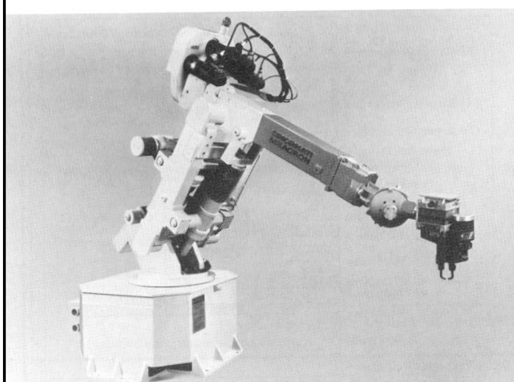
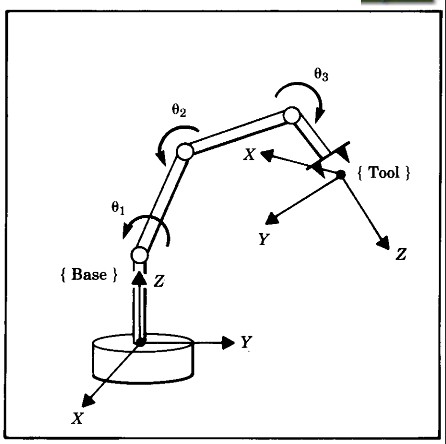


Figure 4.3 Example of a tree structure representing a hierarchical structure

Scheletro senza skin

Position description (skeleton = robot)





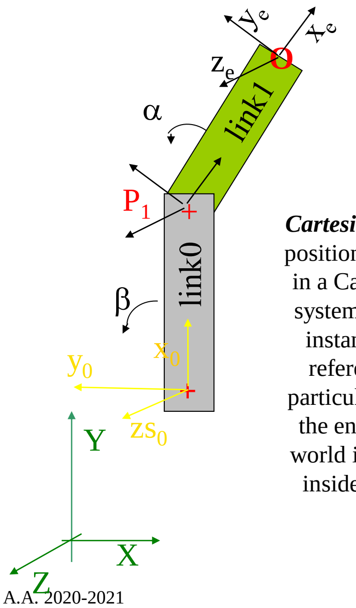
Kinematic chain. **Hierarchical structure.**

Position fully defined by degrees of freedom (movements allowed by articulated joints).

Frame. Reference system rigidly connected with part of the robot.

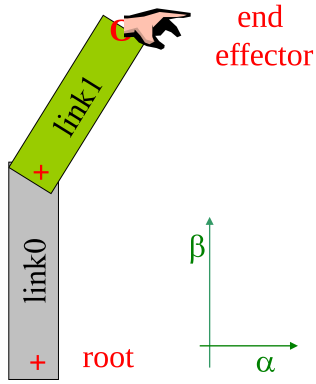
Convenzione di Denavit-Hartenberg importata dalla robotica.

Movement spaces



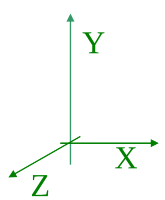
Joint space. It is the space of free parameters. Here: α e β.

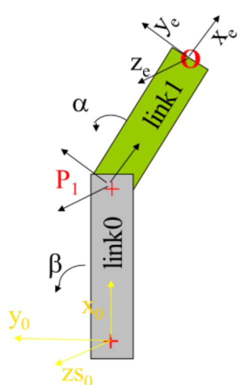
Cartesian space. It is the position of points, hinges in a Cartesian reference system. This can be for instance the absolute reference system. In particular the position of the end-effector as the world is often described inside a Cartesian 3D space.



Position description

- Transform from one frame into another.
- The transform is a function of the free parameters and of the geometrical parameters.
- We will consider here the rototranslation (rotation + translation) that can be expressed through matrixes.



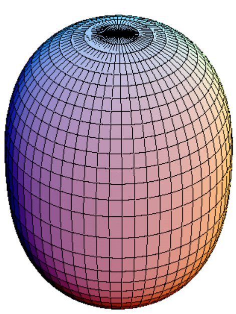


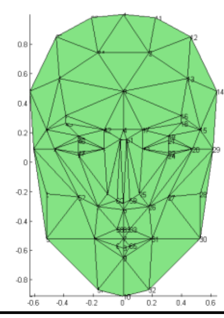
Lesson content

- Skeleton
- Representation of the skeleton position

Descrizione della posizione di un corpo rigido (non solo scheletri)

- Punto materiale: **P** = **P(**X, Y, Z) – 3 dof
- Corpo rigido: 6 dof [**R**, **T**].
- Corpo deformabile: N dof **G** (poligono / griglia di controllo)





Coordinate omogenee

Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate
carteziane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo *w*:

$$V(x, y, z) \text{ corrisponde a :}$$
$$V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X / w$$
$$y = Y / w$$
$$z = Z / w$$

solitamente si sceglie w=1

w = 0 identifica il punto all'∞ sulla retta per l'origine, passante per V(x,y,z).
I coseni direttori saranno x/|V|, y/|V|, z/|V|.

Trasformazioni 3D

Traslazione – tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione – tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all'asse.

Scala – variazione della dimensione lungo un asse.

Traslazione in coordinate omogenee

Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

Traslazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x + 0 + 0 + T_x) \\ y' &= (0 + y + 0 + T_y) \\ z' &= (0 + 0 + z + T_z) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^t &= x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x \\ y^t &= y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y \\ z^t &= z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Scala in coordinate omogenee

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x.S_x + 0 + 0 + 0) \\ y' &= (0 + y.S_y + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z.S_z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^s &= x'/w' = (x.S_x)/1 \\ y^s &= y'/w' = (y.S_y)/1 \\ z^s &= z'/w' = (z.S_z)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Traslazione + Scala

$$V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione

$$V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scala

$$V'' = S(TV) = (ST)V = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

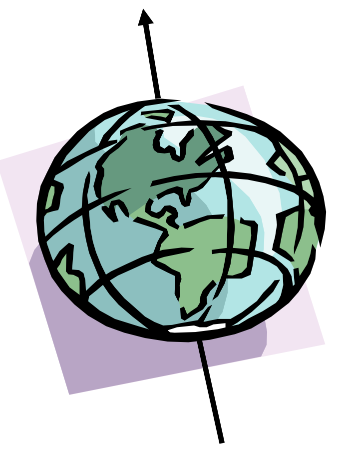
Fattorizzazione delle trasformazioni: rappresentazione della trasformazione in un'unica matrice.

Traslazione + Scala

La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

1) Quaternioni (asse + angolo)
2) Matrice di rotazione
3) Tre angoli di rotazione indipendenti



Quaternioni

Rappresentazione della rotazione mediante:
1 vettore + 1 scalare

Asse di rotazione   Angolo di rotazione

Si può dimostrare che data una rotazione attorno all'asse identificato dal versore **n**, di un angolo $-\pi <= \theta <= \pi$, questa può essere rappresentata dal quaternione: *q=(cos θ/2,* ***n*** *sin θ/2)*

Algebra with quaternions

- La rotazione di un punto p si può ottenere mediante prodotto di Hamilton:
  - Dato q il quaternione che rappresenta la rotazione
  - Espresso un punto p mediante quaternione come: p =[0, X, Y, Z}
  - Il punto p' ottenuto da p dopo l'applicazione della rotazione q si ottiene come:
    - P' = q p q*

$q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$

$q^* = (\cos \theta/2, -\mathbf{n} \sin \theta/2)$

- Più semplicemente, senza coinvolgere il prodotto di Hamilton…

Matrici di rotazione e quaternioni

Si può trasformare un quaternione in una matrice di rotazione secondo:

- R = $\begin{bmatrix} 1-2(q_j^2+q_k^2) & 2(q_iq_j - q_kq_r) & 2(q_iq_k + q_jq_r) \\ 2(q_iq_j + q_kq_r) & 1-2(q_i^2+q_k^2) & 2(q_jq_k - q_iq_r) \\ 2(q_iq_k - q_jq_r) & 2(q_jq_k + q_iq_r) & 1-2(q_i^2+q_j^2) \end{bmatrix}$

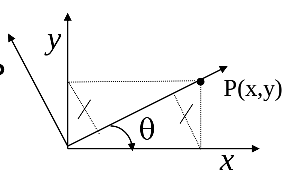
Dove: $q = \{q_r, q_i, q_j, q_k\}$

La rotazione attorno a z (forma matriciale)

sin θ = cos (90-θ)

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

P' = RP



Matrice di rotazione

$$\sum_{i=1}^{3} m^2_{ij} = 1$$

det(M) = 1

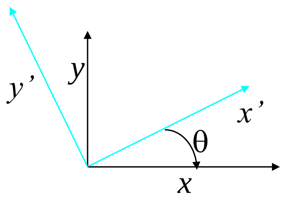
$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} m_{jk} = 0 \quad i \neq k$$

Matrice ortonormale

Significato geometrico della matrice di rotazione

Ruotiamo il sistema di riferimento xy in x'y' di un angolo -θ.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y'.

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

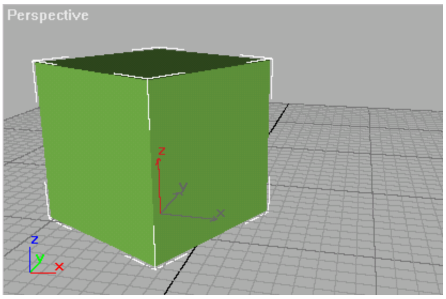
$$x' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0)$$
$$y' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0)$$
$$z' = (0 + 0 + z + 0)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

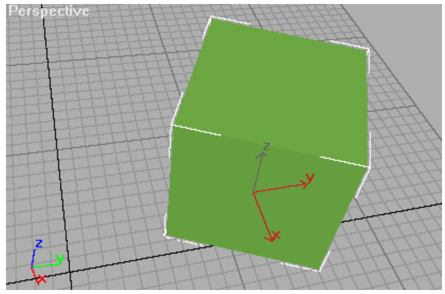
coord. omogenee

$$x^{R_z} = x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1$$
$$y^{R_z} = y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1$$
$$z^{R_z} = z'/w' = (z.1)/1$$

coord. cartesiane

Orientamento di un corpo rigido nello spazio



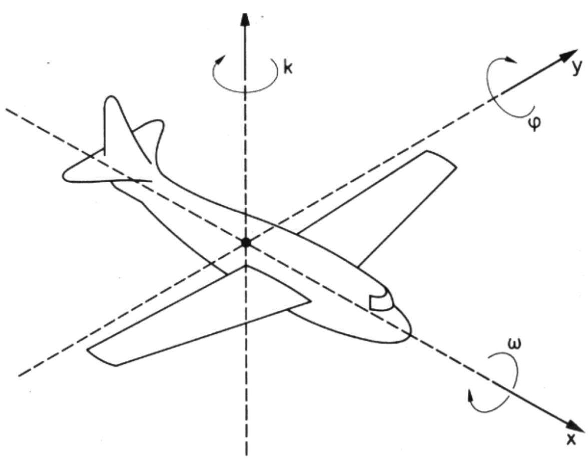


Tre rotazioni indipendenti ➔ tre parametri.

Angoli di orientamento nello spazio 3D

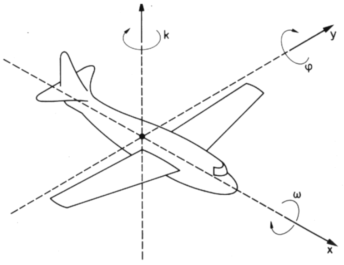
Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni **<u>sequenziali</u>**, non commutative.



Rotazione attorno ad un singolo asse

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.



$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

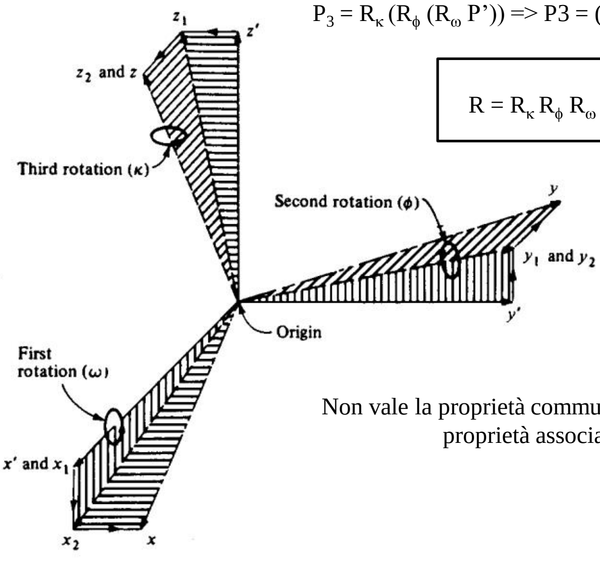
$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni sequenziali

$P_3 = R_\kappa (R_\phi (R_\omega P'))$ => $P3 = (R_\kappa R_\phi R_\omega) P'$

$$\boxed{R = R_\kappa R_\phi R_\omega}$$

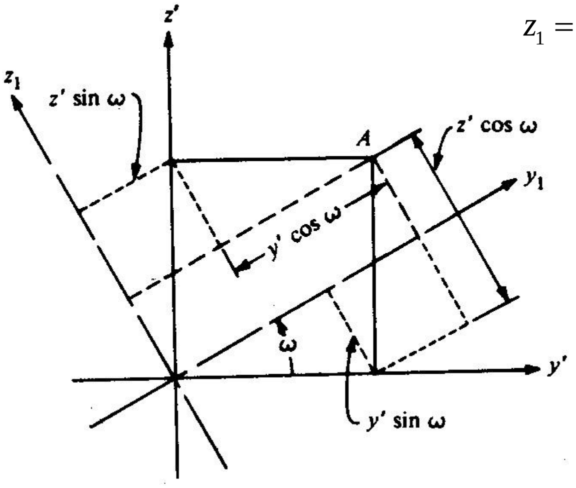


Non vale la proprietà commutativa, vale la proprietà associativa.

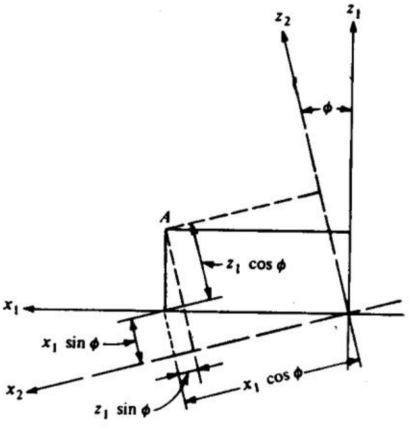
Ciascuna rotazione avviene su uno dei piani coordinati.

I) Rotazione attorno all'asse x (roll)

$$x_1 = x'$$
$$y_1 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_1 = -y'\sin\omega + z'\cos\omega$$



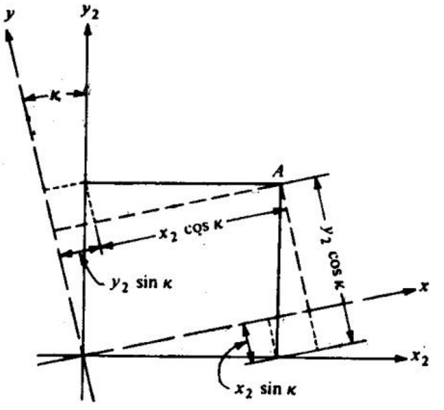
II) Rotazione attorno all'asse y (pitch)



$$x_2 = x_1\cos\phi - z_1\sin\phi$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = +x_1\sin\phi + z_1\cos\phi$$

$$x_2 = x'\cos\phi - (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi$$
$$y_2 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_2 = +x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

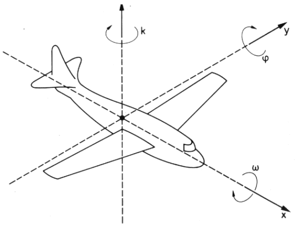
III) Rotazione attorno all'asse z (yaw)



$$x_3 = x_2 \cos k + y_2 \sin k$$
$$y_3 = -x_2 \sin k + y_2 \cos k$$
$$z_3 = z_2$$

$$x_3 = [x'\cos\phi - (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\cos k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\sin k$$
$$y_3 = -[x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\sin k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\cos k$$
$$z_3 = +x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\boxed{R = R_\kappa R_\phi R_\omega}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos k & \sin\omega\sin\phi\cos k + \cos\omega\sin k & -\cos\omega\sin\phi\cos k + \sin\omega\sin k \\ -\cos\phi\sin k & -\sin\omega\sin\phi\sin k + \cos\omega\cos k & \cos\omega\sin\phi\sin k + \sin\omega\cos k \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni "*semplici*" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

Rotazione generica (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempi di trasformazioni

V'' = S (T V) => V'' = (S T) V

V'' = R_κ (R_ϕ (R_ω V)) => V'' = (R_κ R_ϕ R_ω)V

V'' = T (RV) => V'' = (T R) V

Trasformare gli oggetti

- i vertici dell'oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate)
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna ***V***.
- ***R***, ***D*** e ***S*** sono matrici associate a rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene come:

V'=V+D traslazione, ***D*** è un vettore di traslazione
V'=SV scala, ***S*** è una matrice di scala
V'=RV rotazione, ***R*** è una matrice di rotazione

- Il punto trasformato si ottiene **in coordinate omogenee** come:

V'=V * D traslazione, ***D*** è una matrice 4x4 che contiene il vettore di traslazione
V'=S * V scala, ***S*** è una matrice di scala 4 x 4.
V'=R * V rotazione, ***R*** è una matrice 4x4 che contiene la matrice di rotazione

La rototraslazione in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

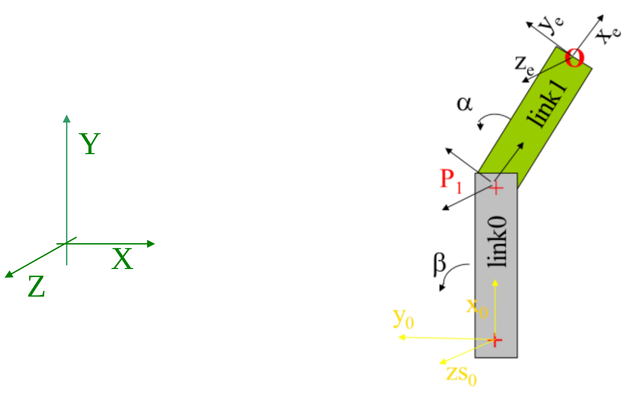
$$V'' = A_2 A_1 V = A_2(A_1 V) = (A_2 A_1)V = A\ V$$

  - la trasf. A_1 viene applicata per prima!

- ricordiamo che il prodotto di matrici <u>non è *commutativo*</u>: $A_2A_1 \neq A_1A_2$, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1V) = (A_2A_1)V$.

- ***L'applicazione di trasformazioni dipende dall'ordine con cui sono applicate.***
- ***Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice, fattorizzazione delle single matrici di trasformazione.***

Trasformazioni inverse



Trasformazione diretta: passo da $\{X_e, Y_e, Z_e\}$ nel sistema di riferimento end-point a $\{X_A, Y_A, Z_A\}$ nel sistema di riferimento assoluto.

Trasformazione inversa: passo da $\{X_A, Y_A, Z_A\}$ nel sistema di riferimento assoluto a $\{X_e, Y_e, Z_e\}$ nel sistema di riferimento di end-point.

Trasformazioni inverse

- La trasformazione inversa si ottiene invertendo l'ordine delle trasformazioni ed invertendo le singole matrici:

$$A = A_3A_2A_1 \Leftrightarrow A^{-1} = A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}$$

$$V'' = AV \quad => \quad V = A^{-1}V''$$

- Denotiamo le inverse come le matrici di trasformazione: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.
- La traslazione inversa si ottiene ***negando*** i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il ***reciproco*** dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene ***negando* l'angolo di rotazione**. **Matrice trasposta**. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa \Rightarrow R^{-1} = R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$

La rototraslazione inversa in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R^TRP = R^TP' - R^TT => P = A^{-1}P'$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i} \bullet \mathbf{T}$

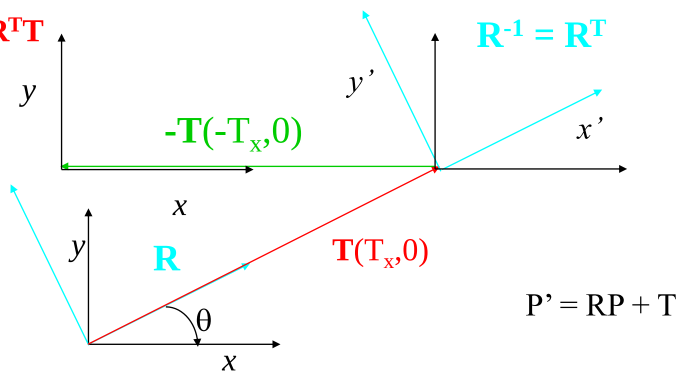
$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa) Vettore di traslazione (inverso)

Perchè $-R^T T$?

Solo così applicando trasformata diretta e inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.

$$P = R^T P' - R^T T$$

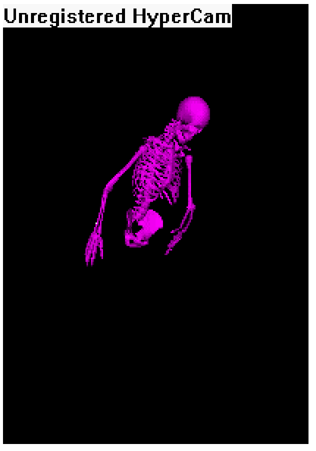


$R^T T$ è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.

Trasformazioni rigide

- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, scala e traslazione.

Skeleton animation through rotations



Skeleton - segments connected by hinges

We have to specify the orientation of one segments with respect to the previous one -> stack of transformations.

Sommario della lezione

- I comportamenti
- Comportamento reattivo
- Comportamento deliberativo (FSM)
- Gli scheletri
- Rappresentazione della posizione di uno scheletro